Workshops zur VO „Einführung in das mathematische Arbeiten“
im SS 2007

Kegelschnitte

Evelina Erlacher

13. & 14. März 2007

Denken wir uns einen Drehkegel, der nach oben als auch nach unten unbegrenzt ist. Schneiden wir diesen Kegel mit einer Ebene ε, die *nicht* durch die Spitze des Kegels geht, so erhalten wir – je nach „Neigung“ der Ebene ε – einen Kreis (Abb. 1), eine Ellipse (Abb. 2), eine Parabel (Abb. 3) oder eine Hyperbel (Abb. 4).

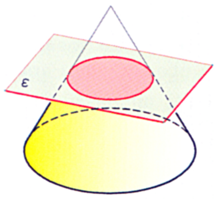


Abb. 1

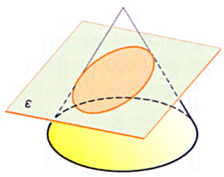


Abb. 2

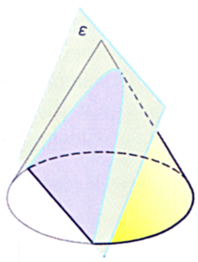


Abb. 3

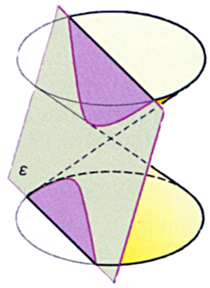


Abb. 4

Daher werden Kreis, Ellipse, Hyperbel und Parabel auch als *Kegelschnitte* bezeichnet.

Eine Gerade g kann bezüglich eines Kegelschnitts k drei verschiedene Lagen annehmen, und zwar:

- Die Gerade g kann den Kegelschnitt in zwei Punkten, den *Schnittpunkten*, schneiden: $g \cap k = \{S_1, S_2\}$. Die Gerade ist eine *Sekante*.

- Die Gerade g kann den Kegleschnitt in einem Punkt, dem *Berührpunkt*, berühren: $g \cap k = \{T\}$. Die Gerade ist eine *Tangente*.

- Die Gerade kann an dem Kegelschnitt vorbeigehen: $g \cap k = \{\}$. Die Gerade ist eine *Passante*.

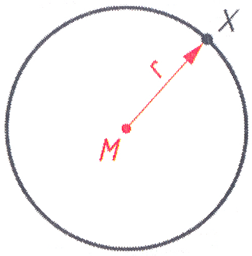
Sonderfälle: Geraden, die parallel (aber nicht ident) zu einer der Asymptoten einer Hyperbel sind, haben mit der Hyperbel genau einen Schnittpunkt S. Geraden, die normal auf die Leitgerade einer Parabel stehen, haben mit der Parabel genau einen Schnittpunkt S.

Um zu entscheiden, welcher Fall vorliegt, kann man folgendermaßen vorgehen: Die Gleichung der Geraden g und des Kegelschnitts k werden zu einem Gleichungssystem zusammengefasst und dessen Lösungsmenge L ermittelt. Führt das Gleichungssystem auf eine quadratische Gleichung in einer Variablen, so gibt es drei Lösungsfälle, die genau den drei möglichen Lagen der Geraden bezüglich des Kegelschnitts entsprechen. Führt das Gleichungssystem auf eine lineare Gleichung in einer Variablen, dann liegt ein Sonderfall vor. Führt das Gleichungssystem auf eine falsche Aussage, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel und die Gerade eine der beiden Asymptoten der Hyperbel.

1 Der Kreis

Definition: Die Menge aller Punkte X (der Ebene), die von einem gegebenen Punkt M den Abstand r haben, ist die *Kreislinie* (oder kurz: der *Kreis*) mit Mittelpunkt M und Radius r:

$$k[M, r] = \{X \in \mathbb{R}^2 \,|\, \overline{XM} = r\}.$$



Die *Vektorform der Kreisgleichung* lautet

$$(X - M)^2 = r^2,$$

wobei X ... variabler („laufender") Punkt des Kreises,
M ... Mittelpunkt,
r ... Radius.

