



# Mengen und Mengenoperationen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: [franz.embacher@univie.ac.at](mailto:franz.embacher@univie.ac.at)

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

In diesem Skriptum wird besprochen, was man über Mengen wissen sollte. Die hier vorgestellten elementaren Begriffe, Schreibweisen und Operationen werden in praktisch jedem mathematischen Teilgebiet benötigt.

## 1 Mengen

Der Begriff der **Menge** geht auf den Mathematiker Georg Cantor<sup>1</sup> zurück. Im Jahr 1895 formulierte er (sinngemäß):

*Unter einer Menge verstehen wir eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die Elemente der Menge genannt werden – zu einem Ganzen.*

Insbesondere ist die Zusammenfassung *mathematischer* Objekte (wie Zahlen, Punkte der Ebene oder Punkte des Raumes, aber auch abstrakterer Objekte wie Funktionen) sehr hilfreich. Sie erlaubt es, Sachverhalte und Beziehungen bequem und übersichtlich auszudrücken, und hilft uns beim Denken über mathematische Problemstellungen. Für die Aneignung praktisch jedes mathematischen Teilgebiets ist es nötig, zumindest ein bisschen über Mengen, wie man sie anschreibt und was man mit ihnen tun kann, zu wissen.

Ist  $x$  irgendein (vorzugsweise mathematisches) Objekt und  $A$  irgendeine Menge, so kann  $x$  ein **Element** der Menge  $A$  sein oder auch nicht. Dass  $x$  Element von  $A$  ist, schreiben wir in der Form<sup>2</sup>

$$x \in A \tag{1.1}$$

an. Das Symbol  $\in$  wird als „Element“ oder „ist Element von“ ausgesprochen. Statt „ $x$  ist Element von  $A$ “ sagt man auch „ $x$  liegt in  $A$ “ oder kurz „ $x$  in  $A$ “ (oder „ $x$  aus  $A$ “, insbesondere

<sup>1</sup> 1845 – 1918.

<sup>2</sup> Manchmal schreibt man auch  $A \ni x$ , ähnlich wie man statt  $x < y$  auch  $y > x$  schreiben kann.

dann, wenn man ein Element  $x$  aus  $A$  „herausgreifen“ möchte). Um auszudrücken, dass  $x$  *nicht* Element der Menge  $A$  ist, schreibt man  $x \notin A$ .

Um eine konkrete Menge formal anzugeben (zu definieren), stehen zunächst zwei Möglichkeiten zur Verfügung:

- **Aufzählung:** Die Elemente der Menge werden zwischen **Mengenklammern**  $\{$  und  $\}$  geschrieben und durch Beistriche getrennt. Beispielsweise bezeichnet

$$E = \{2, 3, 5, 7\} \quad (1.2)$$

die Menge, deren Elemente die Zahlen 2, 3, 5 und 7 sind. Dabei kommt es auf die Reihenfolge nicht an. Die gleiche Menge könnte man auch in der Form

$$E = \{7, 3, 2, 5\} \quad (1.3)$$

angeben. Für die Menge  $E$  gilt beispielsweise  $3 \in E$  und  $4 \notin E$ . Weiters kann jedes Element einer Menge nur *einmal* darin vorkommen. Unter  $\{2, 3, 5, 5, 7, 7\}$  wird die Menge (1.2) verstanden, also eine Menge mit vier Elementen, auch wenn einige Elemente mehrfach angegeben sind. Mengen können auch unendlich viele Elemente haben. So können wir beispielsweise durch die Schreibweise

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \quad (1.4)$$

festlegen, dass das Symbol  $\mathbb{N}$  die Menge aller natürlichen Zahlen (also die Zahlen, mit denen wir zählen, wobei mit 0 begonnen wird) bezeichnen soll. Die Punkte stehen für alle weiteren natürlichen Zahlen, die man ja nicht alle hinschreiben kann. Eine Schreibweise wie in (1.4) sollte nur dann verwendet werden, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, was die Punkte bedeuten.

