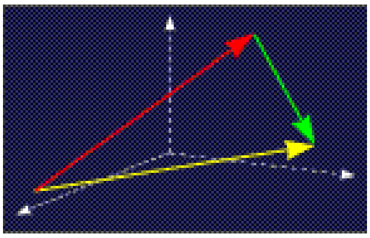
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Lineare Gleichungen und Äquivalenzumformungen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

In diesem Skriptum werden zwei Themen behandelt: Lineare Gleichungen stellen den einfachsten Gleichungstyp dar, und Äquivalenzumformungen nehmen unter den Möglichkeiten, eine Gleichung umzuformen, eine besondere Stellung ein (und sind auch beim Lösen von Gleichungen anderen Typs wichtig).

1 Eine einfache Gleichung zu Beginn

Um die Gleichung

$$4\,x + 7 = 15 \tag{1.1}$$

zu lösen, kann man mit ein bisschen „Hausverstand" vorgehen: Wenn die Summe $4\,x+7$ gleich 15 sein soll, muss $4\,x$ gleich 8 sein, denn die Frage „wieviel $+\,7 = 15$?" hat nur die Antwort 8. Wenn aber das Vierfache von x gleich 8 ist, muss x ein Viertel von 8 sein, also 2. Und damit ist die (einzige) Lösung gefunden. Wir können sie in der Form $x = 2$ anschreiben oder die Lösungsmenge in der Form $L = \{2\}$ angeben.

Im Zuge dieser Argumentation sind einige Rechenoperationen durchgeführt worden, die man in systematischer Weise anschreiben und gleichzeitig in knapper Weise „protokollieren" kann. Dazu gehen wir von einem einfachen, aber wichtigen Sachverhalt aus: Sind zwei Zahlen a und b gleich, gilt also

$$a = b, \tag{1.2}$$

und führt man mit a und b die gleichen Rechenoperationen aus, so sind auch die Ergebnisse gleich. Beispielsweise gilt dann

$$a + 5 = b + 5 \tag{1.3}$$

oder, ganz allgemein,

$$a + c = b + c \tag{1.4}$$

für jede beliebige Zahl c. Analog folgt aus $a = b$ auch

$$4\,a = 4\,b \tag{1.5}$$

oder, ganz allgemein,

$$k\,a = k\,b \tag{1.6}$$

für jede beliebige Zahl k. Das nutzen wir aus, um **Gleichungen umzuformen**. Um (1.1) zu lösen, nehmen wir zunächst an, x wäre die Lösung (obwohl wir sie zu Beginn noch nicht kennen). Dann ist das Gleichheitszeichen in (1.1) ganz wortwörtlich so zu verstehen, dass die Zahl auf der linken Seite *gleich* jener auf der rechten Seite ist. Wenn wir nun mit den beiden Seiten der Gleichung die gleiche Operation durchführen, bekommen wir wieder zwei gleiche Zahlen. Wir beginnen damit, von beiden Seiten der Gleichung 7 zu subtrahieren, und erhalten

$$4\,x = 8. \tag{1.7}$$

Um den Schritt von (1.1) zu (1.7) zu dokumentieren, wird rechts von der gegebenen Gleichung ein senkrechter Strich gemacht, nach dem die Operation, die durchgeführt werden soll, angeschrieben („protokolliert“) wird. Darunter wird die betreffende Operation dann ausgeführt, was eine *neue Gleichung* ergibt. Das sieht dann so aus:

$$\begin{array}{rcll} 4\,x+7 & = & 15 & \mid \; -7 \\ 4\,x & = & 8 & \end{array} \tag{1.8}$$

Im nächsten Schritt werden beide Seiten der so erhaltenen (einfacheren) Gleichung durch 4 dividiert (oder mit $\frac{1}{4}$ multipliziert, was das Gleiche ist). Insgesamt sieht die Rechnung (unser „Protokoll“) dann so aus:

$$\begin{array}{rcll} 4\,x+7 & = & 15 & \mid \; -7 \\ 4\,x & = & 8 & \mid \; :4 \\ x & = & 2 & \end{array} \tag{1.9}$$

Die letzte Zeile gibt x an – womit die Gleichung gelöst ist! Das „Protokoll“ (1.9) stellt eine Abfolge von Gleichungen dar, die Schritt für Schritt immer einfacher werden, bis uns die letzte ganz einfach sagt, welchen Wert x hat.

