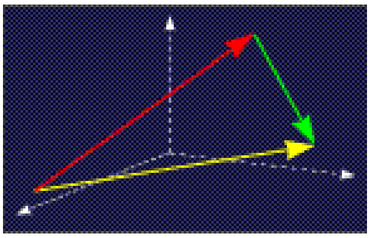
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Was ist eine Gleichung?

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

In diesem Skriptum besprechen wir, was Gleichungen sind. Dabei steht nicht im Vordergrund, wie man sie löst, sondern wie man über sie denken sollte.

1 Zahlen in Terme einsetzen

Bevor wir zum Thema Gleichungen kommen, bereiten wir das Terrain auf und erinnern uns daran, wozu ein *Term* dient. Betrachten wir als Beispiel den einfachen Term

$$4\,x + 7. \tag{1.1}$$

Das Symbol x, die *Variable*, ist ein Platzhalter für eine Zahl, auf die wir uns zunächst nicht festlegen. Wir können aber jederzeit anstelle von x eine beliebige Zahl einsetzen. Wird für x etwa die Zahl 3 gesetzt, so nimmt der Term (1.1) den Wert

$$4 \cdot 3 - 7 = 12 - 7 = 5 \tag{1.2}$$

an. Wird für x die Zahl -2 gesetzt, so nimmt er den Wert

$$4 \cdot (-2) - 7 = -8 - 7 = -15 \tag{1.3}$$

an. Das ist also die grundlegende Aufgabe unseres Terms: einen konkreten Zahlenwert anzunehmen, wenn ein Wert für die Variable vorgegeben ist.

2 Gleichungen

Nun drehen wir den Spieß um und fragen, ob es möglich ist, die Variable x so zu wählen, dass der Wert des Terms (1.1) gleich 15 ist. Und, falls ja, für welchen Wert x das der Fall ist. Das bedeutet, wir fragen, ob es eine Zahl x gibt mit der Eigenschaft

$$4\,x + 7 = 15. \tag{2.1}$$

Das ist eine **Gleichung**. Das Gleichheitszeichen ist hier als „Wunsch“ zu verstehen, im Unterschied zum Gleichheitszeichen in einer Identität, die ja für *beliebige* Werte der Variable immer wahr ist. In diesem Sinn ist die Gleichung (2.1) gleichbedeutend mit der Aufgabe

> „Gewünscht wird eine Zahl mit der folgenden Eigenschaft: Multipliziert man sie mit 4 und subtrahiert vom Ergebnis 7, so ergibt sich 15. Gibt es eine solche Zahl? Kann man sie angeben?“

Das ist also die Frage, die unsere Gleichung ausdrückt. Eine **Lösung** der Gleichung ist ein Wert der Variable x, für den (2.1) eine wahre Aussage ist.

Zunächst haben wir keine Gewähr, dass es überhaupt eine Lösung gibt. Vielleicht gibt es eine, vielleicht auch nicht. Vielleicht gibt es auch *mehrere* Lösungen. Um den Rahmen abzustecken, in dem die Frage, die in Form der Gleichung gestellt ist, sauber behandelt werden kann, legen wir fest, die Menge *aller* Lösungen als **Lösungsmenge** zu bezeichnen. Gibt es keine Lösung, so ist die Lösungsmenge leer. Gibt es eine einzige Lösung (in der Mathematik sagt man dann, dass es „genau eine“ Lösung gibt), so hat die Lösungsmenge (genau) ein Element. Gibt es mehrere Lösungen, so hat die Lösungsmenge dementsprechend mehrere Elemente. Die Aufgabe, eine Gleichung zu lösen, bedeutet, alle Lösungen, d.h. die Lösungsmenge, zu finden.

Ein anderes, etwas komplizierteres Beispiel einer Gleichung ist

$$x^2 + 3\,x - 7 = x + 2. \tag{2.2}$$

Hier haben wir zwei Terme, einen auf der linken Seite (d.h. links vom Gleichheitszeichen) und einen auf der rechten (rechts vom Gleichheitszeichen). Für jeden Zahlenwert, den wir der Variable x geben, nimmt die linke Seite einen konkreten Wert an, und es nimmt die rechte Seite einen konkreten Wert an. Im Allgemeinen werden diese beiden Werte verschieden sein. Die Frage, die diese Gleichung ausdrückt, lautet: Ist es möglich, die Variable x so zu wählen, dass beide Seiten von (2.2) den *gleichen* Wert annehmen, d.h. dass (2.2) eine wahre Aussage ist? Und, falls ja, um welchen Wert von x (bzw. – falls es mehrere solche Möglichkeiten gibt – um welche Werte von x) handelt es sich? Jeder derartige Wert von x ist eine Lösung der Gleichung, und die Gesamtheit aller Lösungen ist die Lösungsmenge.