- **Beschreibung durch Eigenschaften:** Hier ein Beispiel:

$$F = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10\}. \quad (1.5)$$

Diese Definition der Menge  $F$  kann wortwörtlich in die Alltagssprache übersetzt werden:

$F =$	$F$ ist gleich
$\{n \in \mathbb{N}$	die Menge aller $n \in \mathbb{N}$ (d.h. die Menge aller natürlichen Zahlen $n$ )
$ $	für die gilt:
$n \leq 10\}$	$n$ ist kleiner-gleich 10.

Die Menge (1.5) besteht also aus allen natürlichen Zahlen, die kleiner-gleich 10 sind. Statt des senkrechten Strichs | („für die gilt“) wird manchmal auch ein Doppelpunkt geschrieben. Statt (1.5) heißt es dann:

$$F = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 10\}. \quad (1.6)$$

Man kann diese Menge (völlig gleichwertig) auch in der Form

$$F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad (1.7)$$

festlegen. Es spricht auch nichts gegen eine Beschreibung in Worten:

$$F \text{ ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die kleiner-gleich 10 sind} \quad (1.8)$$

(oder „ $F$  sei die Menge ...“, wenn der Name  $F$  auf diese Weise eingeführt wird) oder

$$F = \{n \mid n \text{ ist natürliche Zahl kleiner-gleich } 10\}. \quad (1.9)$$

Wichtig ist nur, dass in eindeutiger Weise festgelegt wird, welche Objekte Elemente von  $F$  sind und welche nicht. Ein anderes Beispiel ist

$$H = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\}, \quad (1.10)$$

d.h. die Menge aller nicht-negativen geraden Zahlen. Da sie unendlich viele Elemente besitzt, kann man sie nicht alle aufzählen, aber man könnte statt (1.10) auch

$$H = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\} \quad (1.11)$$

schreiben, wenn aus dem Zusammenhang klar ist (oder eigens dazugesagt wird), was mit den Punkten gemeint ist. Eine Spur komplizierter als die bisherigen ist die folgende Mengendefinition:

$$Q = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}. \quad (1.12)$$

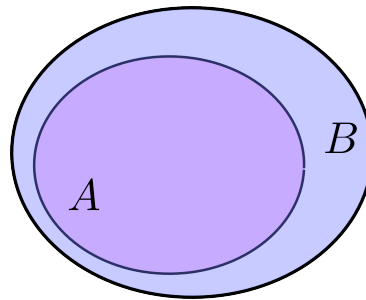
Lesen wir sie gemäß dem oben beschriebenen Rezept:  $Q$  ist die Menge aller  $n^2$ , für die  $n$  eine natürliche Zahl ist. Ist klar, was damit gemeint ist?

$$Q = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}.$$

ist die Menge aller Quadrate von natürlichen Zahlen

Die Zusammenfassung von Objekten zu Mengen kann, wie der Unterschied zwischen (1.5) und (1.8) zeigt, auf mehr oder weniger formale Weise ausgedrückt werden. Man kann auch beispielsweise eine Gerade in der Zeichenebene als Menge aller Punkte, die auf dieser Geraden liegen, auffassen. Ob man dabei offen lässt, was ein „Punkt“ ist (weil wir alle ohnehin eine hinreichend genaue Vorstellung davon haben) oder ob man Punkte durch ihre Koordinaten angeben und eine Geradengleichung dazuschreiben soll, ist zweitrangig und hängt davon ab, was man in weiterer Folge mit dieser Geraden machen möchte.

Generell gilt: Wenn eine formale („formelmäßige“) Beschreibung von Mengen – wie in (1.5) oder (1.12) – hilfreich ist, weil damit ein Sachverhalt knapp und übersichtlich ausgedrückt wird, dann soll man so vorgehen. Wichtig ist aber vor allem, dass durch eine Mengenbeschreibung klar ausgedrückt wird, was gemeint ist – egal, wie man es im Einzelfall macht.



**Abbildung 1:** Mengendiagramm zur Veranschaulichung der Beziehung  $A \subseteq B$ . Jede der beiden Mengen  $A$  und  $B$  ist durch alle Punkte innerhalb der entsprechend beschrifteten ovalen Figur repräsentiert.