2 Äquivalenzumformungen

Jeder im Rahmen des Verlaufs (1.9) gemachte Schritt ist eine logische *Schlussfolgerung*. Jede der im „Protokoll“ (1.9) aufscheinenden Gleichungen ist eine *Folge* der vorigen, darüber stehenden Gleichung. Wir können die gesamte Argumentation auch so ausdrücken:

$$4\,x+7=15 \quad \Rightarrow \quad 4\,x=8 \quad \Rightarrow \quad x=2. \tag{2.1}$$

Das Symbol $\Rightarrow$ bedeutet “daraus folgt“. Noch ausführlicher ausgedrückt: Falls für eine Zahl x die Beziehung $4\,x+7=15$ gilt, so folgt (für dieselbe Zahl x), dass $4\,x=8$ gilt, und daraus folgt (ebenfalls für dieselbe Zahl x), dass $x=2$ gilt.

Haben wir damit aber wirklich hieb- und stichfest bewiesen, dass $x=2$ die (einzige) Lösung der Gleichung $4\,x+7=15$ ist, d.h. dass deren Lösungsmenge $L=\{2\}$ ist? Vielleicht sind sie jetzt überrascht, aber wir haben es *nicht*. Es wurde ja ganz zu Beginn mit der Annahme $4\,x + 7 = 15$ vorausgesetzt, dass es überhaupt eine Lösung gibt! Genau genommen konnten wir das gar nicht wissen. Also haben wir eigentlich nur gezeigt: *Falls* es eine Lösung gibt, so ist diese gleich 2. Was wir noch nicht gezeigt haben, ist, dass die Zahl 2 unsere Gleichung erfüllt.

Diese Überlegung sollte Ihnen nicht wie Haarspalterei vorkommen, denn es werden kompliziertere Gleichungen auf Sie zukommen, von denen Sie zunächst keine Ahnung haben, ob sie Lösungen besitzen. Sehen wir uns ein Beispiel an, bei dem die Methode, mit beiden Seiten der Gleichung dasselbe zu machen, versagt: Wir betrachten die Gleichung $\sqrt{x} + 3 = 0$. Angenommen x ist eine Lösung, dann formen wir um[1]:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + 3 &= 0 \quad && \mid \; -3 \\ \sqrt{x} &= -3 && \mid \; \text{quadrieren} \\ x &= 9 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Haben wir damit also die (einzige) Lösung der Gleichung $\sqrt{x} + 3 = 0$ gefunden? Wir machen mit $x = 9$ die Probe[2]:

$$\mathrm{LHS} = \sqrt{9} + 3 = 3 + 3 = 6 \tag{2.3}$$

$$\mathrm{RHS} = 0 \tag{2.4}$$

Hoppla! 6 ist nicht gleich 0! Die Zahl 9 hat die Probe nicht bestanden – sie ist *nicht* Lösung der Gleichung! Die Gleichung besitzt überhaupt keine Lösung. Dass die Lösung 9 wäre, wenn die Gleichung eine Lösung besitzen würde, hilft uns nicht. Dabei haben wir doch brav immer mit den beiden Seiten der Gleichung die gleiche Operation durchgeführt. Was ist schiefgegangen? Wir haben zwar gezeigt, dass

$$\sqrt{x} + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 9, \tag{2.5}$$

aber leider gilt die Umkehrung nicht: Aus $x = 9$ folgt *nicht* $\sqrt{x} + 3 = 0$.

Als Ausweg aus dieser Situation bieten sich nun zwei Wege an, die Methode „mache das Gleiche mit beiden Seiten einer Gleichung“ zu retten:

- Die erste Möglichkeit: Wir wenden auf die beiden Seiten einer Gleichung die gleichen Operationen an, bis wir eine Aussage erhalten, die uns direkt über den Wert von x Auskunft gibt. Das entspricht einer Reihe von Schlussfolgerungen, die insgesamt besagt

$$\text{Gleichung ist erfüllt} \quad \Rightarrow \quad \text{konkreter Wert für } x. \tag{2.6}$$

[1] An dieser Stelle sollte man genau genommen die Grundmenge auf die nichtnegativen reellen Zahlen einschränken, da die Wurzel aus einer negativen Zahl (im Rahmen der reellen Zahlen) nicht existiert. Es wird aber hier ohnehin kein negatives x auftreten, sodass wir uns erlauben, diese Bemerkung in eine Fußnote zu verbannen.