Generell ist eine Gleichung vom Typ

$$\text{Term}_1 = \text{Term}_2. \tag{2.3}$$

Die beiden Terme können einfach oder kompliziert sein, und dementsprechend ist es leicht oder schwierig, die Lösungsmenge zu finden.

Die in einer Gleichung auftretende Variable muss nicht unbedingt x heißen. Man könnte die Gleichung (2.2) genauso gut in der Form

$$u^2 + 3\,u - 7 = u + 2 \tag{2.4}$$

anschreiben. Mathematisch ändert sich dadurch nichts.

Manchmal werden Sie in Ihrer mathematischen Ausbildung Gleichungen begegnen, in denen außer der Variable noch andere Symbole vorkommen. Ein Beispiel dafür ist

$$x^2 + a\,x = 5. \tag{2.5}$$

Hier ist a ein Platzhalter für eine Zahl, auf deren Wert man sich nicht festlegen möchte, die man sich aber als fix festgehalten vorstellt, und die – im Unterschied zur *Variable* x – als *Konstante* bezeichnet wird. Genau genommen haben wir es hier mit *vielen* Gleichungen zu tun: Für jeden Zahlenwert von a stellt (2.5) eine andere Gleichung (mit Variable x) dar! Man kann auch sagen, dass (2.5) eine ganze „Klasse" oder einen „Typ" von Gleichungen darstellt. Für jeden Wert von a kann sich eine andere Lösungsmenge ergeben.

3 Grundmenge

Manchmal interessiert man sich nur für jene Lösungen einer Gleichung, die eine bestimmte Zusatzbedingung erfüllen. Stellt die Variable etwa eine *Anzahl* von Dingen dar, so sind nur Lösungen relevant, die natürliche Zahlen sind. Stellt die Variable einen *Abstand* dar, so wird man von ihr verlangen, dass sie > 0 oder ≥ 0 ist. Allgemein kann man eine **Grundmenge** festlegen, in der die Lösungen, die von Interesse sind, liegen müssen. Eine Lösung ist dann ein Zahlenwert der Variable, für den die Gleichung eine wahre Aussage darstellt, *und* der ein Element der Grundmenge ist. Die Grundmenge wird meist mit dem Buchstaben G bezeichnet. Man sagt dann auch, dass die betreffende Gleichung „über der Grundmenge G" zu verstehen ist. Ein Beispiel, in der vielfach üblichen Kurzschreibweise[1]:

$$u^2 + 3\,u - 7 = u + 2 \qquad\qquad G = \mathbb{R}^+ \tag{3.1}$$

Als Lösung gilt nun jede positive reelle Zahl u, für die (3.1) eine wahre Aussage ist (wir sagen auch: „die (3.1) erfüllt"). Die Menge *aller* dieser Zahlen ist die Lösungsmenge.

Ist für eine Gleichung keine Grundmenge angegeben, so ist üblicherweise gemeint, dass alle reellen Zahlen zugelassen sind, d.h. dass $G = \mathbb{R}$ ist.

4 Ein konkretes Anwendungsbeispiel

Gleichungen treten in vielfältigen Zusammenhängen und in praktisch allen Anwendungsgebieten der Mathematik auf. Sehen wir uns ein praktisches Beispiel an: Der Anhalteweg beim Autofahren (d.h. die – in Meter gemessene – Strecke, die das Fahrzeug vom Zeitpunkt des Erkennens einer Situation, die ein Bremsen erfordert, bis zum Stillstand zurücklegt) wird mit der Faustformel

$$\text{Anhalteweg} = \frac{v^2}{100} + \frac{3\,v}{10} \tag{4.1}$$

berechnet[2], wobei v die in $\mathrm{km/h}$ angegebene Geschwindigkeit (zum Zeitpunkt des Erkennens eines Hindernisses) ist. Nun stehen in einem Straßenabschnitt umfangreiche Straßenbauarbeiten bevor. Aufgrund der örtlichen Gegebenheiten empfiehlt die Baufirma der zuständigen

[1] Zur Erinnerung: Mit dem Symbol $\mathbb{R}^+$ wird die Menge aller positiven reellen Zahlen bezeichnet.

[2] Der lineare Term $\frac{3\,v}{10}$ gibt den Reaktionsweg an, der quadratische Term $\frac{v^2}{100}$ den Bremsweg.

