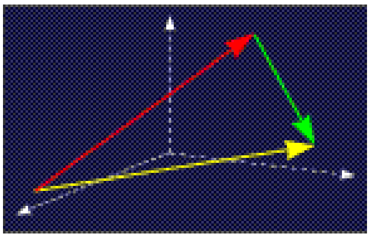
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Rechengesetze für die Grundrechnungsarten

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

In diesem Skriptum werden die Grundrechnungsarten für reelle Zahlen und deren wichtigste Rechenregeln besprochen.

1 Grundrechnungsarten

Innerhalb der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen können wir zwei wichtige Rechenoperationen ausführen:

- Werden zwei reelle Zahlen addiert, so ist das Ergebnis (ihre **Summe**) wieder eine reelle Zahl. Die zwei Zahlen, die addiert werden, heißen **Summanden**. Die elementarste Rechenregel für die Addition, die wir (zunächst für die positiven natürlichen Zahlen) schon als Kinder lernen, besagt, dass es auf die Reihenfolge der Summanden nicht ankommt, dass also beispielsweise $2+3=3+2$ gilt. Ganz allgemein drücken wir diese Regel (das so genannte „Kommutativgesetz der Addition“) in der Form $x+y=y+x$ aus, wobei x und y für beliebige reelle Zahlen stehen.
- Werden zwei reelle Zahlen multipliziert, so ist das Ergebnis (ihr **Produkt**) wieder eine reelle Zahl. Die zwei Zahlen, die multipliziert werden, heißen **Faktoren**. Um zwei konkrete Zahlen zu multiplizieren, schreiben wir einen Punkt zwischen die Faktoren, also beispielsweise $3 \cdot 7$. Bei einer Multiplikation mit Symbolen, die für reelle Zahlen stehen, kann dieser „Malpunkt“ weggelassen werden. Um etwa auszudrücken, dass es auf die Reihenfolge der Faktoren nicht ankommt (das so genannte „Kommutativgesetz der Multiplikation“), können wir $x \cdot y = y \cdot x$ oder einfach $x\,y = y\,x$ schreiben.

Die Elemente 0 und 1 sind besondere Zahlen, denn für jede reelle Zahl x gilt

$$0 \cdot x = 0 \qquad \text{und} \qquad 1 \cdot x = x. \tag{1.1}$$

Wir sagen, dass (1.1) für jedes $x \in \mathbb{R}$ (für jedes Element der Menge $\mathbb{R}$) gilt. Etwas formalistischer könnte diese Aussage auch so ausgedrückt werden:

$$0 \cdot x = 0 \qquad \text{und} \qquad 1 \cdot x = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

wobei das Symbol $\forall$ als „für alle“ ausgesprochen wird.

Um auszudrücken, dass eine Zahl mit sich selbst multipliziert wird, verwenden wir die Potenzschreibweise: 3^2 steht für $3 \cdot 3$, also 9, allgemein steht x^2 für $x \cdot x$, wobei die hochgestellte 2 als **Hochzahl** oder **Exponent** und x^2 als **Potenz** bezeichnet wird. Analog steht x^3 für $x \cdot x \cdot x$, x^4 für $x \cdot x \cdot x \cdot x$, usw.

Aus den Rechenoperationen der Addition und der Multiplikation entstehen zwei weitere – die Subtraktion und die Division:

- Die **Differenz** $12 - 7$ ist die Antwort auf die Frage „$7 +$ wieviel $= 12$?“.
- Der **Quotient** $\frac{21}{8}$ ist die Antwort auf die Frage „$8 \cdot$ wieviel $= 21$?“ oder, ein bisschen schlampig ausgedrückt, „Wie oft passt 8 in 21 hinein?“ und daher gleich dem Ergebnis der Division $21 : 8$. In der Mathematik macht man zwischen $21 : 8$ und $\frac{21}{8}$ keinen Unterschied. Beides stellt die gleiche reelle Zahl dar. Deren Dezimaldarstellung ist 2.625, und auch diese Form stellt die gleiche Zahl dar. Für viele Zwecke ist es am günstigsten, diese Zahl als Bruch $\frac{21}{8}$ anzugeben. Die 21 ist der **Zähler**, die 8 ist der **Nenner** des Bruchs.