[2] LHS („left hand side“) steht für die linke Seite der Gleichung, RHS („right hand side“) steht für ihre rechte Seite.

Der konkrete Wert für x, der am Ende herauskommt, darf nun nicht als *Lösung* verstanden werden, er ist ein *Lösungskandidat*. Danach machen wir die **Probe**, um herauszufinden, ob der Lösungskandidat nun eine Lösung ist oder nicht. Ist er keine Lösung, so besitzt die Gleichung keine Lösung. Es kann auch (bei manchen Gleichungstypen) passieren, dass wir am Ende *mehrere* Lösungskandidaten herausbekommen[3], also

$$\text{Gleichung ist erfüllt} \quad \Rightarrow \quad \text{einige mögliche konkrete Werte für } x. \tag{2.7}$$

In diesem Fall wird mit jedem der Lösungskandidaten die Probe gemacht, um herauszufinden, welche davon Lösungen sind und welche nicht.

- Die zweite Möglichkeit: Wir gehen nach der Methode „mache das Gleiche mit beiden Seiten einer Gleichung" vor, lassen dabei aber nur jene Operationen zu, die sich **umkehren** lassen! Einen solchen Umformungsschritt nennen wir **Äquivalenzumformung**. Werden nur Äquivalenzumformungen angewandt, so lässt sich die gesamte Kette von Schlussfolgerungen rückgängig machen, sodass wir, wenn am Ende ein konkreter Wert für x herauskommt, gezeigt haben:

$$\text{Gleichung ist erfüllt} \quad \Leftrightarrow \quad \text{konkreter Wert für } x. \tag{2.8}$$

  Das Symbol $\Leftrightarrow$ bedeutet „genau dann, wenn". Erkennen Sie den Unterschied zu (2.6)? Die Richtung $\Rightarrow$ gibt uns einen Hinweis, welche Zahl die Lösung sein *könnte*, und die Richtung $\Leftarrow$ sagt uns, dass diese Zahl tatsächlich eine Lösung ist! Das bedeutet: Formen wir eine Gleichung mit einer solchen Operation um, so bekommen wir eine neue Gleichung, die nicht nur eine *Folge der ersten* ist, sondern aus der auch *die erste folgt*. Eine Zahl x erfüllt dann entweder beide Gleichungen oder keine von ihnen. Die beiden Gleichungen sind gleichwertig in dem Sinn, dass sie die gleiche Lösungsmenge besitzen. Wir nennen sie zueinander **äquivalent**[4] (was auch die Bezeichnung „Äquivalenzumformung" erklärt).

Wir sehen uns nun die zweite Methode genauer an: Welche Umformungen einer Gleichung sind Äquivalenzumformungen?

- Zunächst dürfen wir die beiden Seiten einer Gleichung vertauschen, denn $a = b$ gilt genau dann, wenn $b = a$ ist. Klarerweise kann das Vertauschen der beiden Seiten einer Gleichung durch eine weitere Vertauschung rückgängig gemacht werden. In der mathematischen Formelsprache ausgedrückt, gilt für Zahlen a, b stets

$$a = b \quad \Leftrightarrow \quad b = a. \tag{2.9}$$

  (Um auszudrücken, dass zwei Dinge gleich sind, kommt es nicht auf die Reihenfolge an, in der sie genannt werden.)

- Außerdem darf jede Seite einer Gleichung mit Hilfe von Rechenregeln umgeformt werden, sofern die betreffende Umformung durch eine weitere Umformung rückgängig gemacht

[3] Ergibt sich etwa im Zuge der Umformung einer Gleichung $x^2 = 9$, so wissen wir, dass x entweder -3 oder 3 ist.

[4] Das Wort „äquivalent" kommt aus dem Lateinischen und bedeutet nichts anderes als „gleichwertig".

werden kann. Ist beispielsweise die linke Seite einer Gleichung $x\,(x+1)$, so kann sie durch x^2+x ersetzt werden, ohne dass sich die Lösungsmenge der Gleichung dadurch ändert.