Behörde, in dem betreffenden Straßenabschnitt eine Geschwindigkeitsbeschränkung zu verhängen, sodass der typische Anhalteweg $40\,\mathrm{m}$ nicht übersteigt. Der Experte der Behörde legt seiner Berechnung die Formel (4.1) zugrunde und stellt die Frage, bei welcher Geschwindigkeit sich aus ihr ein Anhalteweg von $40\,\mathrm{m}$ ergibt. Diese Geschwindigkeit v muss dann die Gleichung

$$\frac{v^2}{100} + \frac{3\,v}{10} = 40 \tag{4.2}$$

erfüllen. Als Grundmenge wird dabei die Menge der positiven reellen Zahlen zugrunde gelegt (da eine negative Lösung keine Bedeutung für die Fragestellung hätte). Hier haben wir eine Gleichung, von deren Lösung die Entscheidung einer Behörde abhängt! Eine geeignete Methode, diese (quadratische) Gleichung zu lösen, wird in einem anderen Skriptum besprochen, aber wir verraten dennoch, was dabei herauskommt: Es gibt zwei Zahlen, die (4.2) erfüllen, nämlich -80 und 50. Die negative liegt nicht in der Grundmenge, ist daher nicht von Belang, und daher ergibt sich als einzige Lösung $v = 50$. Die Entscheidung der Behörde lautet somit: Beschränkung der Höchstgeschwindigkeit auf $50\,\mathrm{km/h}$.

5 Gleichungen lösen

Je nachdem, von welchem Typ die in einer Gleichung auftretenden Terme sind, gibt es spezielle, *systematisch anzuwendende* **Lösungsmethoden**, auf die wir hier aber nicht näher eingehen. Einige von ihnen werden in anderen Skripten besprochen. In manchen Fällen ist aber keine ausgefeilte Methode erforderlich, sondern lediglich ein elementares Wissen über Zahlen und Zahlenoperationen, und da diese einfachen Fälle das Verständnis erleichtern, wollen wir uns einige ansehen:

- Betrachten wir als erstes Beispiel die Gleichung

  $$x^2 + 1 = 0. \tag{5.1}$$

  Sie besitzt (im Rahmen der reellen Zahlen, d.h. über der Grundmenge $G = \mathbb{R}$) keine Lösung[3], und zwar aus dem einfachen Grund, dass x^2 für keine reelle Zahl negativ sein kann und $x^2 + 1$ daher nie kleiner als 1 ist. $x^2 + 1$ kann für keine reelle Zahl gleich 0 sein. Die Lösungsmenge von (5.1) ist leer.

- Nun nehmen wir uns die ganz zu Beginn betrachtete Gleichung

  $$4\,x + 7 = 15 \tag{5.2}$$

  vor. Sie stellt eine harmlose Denksportaufgabe dar: Wenn die Summe $4\,x + 7$ gleich 15 sein soll, muss $4\,x$ gleich 8 sein, denn die Frage „wieviel $+\,7 = 15$?“ hat nur die Antwort 8. Wenn aber das Vierfache von x gleich 8 ist, muss x ein Viertel von 8 sein, also 2. Und damit ist die (einzige) Lösung gefunden! Wir können sie in der Form $x = 2$ anschreiben oder die Lösungsmenge in der Form $L = \{2\}$ angeben. Die Argumentation, die zu ihr

[3] Die reellen Zahlen als Grundmenge werden hier deshalb betont, weil es einen erweiterten Zahlbegriff gibt, die *komplexen* Zahlen, in deren Rahmen die Gleichung (5.1) sehr wohl Lösungen besitzt (und zwar gleich zwei).

geführt hat, ist ein Beispiel einer logischen Schlussfolgerung: Falls für irgendeine Zahl x die Aussage $4\,x + 7 = 15$ wahr ist, so muss $x = 2$ sein. Wir können das auch in der Form

$$4\,x + 7 = 15 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \tag{5.3}$$

ausdrücken. Das Symbol $\Rightarrow$ bedeutet „daraus folgt" und wird auch so ausgesprochen. Da $x = 2$ eine Lösung unserer Gleichung ist, gilt auch die umgekehrte Schlussfolgerung

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad 4\,x + 7 = 15. \tag{5.4}$$

Wer's nicht glaubt, rechnet einfach nach: $4 \cdot 2 + 7 = 8 + 7 = 15$. Die beiden Schlussfolgerungen (5.3) und (5.4) können wir gemeinsam in der Form

$$4\,x + 7 = 15 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \tag{5.5}$$

ausdrücken. Das Symbol $\Leftrightarrow$ bedeutet „genau dann, wenn" und wird auch so ausgesprochen. Wir nennen die beiden Aussagen „$4\,x + 7 = 15$" und „$x = 2$" zueinander *äquivalent*. (5.5) zeigt am klarsten, dass die Gleichung $4\,x + 7 = 15$ genau eine Lösung hat, nämlich 2.

