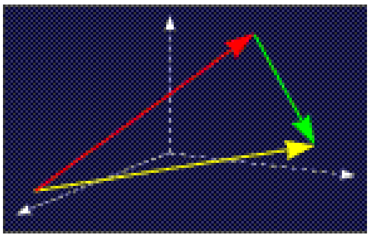
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Wurzelgleichungen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

In diesem Skriptum werden Wurzelgleichungen behandelt. Besonders wichtig für diesen Typ Gleichungen ist es, die Probe zu machen.

1 Wurzelgleichungen und die Probe

Eine **Wurzelgleichung** ist eine Gleichung, in der die Wurzel aus einem oder mehreren Termen vorkommt, möglicherweise auch in ineinandergeschachtelter Form. Der Begriff ist ein bisschen unscharf, wenn nicht genau dazu gesagt wird, um welche Arten von Termen es sich dabei handelt. Wir wollen uns hier darauf beschränken, dass außer dem Wurzelsymbol nur *Polynome* (niedrigen Grades) auftreten.

Ein Beispiel für eine einfache Wurzelgleichung ist

$$x - 1 = \sqrt{x+1}. \tag{1.1}$$

Sie stellt die Frage dar, ob es eine oder mehrere reelle Zahlen x gibt, für die die Aussage (1.1) wahr ist, und, falls ja, um welche Zahl(en) es sich dabei handelt. Wie können wir sie lösen? Erinnern wir uns: Wir dürfen mit beiden Seiten einer Gleichung das Gleiche machen. Also besteht die erste Wahl darin, beide Seiten von (1.1) zu quadrieren, um das Wurzelsymbol loszuwerden. So ergibt sich das folgende „Protokoll“:

$$\begin{array}{rcll} x-1 &=& \sqrt{x+1} & \mid \ \text{beide Seiten quadrieren} \\ (x-1)^2 &=& x+1 & \mid \ \text{linke Seite ausmultiplizieren} \\ x^2-2\,x+1 &=& x+1 & \mid \ -x-1 \\ x^2-3\,x &=& 0 & \mid \ \text{auf der linken Seite } x \text{ herausheben} \\ x\,(x-3) &=& 0 & \mid \ \text{quadratische Gleichung, deren Lösungen} \\ && & \mid \ \text{wir sofort hinschreiben können} \\ x_1 &=& 0 & \\ x_2 &=& 3 & \end{array} \tag{1.2}$$

Sind die Lösungen von (1.1) also 0 und 3? Machen wir die Probe. Zuerst[1] mit $x = 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{LHS} &= 0 - 1 = -1 \qquad (1.3) \\ \mathrm{RHS} &= \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1 \qquad (1.4) \end{aligned}$$

Hoppla! $x = 0$ erfüllt (1.1) nicht! Nun die Probe mit $x = 3$:

$$\begin{aligned} \mathrm{LHS} &= 3 - 1 = 2 \qquad (1.5) \\ \mathrm{RHS} &= \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2 \qquad (1.6) \end{aligned}$$

Hier stimmt alles: $x = 3$ ist Lösung von (1.1). Offenbar besitzt (1.1) nur eine Lösung. Ihre Lösungsmenge ist $L = \{3\}$.

Was ist passiert? Die Antwort ist einfach: Das Quadrieren beider Seiten einer Gleichung ist *keine Äquivalenzumformung*. Das bedeutet, dass die „quadrierte" Gleichung eine andere Lösungsmenge haben kann als die ursprüngliche. Durch das Quadrieren kann man sich Lösungskandidaten einhandeln, die keine Lösungen sind. Ein einfaches Beispiel, das das illustriert, ist die Gleichung

$$x = 1. \qquad (1.7)$$

Sie besitzt (natürlich) nur die Lösung 1. Quadrieren wir beide Seiten, so erhalten wir die Gleichung

$$x^2 = 1, \qquad (1.8)$$

und diese besitzt zwei Lösungen, nämlich -1 und 1. Da wir aber nicht auf das Quadrieren beider Seiten von (1.1) verzichten wollen, bleibt nur ein Ausweg: Wir *müssen* die Probe machen, um die echten Lösungen von jenen zu unterscheiden, die wir uns durch das Quadrieren eingehandelt haben. Daher lautet die **wichtigste Regel beim Lösen von Wurzelgleichungen**: Werden beide Seiten einer Wurzelgleichung quadriert, um die Wurzelsymbole loszuwerden, so ergeben sich zunächst nur *Lösungskandidaten*. Von jedem dieser Lösungskandidaten muss mit Hilfe der Probe entschieden werden, ob er eine Lösung ist oder nicht.

Wenn wir die Gleichung (1.1) betrachten, so fällt uns noch etwas anderes auf: Die rechte Seite ist nicht für alle reellen x definiert. Im Rahmen der reellen Zahlen kann aus einer negativen Zahl nicht die Wurzel gezogen werden, und daher ist von vornherein zu verlangen, dass $x + 1 \geq 0$ ist. Die mathematisch saubere Art, das zu verlangen, besteht darin, die Definitionsmenge[2] $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x + 1 \geq 0\}$ festzulegen. Nun kommt die gute Nachricht: In der Praxis können wir es uns sparen, bei einer Wurzelgleichung, die durch Quadrieren beider Seiten gelöst wird, die Definitionsmenge anzuschreiben, da wir sowieso von jedem Lösungskandidaten mit Hilfe der Probe entscheiden müssen, ob er eine Lösung ist! Käme da ein Lösungskandidat daher, für den eine unter einem Wurzelsymbol stehende Zahl negativ wäre, würde das bei der Probe sogleich auffallen. Das ist die **zweite Regel beim Lösen von Wurzelgleichungen**: Die Angabe der Definitionsmenge ist mathematisch gut und schön, aber entbehrlich, wenn ohnehin in jedem Fall die Probe gemacht wird (und wir werden es im Folgenden auch nicht tun).