In vielen Fällen werden wir mit **zwei** weiteren **Typen von Äquivalenzumformungen** auskommen:

- Wird zu beiden Seiten einer Gleichung ein beliebiger Term T addiert, so kann dies rückgängig gemacht werden, indem von beiden Seiten der neuen Gleichung T subtrahiert wird. Ein Spezialfall ist die Addition einer beliebigen Zahl zu beiden Seiten einer Gleichung.
- Werden beide Seiten einer Gleichung mit einer Zahl $k \neq 0$ multipliziert, so kann dies rückgängig gemacht werden, indem beide Seiten der neuen Gleichung durch k dividiert werden[5].

Damit sind automatisch auch das Subtrahieren eines Terms von beiden Seiten einer Gleichung (Beispiel: Addition von -5 oder $-5\,x$) und das Dividieren beider Seiten einer Gleichung durch eine Zahl $\neq 0$ (Beispiel: Multiplikation mit $\frac{1}{3}$) Äquivalenzumformungen.

Wenn wir uns nun das „Protokoll" (1.9) noch einmal ansehen, erkennen wir, dass dort nur Äquivalenzumformungen angewandt wurden. Daher wurde nicht nur (2.1) gezeigt, sondern sogar

$$4\,x+7=15 \quad \Leftrightarrow \quad 4\,x=8 \quad \Leftrightarrow \quad x=2. \tag{2.10}$$

(Erkennen Sie den Unterschied?) Aus diesem Grund gibt die letzte Gleichung $x=2$ direkt die (einzige) Lösung der ersten Gleichung $4\,x+7=15$ an.

Jetzt können wir auch verstehen, was in (2.2) schiefgegangen ist: Das Quadrieren beider Seiten einer Gleichung ist *keine* Äquivalenzumformung! Das einfachste Beispiel: Ist $x=1$, so folgt durch Quadrieren beider Seiten $x^2=1$, aber dieser Schritt kann nicht rückgängig gemacht werden: Ist $x^2=1$, so ist $x=-1$ oder $x=1$. Ist von x nur bekannt, dass $x^2=1$ ist, so kann daraus *nicht* geschlossen werden, dass $x=1$ ist, denn es könnte ja auch $x=-1$ sein! Durch das Quadrieren beider Seiten einer Gleichung kann man sich Lösungskandidaten einhandeln, die keine Lösungen sind. Das bedeutet nicht, dass das Quadrieren beim Lösen einer Gleichung verboten wäre – wenn wir es tun, müssen wir uns nur bewusst sein, dass die betreffende Schlussfolgerung nicht umgekehrt werden kann.

Wenn es möglich ist, eine Gleichung durch Anwendung von Äquivalenzumformungen zu lösen, so sollte man diesen Weg beschreiten, da er in der Regel der einfachere ist. Ist das nicht möglich, so kann dennoch nach der Methode „mache das Gleiche mit beiden Seiten einer Gleichung" vorgegangen werden, es muss aber danach die Probe gemacht werden.

[5] Eine weitere Äquivalenzumformung besteht darin, beide Seiten einer Gleichung mit dem gleichen Term zu multiplizieren, wobei aber sichergestellt sein muss, dass dieser Term für alle zulässigen Werte der Variablen $\neq 0$ ist. Wir werden solche Äquivalenzumformungen aber in diesem Skriptum nicht benötigen.

3 Lineare Gleichungen

Eine lineare Gleichung in der Variablen x ist eine Gleichung, bei der auf beiden Seiten Terme der Struktur $a\,x+b$ stehen, wobei a und b reelle Zahlen sind. Ein Beispiel für eine lineare Gleichung ist (1.1), d.h. jene Gleichung, die durch das „Protokoll" (1.9) gelöst wurde. Lineare Gleichungen können stets mit Hilfe von Äquivalenzumformungen gelöst werden.