- Unser nächstes Beispiel ist die Gleichung

$$x^2 = 9. \tag{5.6}$$

Man könnte jetzt versucht sein zu sagen: Wenn das Quadrat von x gleich 9 ist, ist x gleich der Wurzel aus 9, also $x = \sqrt{9} = 3$. Dieses Argument hat einen wahren Kern, ist aber genau genommen falsch! Warum? Weil $x = -3$ auch eine Lösung ist, denn $(-3)^2 = 3^2 = 9$. Die Gleichung (5.6) hat also zumindest zwei Lösungen. Dass sie *genau* zwei Lösungen hat, kann man mit einem wunderschönen Argument einsehen: (5.6) sagt genau das Gleiche aus wie

$$x^2 - 9 = 0, \tag{5.7}$$

denn dass x^2 gleich 9 sein soll, kann man auch in der Form ausdrücken, dass die Differenz $x^2 - 9$ gleich 0 ist. Nun folgt aus einer der binomischen Formeln, dass für beliebige reelle x

$$x^2 - 9 = (x + 3)\,(x - 3) \tag{5.8}$$

gilt. Wenn nun aber $x^2 - 9 = 0$ sein soll, muss $(x + 3)\,(x - 3) = 0$ sein. Für jedes x ist $(x + 3)\,(x - 3)$ das Produkt zweier Zahlen, und das kann *nur dann* gleich 0 sein, wenn (zumindest) *eine* der beiden Zahlen 0 ist! Also gilt entweder $x + 3 = 0$ (was gleichbedeutend ist mit $x = -3$) oder $x - 3 = 0$ (was gleichbedeutend ist mit $x = 3$). Hier haben wir wieder eine logische Schlussfolgerung, die aber diesmal so aussieht:

$$x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = -3 \text{ oder } x = 3. \tag{5.9}$$

Umgekehrt gilt sowohl für $x = -3$ als auch für $x = 3$, dass $x^2 = 9$ ist, daher:

$$x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \text{ oder } x = 3. \tag{5.10}$$

Unsere Gleichung (5.6) hat also genau zwei Lösungen, nämlich -3 und 3. Ihre Lösungsmenge ist $L = \{-3, 3\}$.

- Ein letztes Beispiel:

$$8\,z^3 + 2\,z^2 - 12\,z - 5 = 0. \tag{5.11}$$

  Die Variable heißt jetzt z, aber das ist nicht weiter schlimm. Was schwerer wiegt, ist die komplizierte Form des Terms auf der linken Seite. Er ist ein Polynom vom Grad 3. Wir machen jetzt nicht den Versuch, die Lösungen dieser Gleichung zu finden, aber wenn Sie ein bisschen über Polynome wissen, werden Sie sich vielleicht daran erinnern, dass ein Polynom, dessen Grad eine ungerade Zahl ist, für irgendeinen Wert der Variable (so schwierig es auch sein mag, diesen zu berechnen) gleich 0 ist[4]. Das bedeutet, dass die Gleichung (zumindest) eine Lösung besitzt! Womit wir uns hier begnügen müssen[5].

Jetzt sollte klar geworden sein, *was* eine Gleichung ist. In den meisten Fällen, in denen eine Gleichung auftritt, ist man an deren Lösungen interessiert. Wie erwähnt, stehen zahlreiche Methoden zur Verfügung, um diese (exakt oder näherungsweise) zu finden. In anderen Fällen reicht es zu wissen, dass eine Gleichung eine Lösung besitzt, und manchmal ist man zufrieden herauszubekommen, dass eine Gleichung *keine* Lösung besitzt (beispielsweise wenn sie den möglichen Zusammenstoß der Erde mit einem Asteroiden beschreibt, der ihr gefährlich nahe kommt).

6 Probe

Um die Lösung(en) einer Gleichung zu finden, ist es – außer bei sehr einfachen Typen – nötig, ein bisschen zu rechnen. Dabei können natürlich Fehler passieren. So schwierig es sein mag, eine Gleichung zu lösen, so einfach ist der umgekehrte Prozess – zu überprüfen, ob eine gegebene Zahl eine Lösung ist. Dafür müssen wir sie ja bloß in die Gleichung einsetzen und nachprüfen, ob die linke und die rechte Seite den gleichen Wert annehmen. Eine solche Rechnung heißt **Probe**.