Während die Differenz beliebiger reeller Zahlen gebildet werden kann, darf nur durch eine Zahl dividiert werden, die $\neq 0$ ist[1]. Der Nenner eines Bruchs muss also von 0 verschieden sein.

Die Operationen Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division bilden die **Grundrechnungsarten**. Man kann sie beliebig kombinieren, mit der einzigen Einschränkung, dass keine Division durch 0 vorkommen darf.

2 Rechengesetze für die Grundrechnungsarten

Einige wichtige Regeln im Umgang mit den Grundrechnungsarten wenden wir „automatisiert“ oder „instinktiv“ an. Es ist aber instruktiv, sie sich bewusst vor Augen zu halten.

Da gibt es einmal die beiden bereits erwähnten „Kommutativgesetze“: $x + y = y + x$ und $x\,y = y\,x$ für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$. Ihr Name (von lat. *commutare* „vertauschen“) drückt aus, dass wir die Summanden einer Summe oder die Faktoren eines Produkts vertauschen dürfen.

Weiters gelten zwei „Assoziativgesetze“: Um etwa $3 + 5 + 7$ zu berechnen, ist es egal, ob wir zuerst $3 + 5$ berechnen und dann 7 addieren oder ob wir zuerst $5 + 7$ berechen und das Ergebnis zu 3 addieren. Dass bei beiden Verfahren das Gleiche herauskommt, drücken wir mit Klammern in der Form

$$(x + y) + z = x + (y + z) \qquad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

aus. Dabei ist gemeint, dass die in Klammer stehende Operation zuerst ausgeführt wird. (2.1) drückt also aus, dass es für beliebige reelle Zahlen x, y und z egal ist, ob man zuerst $x + y$ berechnet und zum Ergebnis z addiert (linke Seite) oder ob man zuerst $y + z$ berechnet und

[1] Der formale Grund, warum etwa der Bruch $\frac{21}{0}$ keinen Sinn macht, besteht darin, dass es keine reelle Zahl x gibt, für die $0 \cdot x = 21$ gilt.

dann die Summe mit x bildet (rechte Seite). Ein Beispiel mit konkreten Zahlen verdeutlicht, wie das gemeint ist:

$$\underbrace{(\underbrace{2+3}_{5})+4}_{9} = \underbrace{2+(\underbrace{3+4}_{7})}_{9}\,. \tag{2.2}$$

Neben diesem „Assoziativgesetz der Addition" gibt es ein „Assoziativgesetz der Multiplikation":

$$(x\,y)\,z = x\,(y\,z) \qquad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

was beispielsweise bedeutet, dass es bei der Berechnung von $3 \cdot 5 \cdot 7$ egal ist, ob $3 \cdot 5$ mit 7 multipliziert (das entspricht der linken Seite) oder 3 mit $5 \cdot 7$ multipliziert wird (was der rechten Seite entspricht), also:

$$\underbrace{(\underbrace{3\cdot 5}_{15})\cdot 7}_{105} = \underbrace{3\cdot(\underbrace{5\cdot 7}_{35})}_{105}\,. \tag{2.4}$$

Der Name dieser Gesetze (von lat. *associare* „vereinigen, verbinden") rührt daher, dass es nicht darauf ankommt, welche Summanden bzw. Faktoren zuerst „verbunden" werden, d.h. welche Addition bzw. Multiplikation zuerst ausgeführt wird.