Eine andere lineare Gleichung ist

$$12\,x+7=9\,x-5. \tag{3.1}$$

Um sie zu lösen, können wir beispielsweise so vorgehen:

$$\begin{array}{rcll} 12\,x-7 & = & 9\,x-5 & \mid\; -9\,x \\ 3\,x-7 & = & -5 & \mid\; +7 \\ 3\,x & = & 2 & \mid\; :3 \\ x & = & \frac{2}{3} & \end{array} \tag{3.2}$$

Lassen Sie dieses „Protokoll" auf sich wirken, um zu verstehen, welche Strategie hier eingeschlagen wurde: Alle Ausdrücke, die x als Faktor enthalten, wurden nach links, die Zahlen, die ohne x auftreten, wurden nach rechts „geschaufelt". Da nur Äquivalenzumformungen angewandt wurden, schließen wir: Die (einzige) Lösung der Gleichung (3.1) ist $\frac{2}{3}$ (die Lösungsmenge ist $L=\{\frac{2}{3}\}$).
Als weiteres Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$7\,x+2=9\,x-4. \tag{3.3}$$

Welche Strategie soll hier eingeschlagen werden? Eine Möglichkeit ist diese:

$$\begin{array}{rcll} 7\,x+2 & = & 9\,x-4 & \mid\; -7\,x \\ 2 & = & 2\,x-4 & \mid\; +4 \\ 6 & = & 2\,x & \mid\; :2 \\ 3 & = & x & \end{array} \tag{3.4}$$

Dass x in der letzten Zeile auf der rechten Seite steht, macht keinerlei Probleme, da die Aussage $3=x$ das Gleiche bedeutet wie $x=3$. Die (einzige) Lösung der Gleichung (3.3) ist 3 (die Lösungsmenge ist $L=\{3\}$).

Wenn Sie die Anwendung von Äquivalenzumformungen üben sollen, werden Ihnen auch Gleichungsaufgaben gestellt wie

$$2\,(3\,x+1)^2+3=18\,x^2+2\,x. \tag{3.5}$$

Lassen Sie sich von der Komplexität der beiden Terme, die hier auftreten, nicht entmutigen, sondern multiplizieren Sie das Quadrat auf der linken Seite aus, und dann sehen Sie weiter! In diesem konkreten Fall lassen sich erhebliche Vereinfachungen anbringen:

$$\begin{array}{rcll} 2\,(3\,x+1)^2+3 &=& 18\,x^2+2\,x & \mid \ \text{Quadrat auf der linken Seite ausmultiplizieren} \\ 2\,(9\,x^2+6\,x+1)+3 &=& 18\,x^2+2\,x & \mid \ \text{Klammer auf der linken Seite ausmultiplizieren} \\ 18\,x^2+12\,x+2+3 &=& 18\,x^2+2\,x & \mid \ \text{linke Seite vereinfachen} \\ 18\,x^2+12\,x+5 &=& 18\,x^2+2\,x & \mid \ -18\,x^2 \\ 12\,x+5 &=& 2\,x & \mid \ -2\,x-5 \\ 10\,x &=& -5 & \mid \ :10 \\ x &=& -\frac{5}{10}=-\frac{1}{2} & \end{array} \tag{3.6}$$

Die „protokollarischen" Anmerkungen zu den ersten drei Schritten müssen nicht immer angeschrieben werden (obwohl es lehrreich ist, in Worten zusammenzufassen, was man tun wird, um zur nächsten Gleichung zu gelangen). Wenn Ihnen das Termrechnen leicht fällt, können Sie die ersten drei Schritte auch zu einem oder zu zwei Schritten zusammenfassen. Im fünften Schritt wurden die Operationen „es wird $2\,x$ subtrahiert" und „es wird 5 subtrahiert" zu einem zusammengefasst (man hätte hier sogar den vierten und den fünften Schritt zusammenfassen können). Und im letzten Schritt wurde die auftretende Bruchzahl gleich gekürzt, ohne eine weitere Gleichung aufzuschreiben. Insgesamt folgt: Es gibt nur eine Lösung, und zwar $-\frac{1}{2}$. Gleichung (3.5) ist zwar nicht als lineare Gleichung gegeben, aber, wie das „Protokoll" (3.6) zeigt, reduziert sie sich nach der Subtraktion von $18\,x^2$ auf eine solche.

Die Art und Weise, wie hier Gleichungen untereinander geschrieben werden, ist charakteristisch für das *Gleichungslösen*. Wenn es nicht um das Lösen einer Gleichung geht, sondern lediglich um das Umformen eines Terms, so müssen Sie das *nicht* tun, sondern können Ihre Umformungen in einer Zeile (so lange sie reicht) hintereinander anschreiben.