Nehmen wir beispielsweise an, wir haben es mit der Gleichung

$$(x + 2)^2 + x = x^2 + 3\,x + 8 \tag{6.1}$$

zu tun, und eine Lösungsmethode führt zum Ergebnis, dass die Zahl 2 eine Lösung ist. Zur Probe geben wir der Variable x den Wert 2 und berechnen die linke und die rechte Seite der Gleichung *getrennt*. Man nennt die linke Seite am besten LHS (für „left hand side") und die rechte Seite RHS (für „right hand side"):

$$\mathrm{LHS} \;=\; (2 + 2)^2 + 2 = 4^2 + 2 = 16 + 2 = 18 \tag{6.2}$$

$$\mathrm{RHS} \;=\; 2^2 + 3 \cdot 2 + 8 = 4 + 6 + 8 = 18 \tag{6.3}$$

Beide Seiten nehmen für $x = 2$ den gleichen Wert an (nämlich 18), womit die Probe gelungen ist![6] Die Zahl 2 ist tatsächlich eine Lösung der Gleichung (6.1).

[4] Ist z *sehr* groß, so ist die linke Seite von (5.11) positiv. Ist $z < 0$ und $|z|$ *sehr* groß, so ist sie negativ. Wird z entlang der Zahlengeraden von links nach rechts bewegt, so schlägt das Vorzeichen irgendwo um – und dort ist die linke Seite von (5.11) gleich 0.

[5] Mit einer grafischen Methode, die später im Stoff kommt, kann man herausfinden, dass die Gleichung (5.11) drei Lösungen hat. Ihre Werte sind näherungsweise -1.09778,-0.441568 und 1.28934.

[6] Wichtig ist, dass für jedes x, das *keine* Lösung der Gleichung ist, LHS *nicht* gleich RHS ist.

Wichtig bei einer Probe ist, dass die linke und die rechte Seite der Gleichung wirklich *voneinander getrennt* berechnet werden, denn bei ihr geht es *nicht* darum, die Gleichung erneut zu lösen, sondern sich von einer vermuteten Lösung zu vergewissern, dass sie tatsächlich eine Lösung ist. Eine Probe ist gewissermaßen das, was wir im ersten Abschnitt dieses Skriptums gemacht haben: Zahlen in Terme einsetzen!

Die Probe ist auch deshalb von Bedeutung, weil manche Lösungsmethoden nicht auf Lösungen, sondern auf *Lösungskandidaten* führen, die Lösungen sein können oder auch nicht. In diesen Fällen ist die Probe nicht nur eine nachträgliche Übung für Gewissenhafte, sondern ein unumgänglicher Bestandteil der Methode selbst.

7 Gleichungssysteme

Bisher haben wir *einzelne* Gleichungen betrachtet, in denen jeweils *eine* Variable auftritt. Das Konzept der Gleichung kann verallgemeinert werden zu Gleichungen mit *mehreren* Variablen und zu Gleichungssystemen, die, wir ihr Name sagt, aus *mehreren* Gleichungen bestehen. Wir illustrieren diese Verallgemeinerung nur mit einem einzigen Beispiel. Versuchen Sie, die folgende Denksportaufgabe zu lösen:

> „Gesucht sind zwei Zahlen, deren Summe 5 ist und deren Produkt 6 ist.“

Bezeichnen wir die gesuchten Zahlen mit x und y, so müssen sie die beiden Bedingungen

$$x + y = 5 \tag{7.1}$$
$$x\,y = 6 \tag{7.2}$$

erfüllen. Das ist ein System von zwei Gleichungen in den zwei Variablen x und y. Eine Lösung ist dann gefunden, wenn Werte für *beide* Variablen, also für x und y, angegeben werden, die *beide* Bedingungen (7.1) und (7.2) erfüllen. Dieses Gleichungssystem besitzt zwei Lösungen. Können Sie sie (ohne etwas aufzuschreiben, also rein durch Jonglieren mit Zahlen in Ihrem Kopf) herausfinden?

Eine Lösung ist gegeben durch $x = 2$ und $y = 3$.
Eine andere Lösung ist gegeben durch $x = 3$ und $y = 2$.
Das sind die einzigen Lösungen dieses Gleichungssystems.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Mai 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Es wurde in den Jahren 2015 – 2018 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.