Schließlich gilt das „Distributivgesetz", das ausdrückt, wie die Addition und die Multiplikation zusammenspielen. Es lautet:

$$x\,(y+z) = x\,y + x\,z \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Prüfen wir es anhand des Beispiels $3 \cdot (4+5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$ nach:

$$\underbrace{3\cdot(\underbrace{4+5}_{9})}_{27} = \underbrace{\underbrace{3\cdot 4}_{12} + \underbrace{3\cdot 5}_{15}}_{27}\,. \tag{2.6}$$

Der Name des Distributivgesetzes (von lat. *distribuere* „verteilen") rührt daher, dass die Multiplikation (im Fall von (2.5) die Operation „x mal", im Fall des Beispiels (2.6) die Operation „3 mal") auf die Summanden einer Summe „verteilt" wird. Wir verwenden es entweder, um einen Faktor (in (2.5) das x) in eine Summe „hineinzumultiplizieren" oder – wenn wir es in umgekehrter Richtung lesen – um aus einer Summe der Form $x\,y + x\,z$ einen gemeinsamen Faktor x „herauszuheben", also $x\,y + x\,z = x\,(y+z)$ zu rechnen.

Jetzt sind schon viele *Buchstaben* vorgekommen – rechnen wir hier mit Buchstaben statt mit Zahlen? Ja und nein! Jedes der bisher aufgetretenen Symbole x, y und z steht für eine *beliebige* reelle Zahl. Es ist gewissermaßen nur ein „Platzhalter", den wir jederzeit durch eine konkrete Zahl ersetzen können. Die Verwendung von Symbolen hat den Vorteil, dass Rechengesetze völlig *allgemein* formuliert werden können. Versuchen Sie bitte, sich mit dieser Art des „Rechnens mit Buchstaben" anzufreunden!

Aus den oben formulierten Rechengesetzen ergeben sich weitere Regeln. Einige betreffen das Rechnen mit negativen Zahlen. Wir fassen sie hier kurz zusammen:

- Zu jeder von 0 verschiedenen Zahl x gibt es eine „Gegenzahl“, die sich von x nur durch das Vorzeichen unterscheidet. Sie kann als Differenz $0 - x$ gedeutet werden. Um von einer Zahl zu ihrer „Gegenzahl“ überzugehen, stellen wir ihr ein Minuszeichen voran. Beispiele: Die „Gegenzahl“ von 5 ist -5. Die „Gegenzahl“ von -5 ist $-(-5)$, und das ist das Gleiche wie 5. Allgemein gilt $-(-x) = x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Auf der Zahlengeraden erhält man die „Gegenzahl“ durch Spiegelung am Nullpunkt. Die Zahl 0 ist ihre eigene „Gegenzahl“, denn es gilt $-0 = 0$.
- Eine Subtraktion kann als Addition dargestellt werden: $x-y = x+(-y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- Eine reelle Zahl mit -1 zu multiplizieren bedeutet, zu ihrer „Gegenzahl“ überzugehen, d.h. „ihr Vorzeichen umzudrehen“. Beispiele: $(-1) \cdot 5 = -5$ und $(-1) \cdot (-5) = 5$. Allgemein ist $(-1) \cdot x = -x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.
- Das Produkt einer negativen Zahl mit einer positiven Zahl ist negativ. Beispiel: $(-3)\cdot 5 = -15$. Das Produkt zweier negativer Zahlen ist positiv. Beispiel: $(-3) \cdot (-5) = 15$.

Auch für das Dividieren folgen einige wichtige Regeln:

- Insbesondere können wir jede Division $\frac{x}{y}$ (mit $y \neq 0$) als Produkt $\frac{1}{y} \cdot x$ schreiben, wobei $\frac{1}{y}$ der **Kehrwert** von y ist. Beispielsweise ist $\frac{21}{8}$ das Gleiche wie $\frac{1}{8} \cdot 21$ oder $21 \cdot \frac{1}{8}$. Merken Sie sich bitte die Regel:
$$\text{Division durch } y = \text{Multiplikation mit dem Kehrwert von } y. \tag{2.7}$$
- Eine Division durch -1 bewirkt das Gleiche wie eine Multiplikation mit -1. Ein Minuszeichen im Nenner eines Bruchs kann in den Zähler geschrieben werden oder auch vor den Bruch als Ganzes. So ist beispielsweise $\frac{21}{-8}$ das Gleiche wie $\frac{-21}{8}$ oder $-\frac{21}{8}$. Die letzte Form ist für viele Zwecke die praktischste: $-\frac{21}{8}$ ist die „Gegenzahl“ von $\frac{21}{8}$.