Führt man auf der linken Seite für $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $M = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$ die Skalarmultiplikation aus, so erhält man die *Koordinatenform der Kreisgleichung*:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2.$$

Liegt der Mittelpunkt M im Ursprung, d.h. $M(0|0)$, so ist der Kreis in *Hauptlage* und seine Gleichung lautet:

$$X^2 = r^2 \qquad \text{bzw.} \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

Weiters gilt:

- Ist $t : y = kx + d$ eine Tangente an den Kreis $k[M, r]$ mit Berührpunkt T, so steht der Berührradius $\overrightarrow{MT}$ normal auf t, d.h. $\overrightarrow{MT}$ ist ein Normalvektor zu t.

- $t : y = kx + d$ ist genau dann eine Tangente an den Kreis $k : (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$, wenn die sogenannte *Berührbedingung*

$$(k \cdot x_M - y_M + d)^2 = r^2 \cdot (k^2 + 1)$$

  erfüllt ist.

- Sei $T(x_T|y_T)$ ein Punkt des Kreises $k : (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$. Dann ist

$$t : (x_T - x_M)(x - x_M) + (y_T - y_M)(y - y_M) = r^2 \tag{1}$$

  die Gleichung der Tangente t an den Kreis k, die k in T berührt. Gleichung (1) heißt *Spaltform* der Tangentengleichung.

- Es sei $P(x_P|y_P)$ ein Punkt außerhalb des Kreises (gemeint ist hier: $\overline{MP} > r$). Setzt man P in die Spaltform ein, so erhält man die Gleichung der *Polaren*

$$pol : (x_P - x_M)(x - x_M) + (y_P - y_M)(y - y_M) = r^2.$$

  Der Punkt P heißt dann der *Pol* der Geraden *pol* bezüglich des Kreises k. Es gilt: Schneidet die Polare *pol* des Punktes P den Kreis k in den zwei Punkten T_1 und T_2, so sind dies die Berührpunkte jener Tangenten t_1 und t_2, die man aus P an k legen kann.

2 Die Ellipse

Definition: Eine *Ellipse* ist die Menge aller Punkte X (der Ebene), für die die Summe der Abstände von zwei festen Punkten, den *Brennpunkten* F_1 und F_2, eine Konstante c ist:

$$\mathrm{ell} = \{X \in \mathbb{R}^2 \,|\, \overline{XF_1} + \overline{XF_2} = c\}.$$

Liegen die Brennpunkte F_1 und F_2 symmetrisch um den Ursprung auf der x-Achse, so sagt man die Ellipse befindet sich in *erster Hauptlage*.

Wie sieht nun die Gleichung einer Ellipse in erster Hauptlage aus? Es sei $0 < e < a$, die Brennpunkte haben die Koordinaten $F_1(-e|0)$ und $F_1(e|0)$ und c aus der Definition der Ellipse sei $2a$. Wir setzen $b := \sqrt{a^2 - e^2}$. Aus der Definition lässt sich dann die Gleichung der Ellipse in erster Hauptlage ableiten:

$$\mathrm{ell} : b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{ell} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

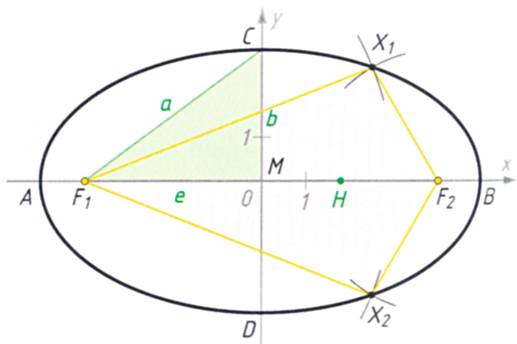


Abb. 5

Man nennt	$M(0\|0)$	...	*Mittelpunkt*,
	$A(-a\|0)$, $B(a\|0)$	...	*Hauptscheitel*,
	$C(0\|b)$, $D(0\|-b)$	...	*Nebenscheitel*,
	AB	...	*Hauptachse*,
	CD	...	*Nebenachse*,
	a	...	*große Halbachse*,
	b	...	*kleine Halbachse*,
	e	...	*lineare Exzentrizität*.

Es sei X ein beliebiger Punkt der Ellipse ell. Dann heißen die Strecken XF_1 und XF_2 *Brennstrecken*.

Punktweise **Konstruktion** einer Ellipse (siehe Abb. 5): Wir wählen einen Hilfspunkt H auf AB, zeichnen um F_1 einen Kreis(bogen) mit Radius $\overline{HA}$ und um F_2 einen Kreis(bogen) mit dem Radius $\overline{HB}$. Die beiden Schnittpunkte dieser Kreise sind (symmetrisch zur Hauptachse liegende) Punkte X_1 und X_2 der Ellipse.