4 Die „allgemeine" lineare Gleichung

Eine lineare Gleichung kann durch Anwendung einer Äquivalenzumformung stets auf die Form

$$a\,x+b=0 \tag{4.1}$$

gebracht werden. (Dazu subtrahiert man einfach die rechte Seite der gegebenen Gleichung von beiden Seiten, wodurch sich eine Gleichung ergibt, deren rechte Seite gleich 0 ist.) Da (4.1) ein schönes Beispiel für eine Gleichung ist, in der Konstanten vorkommen, deren Wert nicht festgelegt ist, wollen wir zum Abschluss noch untersuchen, wie die Lösungsmenge von den Werten dieser Konstanten abhängt. Dazu subtrahieren wir b von beiden Seiten der Gleichung und erhalten die (äquivalente) Gleichung

$$a\,x=-b. \tag{4.2}$$

Der nächste Schritt bestünde darin, beide Seiten durch a zu dividieren, aber das ist nur dann möglich, wenn $a\neq 0$ ist. Daher unterscheiden wir die zwei Fälle $a\neq 0$ und $a=0$:

- Fall $a\neq 0$:
  Wir dividieren beide Seiten von (4.2) durch a und erhalten als (einzige) Lösung $x=-\frac{b}{a}$.

- Fall $a = 0$:
  In diesem Fall lautet die Gleichung $0 = b$. Hier kommt die Variable x nicht mehr vor, aber wir fassen diese Aussage dennoch als „Gleichung für x“ auf. Nun ist wieder eine Fallunterscheidung angebracht:

  - Ist $b \neq 0$, so sagt die Gleichung $b = 0$ aus, dass b gleichzeitig 0 und $\neq 0$ sein soll – ein glatter Widerspruch, eine zweifellos immer falsche Aussage, gleichgültig, wie x (das ja gar nicht vorkommt) gewählt wird. Daher ist die Lösungsmenge leer.
  - Ist $b = 0$, so lautet die Gleichung $0 = 0$. Das ist zweifellos immer eine wahre Aussage, gleichgültig, wie x (das ja gar nicht vorkommt) gewählt wird. Daher ist die Lösungsmenge ganz $\mathbb{R}$.

Die letzten Betrachtungen mögen wieder ein bisschen wie Haarspalterei aussehen, aber da auch andere Gleichungstypen (wie beispielsweise die quadratischen Gleichungen) Konstanten enthalten, von deren Werten die Lösungsmenge abhängt, ist es eine gute Übung, (4.1) einmal *ganz allgemein* gelöst zu haben.

Besonders der Fall $a = 0$ und $b \neq 0$ ist in logischer Hinsicht interessant: Erzielen Sie mit einer logischen Schlussfolgerung (egal, ob es sich um eine Äquivalenzumformung handelt oder nicht) einen Widerspruch, dann kann die betreffende Gleichung keine Lösung besitzen! Das passiert beispielsweise bei der Gleichung

$$3\,x + 5 = 3\,x + 2. \tag{4.3}$$

Nach Subtraktion von $3\,x$ von beiden Seiten erhalten wir

$$5 = 2. \tag{4.4}$$

Das bedeutet: *Gäbe es eine Lösung*, so müsste $5 = 2$ sein. Daher gibt es keine Lösung. Verstanden?

5 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $8\,x + 11 = 2\,x - 1$
  Lösung:

  Die (einzige) Lösung ist -2.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $9\,x + 5 = 2\,x - 3$
  Lösung:

  Die (einzige) Lösung ist $-\frac{8}{7}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $-3\,x + 5 = 5\,x - 7$
  Lösung:

  Die (einzige) Lösung ist $\frac{3}{2}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $2\,(x+3)^2 = (x-1)\,(x-2) + x^2 + 1$
  Lösung:

  Die (einzige) Lösung ist -1.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $3\,x^2 + 12\,x + 5 = 3\,(x+2)^2 + 1$
  Lösung:

  Die Gleichung besitzt keine Lösung. Die Lösungsmenge ist leer.

- Ein bisschen schwieriger, aber mit den hier besprochenen Methoden ebenfalls zu lösen:

$$\frac{1}{5}\,x + \frac{2}{3} = \frac{3\,x + 10}{2}$$

  (Hinweis: Multiplizieren Sie beide Seiten dieser Gleichung mit einer geeigneten Zahl, um zuerst einmal die Brüche wegzubekommen!)
  Lösung:

  Die (einzige) Lösung ist $-\frac{10}{3}$.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Mai 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Es wurde in den Jahren 2015 – 2018 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.