3 Bruchrechnen mit reellen Zahlen

Da Brüche wie $\frac{3}{17}$ oder $\frac{13.6}{7.29}$ oder $-\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$ reelle Zahlen bezeichnen, gibt es spezielle Regeln dafür, wie Zahlen, die in dieser Form angegeben sind, addiert, multipliziert, subtrahiert und dividiert werden. Wir fassen die wichtigsten zusammen:

- Zwei Brüche mit dem gleichen Nenner werden gemäß der Regel
$$\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{x+y}{z} \tag{3.1}$$
addiert. Ein Beispiel mit konkreten Zahlen: $\frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{3+5}{7} = \frac{8}{7}$. Die Rechnung „$3$ Siebentel plus 5 Siebentel ist gleich 8 Siebentel“ wird genauso durchgeführt wie eine Rechnung der Art „3 Äpfel plus 5 Äpfel ist gleich 8 Äpfel“.

- Zwei Brüche werden multipliziert, indem die Zähler multipliziert und die Nenner multipliziert werden:
$$\frac{x}{y}\,\frac{a}{b} = \frac{x\,a}{y\,b}\,. \tag{3.2}$$
Beispiel: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$. Das kann auch in umgekehrter Richtung gelesen werden: Einen Bruch $\frac{x\,a}{y\,b}$ kann man als Produkt zweier Brüche $\frac{x}{y}\,\frac{a}{b}$ schreiben. Beispiel: $\frac{5 \cdot 17}{18 \cdot 7} = \frac{5}{7} \cdot \frac{17}{18}$.

- Brüche können **gekürzt** werden, indem in Zähler und Nenner ein gemeinsamer Faktor weggelassen wird:
$$\frac{x\,y}{x\,z}=\frac{y}{z}\,. \tag{3.3}$$
Beweis (mit Hilfe der vorigen Regel): $\frac{x\,y}{x\,z}=\frac{x}{x}\,\frac{y}{z}=1\cdot\frac{y}{z}=\frac{y}{z}$.

- Eine verwandte Operation ist das **Erweitern** eines Bruchs: Zähler und Nenner dürfen mit der gleichen (von 0 verschiedenen) Zahl multipliziert werden. Beispiel: $\frac{0.7}{1.5}=\frac{0.7\cdot 10}{1.5\cdot 10}=\frac{7}{15}$.

- Sollen zwei Brüche mit unterschiedlichem Nenner addiert werden, so müssen zuerst die Brüche durch Kürzen oder Erweitern so umgeformt werden, dass die Nenner übereinstimmen. Danach können die Brüche gemäß der ersten, oben angegebenen Regel addiert werden. Ein konkretes Beispiel, in dem alle Zähler und Nenner ganzzahlig sind:
$$\frac{7}{3}+\frac{5}{2}=\frac{7\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{5\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{14}{6}+\frac{15}{6}=\frac{29}{6}\,. \tag{3.4}$$
Hier wurde der erste Bruch mit 2 erweitert und der zweite mit 3, damit sich für beide der (gemeinsame) Nenner 6 (das Produkt der beiden ursprünglichen Nenner 3 und 2) ergibt. Beim Erweitern sollte so „sparsam" wie möglich (d.h. mit so kleinen Erweiterungen wie möglich) vorgegangen werden. Beispiel (mit einer Subtraktion, für die alles ganz analog wie für die Addition funktioniert):
$$\frac{7}{10}-\frac{5}{6}=\frac{7\cdot 3}{10\cdot 3}-\frac{5\cdot 5}{6\cdot 5}=\frac{21}{30}-\frac{25}{30}=-\frac{4}{30}=-\frac{2}{15}\,. \tag{3.5}$$
Hier sind die Nenner zunächst 10 und 6. Da diese Zahlen beide gerade sind (also beide einen Faktor 2 enthalten), ist ihr „kleinstes gemeinsames Vielfaches" nicht 60 (ihr Produkt), sondern 30. Dementsprechend wurden die Erweiterungen so gewählt, dass sich 30 als gemeinsamer Nenner ergibt. Zuletzt wurde noch durch 2 gekürzt.