Weiters gilt:

- $e^2 = a^2 - b^2$.
- $t : y = kx + d$ ist genau dann eine Tangente an die Ellipse $\mathrm{ell} : b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, wenn die sogenannte *Berührbedingung*
$$d^2 = a^2k^2 + b^2$$
erfüllt ist.

- Sei $T(x_T|y_T)$ ein Punkt der Ellipse ell : $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Dann ist

$$t : b^2x_Tx + a^2y_Ty = a^2b^2 \tag{2}$$

die Gleichung der Tangente t an die Ellipse ell, die ell in T berührt. Gleichung (2) heißt *Spaltform* der Tangentengleichung.

- Es sei $P(x_P|y_P)$ ein Punkt außerhalb der Ellipse (gemeint ist hier: $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} > 2a$). Setzt man P in die Spaltform ein, so erhält man die Gleichung der *Polaren*

$$pol : b^2x_Px + a^2y_Py = a^2b^2.$$

Der Punkt P heißt dann der *Pol* der Geraden *pol* bezüglich der Ellipse ell. Es gilt: Schneidet die Polare *pol* des Punktes P die Ellipse ell in den zwei Punkten T_1 und T_2, so sind dies die Berührpunkte jener Tangenten t_1 und t_2, die man aus P an ell legen kann (Abb. 6).

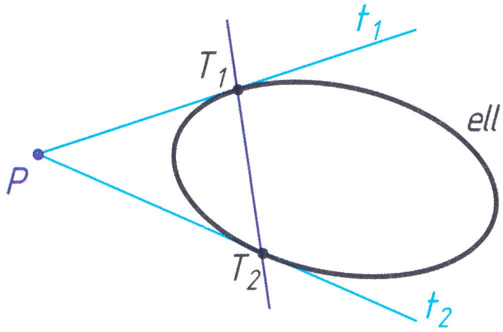


Abb. 6

3 Die Hyperbel

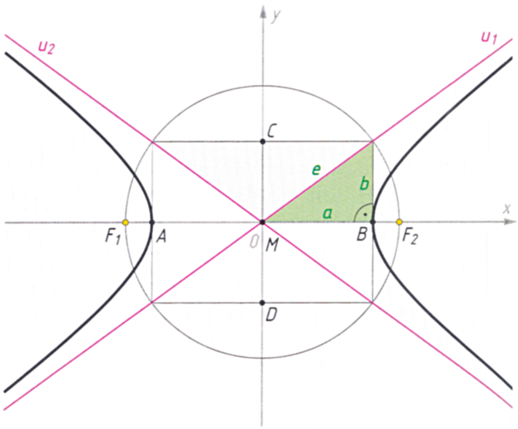
Definition: Eine *Hyperbel* ist die Menge aller Punkte X (der Ebene), für die der Betrag der Differenz der Abstände von zwei festen Punkten, den *Brennpunkten* F_1 und F_2, eine Konstante c ist:

$$\text{hyp} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid |\overline{XF_1} - \overline{XF_2}| = c\}.$$

Liegen die Brennpunkte F_1 und F_2 symmetrisch um den Ursprung auf der x-Achse, so sagt man die Hyperbel befindet sich in *erster Hauptlage*.

Wie sieht nun die Gleichung einer Hyperbel in erster Hauptlage aus? Es sei $0 < a < e$, die Brennpunkte haben die Koordinaten $F_1(-e|0)$ und $F_1(e|0)$ und c aus der Definition der Hyperbel sei $2a$. Wir setzen $b := \sqrt{e^2 - a^2}$. Aus der Definition lässt sich dann die Gleichung der Hyperbel in erster Hauptlage ableiten:

$$\text{hyp} : b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \qquad \text{bzw.} \qquad \text{hyp} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Man nennt

$M(0\|0)$	...	*Mittelpunkt,*
$A(-a\|0)$, $B(a\|0)$	...	*Hauptscheitel,*
$C(0\|b)$, $D(0\|-b)$	...	*Nebenscheitel,*
AB	...	*Hauptachse,*
CD	...	*Nebenachse,*
a	...	*große Halbachse,*
b	...	*kleine Halbachse,*
e	...	*lineare Exzentrizität.*