Ausgerüstet mit diesen beiden Regeln sehen wir uns nun einige Typen von Wurzelgleichungen an.

[1] LHS („left hand side") steht für die linke Seite der Gleichung, RHS („right hand side") steht für ihre rechte Seite.

[2] Zur Definitionsmenge siehe das Skriptum über Bruchgleichungen.

2 Wurzelgleichungen mit nur einer Wurzel

Tritt nur eine einzige Wurzel in einer Wurzelgleichung auf, so lautet die Strategie: Die Wurzel wird (durch Addieren gleicher Terme auf beiden Seiten) auf eine Seite der Gleichung gebracht, alles andere auf die andere Seite, und danach wird quadriert. Gleichung (1.1) ist bereits in der gewünschten Form. Sehen wir uns als zweites Beispiel die Wurzelgleichung

$$2\,x+\sqrt{x^2+9}=4\,x+3 \tag{2.1}$$

an! Das folgende „Protokoll“ zeigt die Ermittlung der Lösungskandidaten:

$$\begin{aligned}
2\,x+\sqrt{x^2+9} &= 4\,x+3 && \mid\ -2\,x\\
\sqrt{x^2+9} &= 2\,x+3 && \mid\ \text{beide Seiten quadrieren}\\
x^2+9 &= (2\,x+3)^2 && \mid\ \text{rechte Seite ausmultiplizieren}\\
x^2+9 &= 4\,x^2+12\,x+9 && \mid\ -x^2-9\\
0 &= 3\,x^2+12\,x && \mid\ :3\\
0 &= x^2+4\,x && \mid\ \text{auf der rechten Seite } x \text{ herausheben}\\
0 &= x\,(x+4) && \mid\ \text{quadratische Gleichung, deren Lösungen}\\
& && \mid\ \text{wir sofort hinschreiben können}\\
x_1 &= -4\\
x_2 &= 0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Nun die Probe für $x=x_1=-4$:

$$\mathrm{LHS} = 2\cdot(-4)+\sqrt{(-4)^2+9}=-8+\sqrt{25}=-8+5=-3 \tag{2.3}$$

$$\mathrm{RHS} = 4\cdot(-4)+3=-13 \tag{2.4}$$

Daher ist -4 *keine* Lösung von (2.1). Und die Probe für $x=x_2=0$:

$$\mathrm{LHS} = 2\cdot 0+\sqrt{0^2+9}=\sqrt{9}=3 \tag{2.5}$$

$$\mathrm{RHS} = 4\cdot 0+3=3 \tag{2.6}$$

Daher ist 0 eine Lösung von (2.1). Die Lösungsmenge von (2.1) ist $L=\{0\}$.

3 Wurzelgleichungen mit zwei Wurzeln

Wurzelgleichungen, in denen zwei Wurzeln auftreten, sind eine Spur herausfordernder. Betrachten wir als Beispiel die Gleichung

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}=3. \tag{3.1}$$

Was tun in diesem Fall? Wir könnten einfach beide Seiten quadrieren. Probieren wir es aus: Wir erhalten

$$x+2+2\,\sqrt{x+2}\sqrt{x-1}+x-1=9, \tag{3.2}$$

wobei wir die linke Seite durch Anwendung der ersten binomischen Formel berechnet haben. Bedenken wir nun, dass $\sqrt{x+2}\sqrt{x-1}=\sqrt{(x+2)\,(x-1)}$ ist, und vereinfachen die linke Seite, so erhalten wir die Gleichung

$$2\,x+1+2\,\sqrt{(x+2)\,(x-1)}=9. \tag{3.3}$$

Nun haben wir nur mehr eine einzige Wurzel und verfahren wie im vorigen Abschnitt besprochen. Machen Sie das zur Übung selbst! Die Lösung ist:

Die Lösungsmenge ist $L = \{2\}$.

Damit zeichnet sich die Idee einer allgemeinen Lösungsmethode ab, die auch bei komplizierteren Wurzelgleichungen oft zum Ziel führt: **Quadrieren, um die Zahl der auftretenden Wurzeln zu reduzieren!** Dabei gibt es in der Regel mehrere Möglichkeiten, wie das bewerkstelligt werden kann. So könnten wir beispielsweise (3.1) zu

$$\sqrt{x+2} = 3 - \sqrt{x-1} \tag{3.4}$$

umformen und nun beide Seiten quadrieren. Dann erhalten wir mit

$$x + 2 = 9 - 6\sqrt{x-1} + x - 1 \tag{3.5}$$

eine Gleichung, die ebenso wie (3.3) nur mehr eine einzige Wurzel enthält, aber leichter zu lösen ist, da die auftretenden Terme einfacher sind. Lösen Sie (3.1) zur Übung auch auf diese Weise!

Bevor Sie eine Wurzelgleichung in Angriff nehmen, lohnt es sich, die möglichen Strategien im Kopf durchzugehen und gegeneinander abzuwägen.

4 Ineinandergeschachtelte Wurzeln

Haben wir es mit einer Gleichung wie

$$\sqrt{-3\,x - 1 - \sqrt{4\,x + 5}} = 1 \tag{4.1}$$

zu tun, so reicht zweimaliges Quadrieren, um beide Wurzeln loszuwerden. Versuchen Sie es selbst! Die Lösung ist:

Die Lösungsmenge ist $L = \{-1\}$.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Juni 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Es wurde in den Jahren 2015 – 2018 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.