- Um die Summe zweier Brüche allgemein darzustellen, d.h. ausgedrückt durch Variable, die für Zahlen stehen, von denen man keine besonderen Eigenschaften voraussetzen will, kann man die Regel
$$\frac{x}{y}+\frac{a}{b}=\frac{b\,x}{b\,y}+\frac{a\,y}{b\,y}=\frac{b\,x+a\,y}{b\,y} \tag{3.6}$$
formulieren. In diesem Fall bietet sich nur das Produkt der Nenner y und b der gegebenen Brüche als gemeinsamer Nenner an, auf den sie durch Erweitern gebracht werden.

- Wollen Sie eine Zahl x, die nicht als Bruchzahl dargestellt ist, zu einem Bruch addieren, so können Sie sie als Bruch in der Form $\frac{x}{1}$ schreiben oder gleich in der gewünschten Weise erweitern. Beispiel: $3+\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5}{5}+\frac{2}{5}=\frac{15}{5}+\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$.

- Den Kehrwert eines Bruchs erhalten wir, indem wir Zähler und Nenner vertauschen:
$$\frac{1}{\frac{x}{y}}=\frac{y}{x}. \tag{3.7}$$
Beispiel: Der Kehrwert von $\frac{2}{3}$ ist $\frac{3}{2}$. Beweis: $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{3}=1\cdot 1=1$.

- Aufgrund der vorigen Regel zusammen mit (2.7) können zwei Brüche so dividiert werden:

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{a}{b}} = \left(\text{Kehrwert von } \frac{a}{b}\right)\frac{x}{y} = \frac{b}{a}\,\frac{x}{y} = \frac{x\,b}{y\,a}\,. \tag{3.8}$$

  Die gleiche Regel kann gefunden werden, indem mit $y\,b$ erweitert wird:

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{a}{b}} = \frac{\frac{x}{y}\,y\,b}{\frac{a}{b}\,y\,b} = \frac{x\,b}{y\,a}\,. \tag{3.9}$$

  Einen Bruch von Brüchen nennt man Doppelbruch. Die Regel (3.8) zur Berechnung von Doppelbrüchen kann auch in der Form „Produkt der Außenglieder durch Produkt der Innenglieder“ gelesen werden. Beachten Sie, dass der Zähler des Zählers (x) und der Nenner des Nenners (b) zuletzt in den Zähler kommen, während der Nenner des Zählers (y) und der Zähler des Nenners (a) in den Nenner kommen!

Bruchrechnen besteht genau genommen nur in einer konsequenten Anwendung dieser Regeln, obwohl es in der Praxis eine gewisse Übung erfordert. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn komplexere Kombinationen der Grundrechnungsarten in allgemeiner Form (unter Verwendung von Symbolen, deren Aufgabe es ist, Zahlen zu repräsentieren) gebildet werden. Derartige Ausdrücke umzuformen und zu vereinfachen, ist Aufgabe der Termrechnung.

Die Rechengesetze für die Grundrechnungsarten sind die Basis für praktisch alle weiterführenden Stoffkapitel des Mathematikunterrichts. Der Grund dafür liegt darin, dass wir es in der Mathematik sehr oft mit *Aussagen über reelle Zahlen* zu tun haben. Auch wenn es den Anschein hat, dass in diesem Fach oft mit Buchstaben (Symbolen) gerechnet wird, so sind diese Symbole doch in vielen Fällen nichts anderes als Platzhalter für Zahlen.

Dieses Skriptum wurde erstellt im April 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Überarbeitet im November 2015 und im April 2017 unter Mitwirkung von Harald Stockinger. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.