Es sei X ein beliebiger Punkt der Hyperbel hyp. Dann heißen die Strecken XF_1 und XF_2 *Brennstrecken*. Die Hyperbel besitzt zwei *Asymptoten* u_1 und u_2:

$$u_1 : y = \frac{b}{a} \cdot x \qquad \text{und} \qquad u_2 : y = -\frac{b}{a} \cdot x.$$

Punktweise **Konstruktion** einer Hyperbel (siehe Abb. 7): Wir nehmen eine Hilfsgerade h an und tragen auf ihr die Strecke $\overline{AB} = 2a$ ab. Nun wählen wir einen Hilfspunkt H auf h außerhalb der Strecke $\overline{AB}$, zeichnen um F_1 einen Kreis(bogen) mit Radius $\overline{HA}$ und um F_2 einen Kreis(bogen) mit dem Radius $\overline{HB}$. Die beiden Schnittpunkte dieser Kreise sind (symmetrisch zur Hauptachse liegende) Punkte X_1 und X_2 der Hyperbel. In analoger Weise erhält man die symmetrisch liegenden Punkte X_3 und X_4.

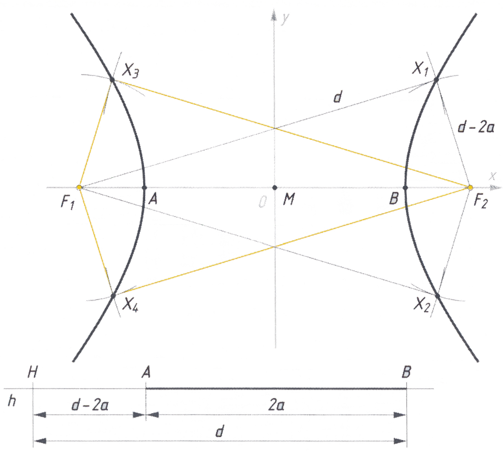


Abb. 7

Weiters gilt:

- $e^2 = a^2 + b^2$.

- $t : y = kx + d$ ist genau dann eine Tangente an die Hyperbel hyp : $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, wenn die sogenannte *Berührbedingung*
$$d^2 = a^2k^2 - b^2$$
erfüllt ist.

- Sei $T(x_T|y_T)$ ein Punkt der Hyperbel hyp : $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Dann ist
$$t : b^2x_Tx - a^2y_Ty = a^2b^2 \tag{3}$$
die Gleichung der Tangente t an die Hyperbel hyp, die hyp in T berührt. Gleichung (3) heißt *Spaltform* der Tangentengleichung.

- Es sei $P(x_P|y_P)$ ein Punkt außerhalb der Hyperbel (gemeint ist hier: $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| < 2a$). Setzt man P in die Spaltform ein, so erhält man die Gleichung der *Polaren*
$$pol : b^2x_Px - a^2y_Py = a^2b^2.$$
Der Punkt P heißt dann der *Pol* der Geraden *pol* bezüglich der Hyperbel hyp. Es gilt: Schneidet die Polare *pol* des Punktes P die Hyperbel hyp in den zwei Punkten T_1 und T_2, so sind dies die Berührpunkte jener Tangenten t_1 und t_2, die man aus P an hyp legen kann.

4 Die Parabel

Definition: Eine *Parabel* ist die Menge aller Punkte X (der Ebene), von denen jeder von einer gegebenen Geraden, der sogenannten *Leitgeraden* l, und von einem festen Punkt, dem *Brennpunkt* F, jeweils gleichen Abstand hat:
$$\text{par} = \{X \in \mathbb{R}^2 \,|\, \overline{Xl} = \overline{XF}\}.$$

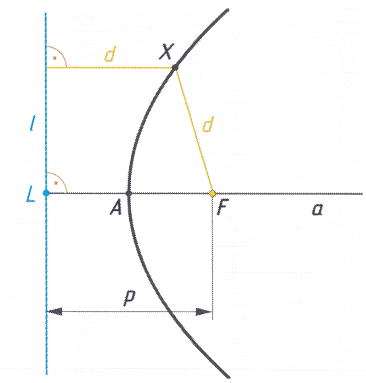


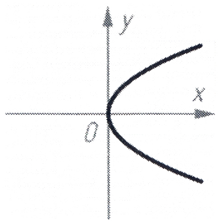
Abb. 8

Die Parabel besitzt eine zur Leitgeraden l normale Symmetrieachse a. F liegt auf a. Ist L der Schnittpunkt von a mit l, so gilt: Der Halbierungspunkt der Strecke LF heißt *Scheitel* A. Der Abstand vom Brennpunkt F zur Leitgeraden l heißt *Parameter* p, der Abstand vom Scheitel A zum Brennpunkt F heißt *lineare Exzentrizität* e und es gilt $p = 2e$. Es sei X ein beliebiger Punkt der Parabel par. Dann heißen die Strecken Xl und XF *Brennstrecken.*