## 2 Beziehungen zwischen Mengen

Sind  $A$  und  $B$  Mengen und ist jedes Element von  $A$  auch ein Element von  $B$ , so nennt man  $A$  eine **Teilmenge** (oder **Untermenge**) von  $B$  (und entsprechend  $B$  eine **Obermenge** von  $A$ ) und schreibt dafür

$$A \subseteq B \quad (2.1)$$

(„ $A$  ist Teilmenge von  $B$ “) oder  $B \supseteq A$  („ $B$  ist Obermenge von  $A$ “). Eine andere Sprechweise dafür ist: „ $B$  umfasst  $A$ “.

**Anmerkung:** Man sagt dann auch, dass  $A$  in  $B$  „enthalten“ ist. Aber Vorsicht: Manchmal wird – schlampig, wie wir Menschen sind – auch gesagt, dass ein Element  $y$  in der Menge  $B$  „enthalten“ ist. Ob „enthalten“ nun eine Teilmenge oder ein Element angibt, sollte aber immer aus dem Zusammenhang hervorgehen.

Aus der soeben angegebenen Definition des Begriffs Teilmenge ( $A$  heißt Teilmenge von  $B$ , wenn jedes Element von  $A$  auch Element von  $B$  ist) folgt, dass jede Menge Teilmenge von sich selbst ist, d.h. dass stets  $A \subseteq A$  gilt. (Das ist ganz analog wie beim Symbol  $\leq$ , für das ja nicht nur  $5 \leq 7$  gilt, sondern auch  $7 \leq 7$ .)

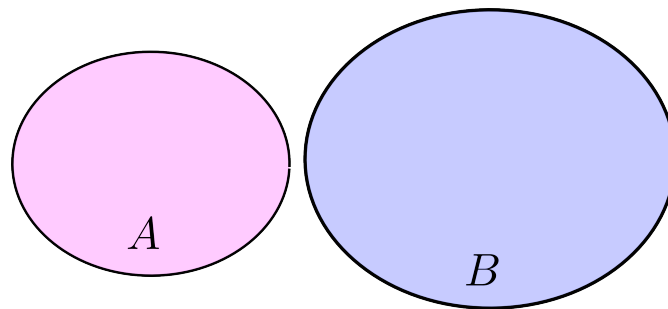
Ist  $A$  Teilmenge von  $B$  und sind  $A$  und  $B$  verschieden<sup>3</sup>, also  $A \neq B$ , so nennt man  $A$  eine **echte Teilmenge** von  $B$ . Um das eigens hervorzuheben, kann man dann statt  $A \subseteq B$  auch  $A \subsetneq B$  schreiben. In diesem Fall besitzt  $B$  mindestens ein Element, das nicht Element von  $A$  ist.

**Anmerkung:** In der Literatur findet sich auch die Schreibweise  $A \subset B$ . Leider wird sie von verschiedenen Autoren in unterschiedlicher Weise gebraucht (in einem Lehrbuch für „ $A$  ist Teilmenge von  $B$ “, in einem anderen für „ $A$  ist echte Teilmenge von  $B$ “), so dass wir davon abraten, sie zu benutzen.

<sup>3</sup> Wann sind zwei Mengen  $A$  und  $B$  gleich? Antwort: Wenn sie die gleichen Elemente besitzen, also wenn jedes Element von  $A$  auch Element von  $B$  ist und umgekehrt. Das ist genau dann der Fall, wenn sowohl  $A \subseteq B$  als auch  $B \subseteq A$  gilt.

Beziehungen zwischen Mengen kann man übersichtlich durch **Mengendiagramme (Venn-diagramme)** veranschaulichen. Abbildung 1 zeigt ein Mengendiagramm zur Veranschaulichung der Beziehung  $A \subseteq B$ .

Zwei Mengen  $A$  und  $B$ , die kein Element gemeinsam haben, heißen **disjunkt** (oder **elementfremd**) – siehe Abbildung 2.



**Abbildung 2:** Mengendiagramm zur Veranschaulichung zweier disjunkter Mengen.

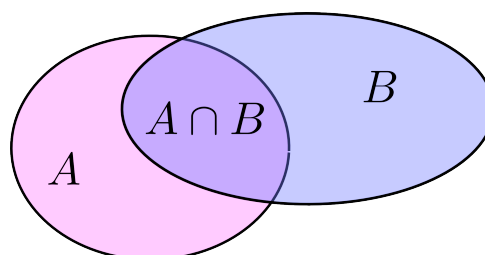
### 3 Mengen aus Mengen gewinnen

Sind  $A$  und  $B$  Mengen, so kann man daraus mit Hilfe einiger Operationen weitere Mengen gewinnen:

- Die **Durchschnittsmenge** (kurz: der **Durchschnitt**) zweier Mengen  $A$  und  $B$  ist die Menge aller Elemente, die sie *beide* besitzen. Sie wird mit dem Symbol  $A \cap B$  bezeichnet. Formal sieht das so aus:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}. \quad (3.1)$$

Siehe Abbildung 3 für eine Veranschaulichung.