Punktweise **Konstruktion** einer Parabel (siehe Abb. 8): Wir ziehen zu l Parallele im Abstand d und schneiden diese mit dem Kreis(bogen) um F mit dem Radius d. Jeder der beiden Schnittpunkte ist ein Parabelpunkt X.

Liegt der Scheitel A im Ursprung und der Brennpunkt F auf der $\left\{\begin{array}{l}\text{positiven } x\text{-Achse,}\\ \text{positiven } y\text{-Achse,}\\ \text{negativen } x\text{-Achse,}\\ \text{negativen } y\text{-Achse,}\end{array}\right\}$ so befindet sich die Parabel in $\left\{\begin{array}{l}\textit{erster}\\ \textit{zweiter}\\ \textit{dritter}\\ \textit{vierter}\end{array}\right\}$ *Hauptlage.*

Aus der Definition lässt sich die Gleichung der Parabel in erster Hauptlage ableiten:

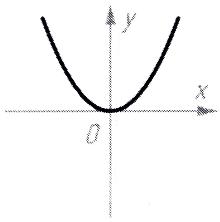


$$\text{par} : y^2 = 2px.$$

Es gilt: $A(0|0)$, $F(e|0)$ und $l : x = -e$.

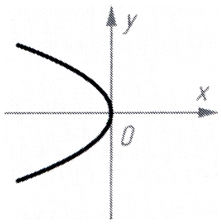
Analog erhält man

Parabel in 2. Hauptlage



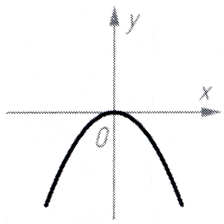
$\text{par} : x^2 = 2py$
$A(0|0)$
$F(0|e)$
$l : y = -e$

Parabel in 3. Hauptlage



$\text{par} : y^2 = -2px$
$A(0|0)$
$F(-e|0)$
$l : x = e$

Parabel in 4. Hauptlage



$\text{par} : x^2 = -2py$
$A(0|0)$
$F(0|-e)$
$l : y = e$

Weiters gilt für eine Parabel in erster Hauptlage:

- $p = 2e$.
- $t : y = kx + d$ ist genau dann eine Tangente an die Parabel $\text{par} : y^2 = 2px$, wenn die sogenannte *Berührbedingung*
$$p = 2kd$$
erfüllt ist.
- Sei $T(x_T|y_T)$ ein Punkt der Parabel $\text{par} : y^2 = 2px$. Dann ist
$$t : y_T y = p \cdot (x_T + x) \tag{4}$$
die Gleichung der Tangente t an die Parabel par, die par in T berührt. Gleichung (4) heißt *Spaltform* der Tangentengleichung.
- Es sei $P(x_P|y_P)$ ein Punkt außerhalb der Parabel (gemeint ist hier: $|\overline{Pl}| < |\overline{PF}|$). Setzt man P in die Spaltform ein, so erhält man die Gleichung der *Polaren*
$$pol : y_P y = p \cdot (x_P + x).$$

Der Punkt P heißt dann der *Pol* der Geraden *pol* bezüglich der Parabel par. Es gilt: Schneidet die Polare *pol* des Punktes P die Parabel par in den zwei Punkten T_1 und T_2, so sind dies die Berührpunkte jener Tangenten t_1 und t_2, die man aus P an par legen kann.

Analoges gilt für die Parabel in zweiter, dritter und vierter Hauptlage, wobei:

	2. Hauptlage	3. Hauptlage	4. Hauptlage
Spaltform:	$t : x_T x = p \cdot (y_T + y)$	$t : y_T y = -p \cdot (x_T + x)$	$t : x_T x = -p \cdot (y_T + y)$
Berührbedingung:	$p = -\frac{2d}{k^2}$	$p = -2kd$	$p = \frac{2d}{k^2}$

5 Schnittwinkel

Definition: Als *Schnittwinkel* zweier Kurven in deren Schnittpunkt S bezeichnet man den Winkel der zugehörigen Kurventangenten in S. Hat der Schnittwinkel die Größe $0°$, so sagt man: die beiden Kurven *berühren* einander.