**Abbildung 3:** Mengendiagramm zur Veranschaulichung des Konzepts der Durchschnittsmenge.  $A$  und  $B$  sind jeweils durch alle Punkte innerhalb der entsprechend beschrifteten ovalen Figur repräsentiert.  $A \cap B$  entspricht jenem Bereich, den sie beide gemeinsam überdecken.

**Beispiel:** Mit  $F$  von (1.5) und  $H$  von (1.10) ist

$$F \cap H = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}. \quad (3.2)$$

Will man dieser Durchschnittsmenge den Namen  $J$  geben, so schreibt man

$$J = F \cap H \quad (3.3)$$

oder, wenn gleich auch ihre Elemente in aufzählender Form angegeben werden sollen,

$$J = F \cap H = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}. \quad (3.4)$$

Das Konzept der Durchschnittsmenge wirft eine interessante Frage auf: Was ist der Durchschnitt zweier Mengen, die disjunkt sind, also kein Element gemeinsam haben? Sie müsste „leer“ sein. Obwohl das nicht wirklich der Idee der „Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte“ entspricht, vereinbaren wir, dass eine solche **leere Menge** ebenfalls zugelassen ist. Sie wird entweder mit dem Symbol  $\{\}$  oder mit dem Symbol  $\emptyset$  bezeichnet<sup>4</sup>. Jetzt kann aber wirklich nichts mehr passieren: Der Durchschnitt zweier Mengen ist stets wieder eine Menge. Zwei Mengen  $A$  und  $B$  sind genau dann disjunkt, wenn ihr Durchschnitt leer ist, d.h. wenn  $A \cap B = \{\}$  gilt.

Durchschnittsmengen werden in der Mathematik immer wieder und für ganz unterschiedliche Zwecke gebildet. Bezeichnet man beispielsweise die Punktmengen, die zwei einander im Punkt  $S$  schneidenden Geraden entsprechen, mit  $g_1$  und  $g_2$ , so ist  $g_1 \cap g_2$  die Menge, deren einziges Element der Schnittpunkt  $S$  ist. (Salopperweise schreibt man dann oft  $g_1 \cap g_2 = S$ , obwohl es eigentlich  $g_1 \cap g_2 = \{S\}$  heißen müsste. Erkennen Sie den Unterschied?)

- Die **Vereinigungsmenge** (kurz: die **Vereinigung**) von  $A$  und  $B$  ist die Menge, die man erhält, wenn die Elemente von  $A$  und  $B$  zusammengewürfelt werden. Sie wird mit dem Symbol  $A \cup B$  bezeichnet und ist die Menge aller Objekte, die Element von  $A$  oder Element von  $B$  sind (oder beides). Formal sieht das so aus<sup>5</sup>:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}. \quad (3.5)$$

Siehe Abbildung 4 für eine Veranschaulichung.

**Beispiel:** Mit  $E$  von (1.2) und  $K = \{7, 8\}$  ist

$$E \cup K = \{2, 3, 5, 7, 8\}. \quad (3.6)$$

- Die **Differenzmenge** (kurz: die **Differenz**) von  $B$  und  $A$  (beachten Sie die Reihenfolge!) ist die Menge aller Elemente von  $B$ , die *nicht* Elemente von  $A$  sind. Sie wird mit dem Symbol  $B \setminus A$  bezeichnet<sup>6</sup> und kurz als „ $B$  ohne  $A$ “ ausgesprochen. Sie entsteht, wenn man aus  $B$  alle Elemente entfernt, die in  $A$  liegen. Formal sieht das so aus:

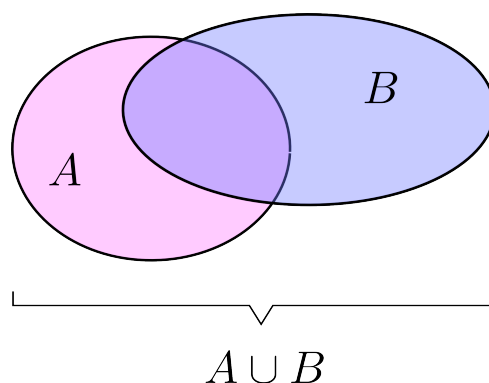
$$B \setminus A = \{x \in B \mid x \notin A\}. \quad (3.7)$$

Siehe Abbildung 5 für eine Veranschaulichung.

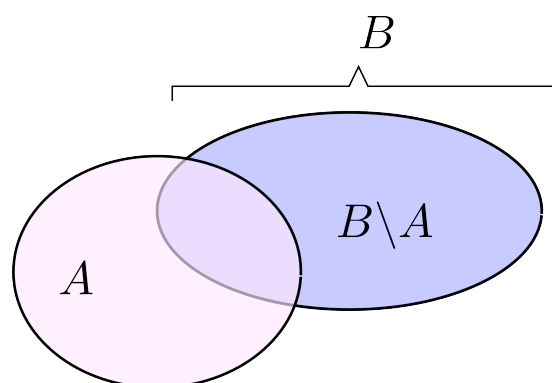
<sup>4</sup> Achtung: Bei  $\emptyset$  besteht eine gewisse Verwechslungsgefahr mit dem griechischen Buchstaben *Phi* (in den Schreibweisen  $\phi$  und  $\Phi$ ) und dem technischen Zeichen  $\varnothing$  für *Durchmesser*.

<sup>5</sup> Das „oder beides“ muss nicht eigens dazugeschrieben werden. Generell ist mit dem Wort „oder“ in der Mathematik gemeint „entweder ... oder ... oder beides“.

<sup>6</sup> Eine andere Bezeichnung, die man hie und da findet, ist  $B \sim A$ . Seltener (und nicht zur Nachahmung empfohlen) ist die Schreibweise  $B - A$ .



**Abbildung 4:** Mengendiagramm zur Veranschaulichung des Konzepts der Vereinigungsmenge.



**Abbildung 5:** Mengendiagramm zur Veranschaulichung des Konzepts der Differenzmenge.

**Beispiel:** Mit  $F$  von (1.5) und  $H$  von (1.10) ist

$$F \setminus H = \{1, 3, 5, 7, 9\}. \quad (3.8)$$

Das Konzept der Differenzmenge wird auch benutzt, um einzelne Elemente aus einer Menge auszuschließen.

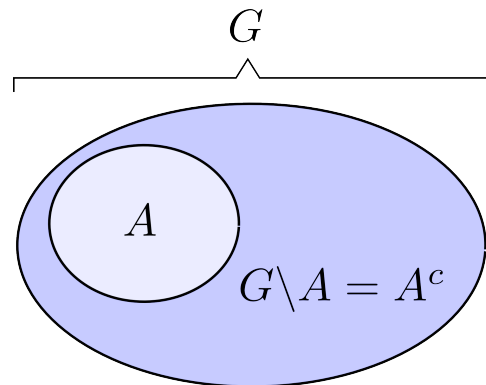
**Beispiel:**  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  ist die Menge der natürlichen Zahlen, die *nicht* gleich 0 sind:

$$\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}. \quad (3.9)$$

- Manchmal arbeitet man mit einer Menge (nennen wir sie  $G$ ), in der alle Objekte, die in einem bestimmten Zusammenhang auftreten können, als Elemente enthalten sind. ( $G$  könnte die Menge aller natürlichen Zahlen oder die Menge aller reellen Zahlen sein.) Wir nennen sie **Grundmenge**. Ist  $A \subseteq G$ , so wird die Differenzmenge  $G \setminus A$  (also die Menge aller Elemente von  $G$ , die nicht Element von  $A$  sind) als die **Komplementärmenge** (kurz: das **Komplement**) von  $A$  (bezüglich  $G$ ) bezeichnet. Ist klar, um welche Grundmenge es sich handelt, so schreibt man anstelle von  $G \setminus A$  kurz  $A^c$ . Siehe Abbildung 6 für eine Veranschaulichung.