6 Typische Aufgaben

Aufgabentyp: Gesucht ist die Gleichung des Kreises k für den eine Kombination folgender Angaben gemacht wird:

(a) k berührt die x-Achse.

(b) k berührt die y-Achse.

(c) Der Punkt P liegt auf k.

(d) Die Punkte P und Q liegen auf k.

(e) k berührt den Kreis $k_1[M_1, r_1]$ von außen.

(f) k berührt den Kreis $k_1[M_1, r_1]$ von innen.

Lösungshinweise: Gesucht sind also der Mittelpunkt $M(x_M|y_M)$ und der Radius r von k.

(a) Es gilt: $r = |y_m|$.

(b) Es gilt: $r = |x_m|$.

(c) Einsetzen von P in die allgemeine Kreisgleichung von k liefert die Gleichung eines Kreises k_P, auf dem der gesuchte Mittelpunkt M liegt.

(d) Die Streckensymmetrale $s_{PQ} : \overrightarrow{PQ} \cdot X = \overrightarrow{PQ} \cdot H_{PQ}$ der Stercke PQ enthält den gesuchten Mittelpunkt M (wobei H_{PQ} der Halbierungspunkt der Strecke PQ ist).

(e) Es gilt: $\overline{MM_1} = r + r_1$.

(f) Es gilt: $\overline{MM_1} = |r - r_1|$.

Aufgabe: Gesucht ist die Gleichung (1) der Parabel in Hauptlage, (2) der Ellipse oder Hyperbel in erster Hauptlage, für die (1) ein, (2) zwei Punkte aus der folgenden Liste gegeben sind:

(a) ein Punkt P des Kegelschnitts,

(b) ein (beide) Brennpunkt(e),

(c) eine Tangente t an den Kegelschnitt,

(d) eine (beide) Gleichung(en) der Asmyptote(n) (nur Hyperbel),

(e) die Gleichung der Leitgeraden l (nur Parabel).

Lösung: Bei der Parabel ist also der Parameter p gesucht, bei Ellipse und Hyperbel die Halbachsen a und b. Jeder Punkt in obiger Liste führt auf eine Gleichung, in der p bzw. a und b die einzige(n) Unbekannte(n) ist (sind). Um p berechnen zu können benötigt man nur eine solche Gleichung, zur Berechnung von a and b zwei. Auf die Gleichungen kommt man folgendermaßen:

(a) P in die allgemeine Gleichung des Kegelschnitts einsetzen.

(b) e aus den Brennpunktkoordinaten ablesen und in die Gleichung für die lineare Exzentrizität einsetzen.

(c) Steigung k und Achsenabschnitt d aus der Tangentengleichung ablesen und in die Berührbedingung einsetzen.

(d) Steigung k ablesen und $|k| = \frac{b}{a}$ setzen.

(e) e aus der Gleichung der Leitgeraden ablesen und in die Gleichung für die lineare Exzentrizität einsetzen.

Aufgabe: Gegeben ist ein Kegelschnitt k und eine Gerade g. Gesucht sind die zu g (1) parallelen, (2) normalen Tangenten an k.

Lösung: Ablesen der Steigung k_g der Geraden g. Die Steigung der Tangenten k_t ist (1) $k_t = k_g$, (2) $k_t = -\frac{1}{k_g}$. Über die Berührbedingung des Kegelschnitts berechnet man den Achsenabschnitt d (Achtung: bei Kreis, Ellipse und Hyperbel 2 Lösungen, bei Parabel 1 Lösung).

Aufgabe: Gegeben ist ein Kegelschnitt k und ein Punkt P außerhalb von k. Gesucht sind die Gleichungen der Tangenten, die von P aus an k gelegt werden können.

Lösung: P in die Spaltform eingesetzt liefert die Gleichung der Polaren *pol*. Die Schnittpunkte von *pol* und k sind T_1 und T_2, die Tangentenberührpunkte der gesuchten Tangenten. Einsetzen von T_1 bzw. T_2 in die Spaltform liefert die gesuchten Tangentengleichungen t_1 und t_2.

Literatur

[1] GÖTZ, Stefan, REICHEL, Hans-Christian, MÜLLER, Robert, HANISCH, Günter, *Mathematik-Lehrbuch 7*, Verlag öbv & hpt, Wien 2006