Ein konkretes Beispiel für eine Komplementärmenge wurde in (3.9) bereits angegeben. (Man könnte diese Menge in der Form  $\{0\}^c$  anschreiben, wenn klar wäre, dass die

Grundmenge gleich  $\mathbb{N}$  ist. Da aber als Grundmenge oft auch die Menge aller reellen Zahlen verwendet wird, bleibt man lieber bei der Schreibweise  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ .)



**Abbildung 6:** Mengendiagramm zur Veranschaulichung des Konzepts der Komplementärmenge.

- Für manche Zwecke benötigt man **geordnete Paare** (kurz: **Paare**) von Objekten. Ein geordnetes Paar ist eine Liste aus zwei Objekten, einem ersten und einem zweiten. Sind  $a$  und  $b$  irgendwelche (vorzugsweise mathematische) Objekte, so schreibt man das aus  $a$  (als erstem Objekt) und  $b$  (als zweitem Objekt) gebildete Paar in der Form

$$(a, b) \quad (3.10)$$

an.

**Achtung:** Das Paar  $(a, b)$  ist nicht dasselbe wie die Menge  $\{a, b\}$ , denn bei geordneten Paaren kommt es auf die Reihenfolge an, bei Mengen hingegen nicht. Das Zahlenpaar  $(3, 5)$  ist nicht dasselbe wie das Zahlenpaar  $(5, 3)$ , aber die Mengen  $\{3, 5\}$  und  $\{5, 3\}$  sind gleich<sup>7</sup>.

Sind nun  $A$  und  $B$  Mengen, so nennt man die Menge aller geordneten Paare  $(a, b)$ , für die  $a \in A$  und  $b \in B$  ist, das **kartesische Produkt** der Mengen  $A$  und  $B$  und bezeichnet sie mit dem Symbol  $A \times B$ . Formal sieht das so aus:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}. \quad (3.11)$$

Paare von reellen Zahlen werden benutzt, um Punkte in der Ebene anzugeben: Bezeichnen wir die Menge aller reellen Zahlen mit  $\mathbb{R}$ , so ist  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  die Menge aller reellen

<sup>7</sup> Apropos  $(3, 5)$ : Wenn Dezimalzahlen mit einem *Dezimalpunkt* geschrieben werden, kann der Beistrich als Trennzeichen zwischen Zahlen verwendet werden. Dann ist klar, was die Schreibweisen für die Menge  $\{3.2, 5.7\}$  oder das Paar  $(3.2, 5.7)$  bedeuten. Falls man ein Komma statt des Dezimalpunkts schreibt, braucht man ein anderes Trennzeichen, etwa einen Strichpunkt. Dann heißt es beispielsweise  $\{3, 2; 5, 7\}$  und  $(3, 2; 5, 7)$ . Als Trennzeichen bei Paaren wird auch manchmal ein senkrechter Strich verwendet. Statt  $(a, b)$  schreibt man dann  $(a|b)$ . Man kann ein Paar auch in Spaltenform anschreiben, also als  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ . Dann ist überhaupt kein Trennzeichen nötig.



Zahlenpaare, d.h. die Menge aller  $(x, y)$ , für die  $x$  und  $y$  reelle Zahlen sind. Werden  $x$  und  $y$  als Koordinaten von Punkten in der Zeichenebene aufgefasst, so kann die Zeichenebene mit der Menge  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  identifiziert werden. Man kürzt sie meist als  $\mathbb{R}^2$  (ausgesprochen „R zwei“) ab.

In analoger Weise können **(geordnete) Tripel**

$$(a, b, c) \quad (3.12)$$

und, ganz allgemein, **(geordnete)  $n$ -Tupel**

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (3.13)$$

betrachtet und Mengen

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\} \quad (3.14)$$

und, ganz allgemein,

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\} \quad (3.15)$$

definiert werden. Die Menge  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  aller reellen Zahlentripel (Kurzschreibweise  $\mathbb{R}^3$ ) kann mit dem (dreidimensionalen) Raum identifiziert werden.

---

Dieses Skriptum wurde unter Mitwirkung von Harald Stockinger im Juli 2018 erstellt, gewissermaßen als Nachzügler im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“

(<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>).

Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.