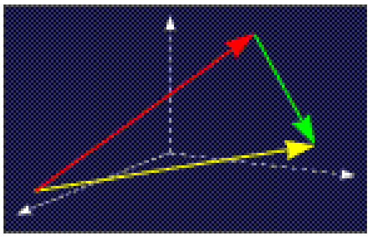
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Potenzen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

In diesem Skriptum wird besprochen, was Potenzen sind, wie der Potenzbegriff auf beliebige rationale Exponenten ausgedehnt werden kann und welche grundlegenden Rechenregeln für Potenzen gelten.

1 Potenzen mit positiven natürlichen Exponenten

Manchmal müssen wir eine Zahl mit sich selbst multiplizieren. So ist beispielsweise der Flächeninhalt eines Quadrats mit Seitenlänge a durch $a \cdot a$ gegeben, was wir kurz als a^2 schreiben. Und hier haben wir auch gleich den Grund, warum a^2 als „a Quadrat“ ausgesprochen wird. a^2 ist eine **Potenz**, a ist die **Basis** und die hochgestellte 2 der **Exponent** (oder die **Hochzahl**). Analog können wir höhere Potenzen bilden: a^3 („a hoch 3“ oder „a zur dritten“, was eine Abkürzung von „a zur dritten Potenz erhoben“ ist), a^4 („a hoch 4“), usw. Die Basis selbst können wir als a^1 schreiben, d.h. $a^1 = a$.

Aus den Rechenregeln für die Multiplikation folgt, dass das Quadrat einer reellen Zahl nie negativ sein kann:

$$a^2 \geq 0 \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

So ist beispielsweise $0^2 = 0$, $5^2 = 25$ und $(-5)^2 = 25$. Analog kann auch eine vierte Potenz (d.h. a^4) nie negativ sein, und das gilt generell für jede Potenz mit einem *geraden* Exponenten. Bei einer Potenz mit einem *ungeraden* Exponenten hingegen bleibt das Vorzeichen erhalten. So ist etwa $5^3 = 125$ und $(-5)^3 = -125$.

Um **Produkte von Potenzen** zu ermitteln, gibt es eine einfache Regel. So ist etwa $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$ (2 wird sieben mal mit sich selbst multipliziert). Allgemein gilt

$$a^m a^n = a^{m+n} \tag{1.2}$$

für beliebige reelle Zahlen a. Ebenso können **Potenzen von Potenzen** leicht ermittelt werden. So ist etwa $(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3$, besitzt also insgesamt 12 mal den Faktor 2, woraus wir schließen $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$. Allgemein gilt

$$(a^m)^n = a^{mn} \tag{1.3}$$

für beliebige reelle Zahlen a. Die Exponenten m und n in den Beziehungen (1.2) und (1.3) sind zunächst beliebige positive natürliche Zahlen, aber es stellt sich heraus, dass es sehr sinnvoll ist, auch andere Exponenten zuzulassen.

2 Erweiterung des Potenzbegriffs

Nachdem wir also festgelegt haben, dass 5^3 eine Zahl ist, die aus der dreifachen Multiplikation von 5 mit sich selbst entsteht, stellen wir die Frage, ob es einen Sinn macht, 5 „null mal" mit sich selbst zu multiplizieren, also 5^0 zu schreiben. Das ist tatsächlich der Fall, wenn wir verlangen, dass die schöne Regel (1.2) auch dann gelten soll, wenn für m und n die Zahl 0 zugelassen wird: Mit $a = 5$, $m = 1$ und $n = 0$ lautet (1.2) einfach $5^1 \cdot 5^0 = 5^{1+0} = 5^1$, also $5 \cdot 5^0 = 5$. Das ist nur möglich, wenn $5^0 = 1$ ist. Allgemein vereinbaren wir

$$a^0 = 1, \tag{2.1}$$

schränken das aber vorsichtshalber auf reelle Zahlen $a \neq 0$ ein[1]. Mit dieser Definition gelten (1.2) und (1.3) für alle $m, n \in \mathbb{N}$ (also einschließlich der 0) und für alle $a \neq 0$.

Jetzt gehen wir einen Schritt weiter und fragen, ob es Sinn macht, in (1.2) und (1.3) für m und n auch negative ganze Zahlen zuzulassen. Dann müsste beispielsweise $5^1 \cdot 5^{-1} = 5^{1+(-1)} = 5^0 = 1$ gelten, was bedeutet $5^{-1} = \frac{1}{5}$. Eine Potenz mit Exponent -1 wäre dann einfach der **Kehrwert**[2] der Basis. Daher legen wir allgemein fest:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \tag{2.2}$$

für alle $a \neq 0$. (Die Einschränkung auf von 0 verschiedene Basen a rührt jetzt daher, dass 0 keinen Kehrwert besitzt.) Probieren wir auch andere negative Exponenten aus! So wäre beispielsweise $5^3 \cdot 5^{-3} = 5^0 = 1$, also $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$. Allgemein wird festgelegt:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{2.3}$$

für alle $a \neq 0$, wobei n eine beliebige positive natürliche Zahl sein kann. Mit dieser Festlegung gelten die Regeln (1.2) und (1.3) für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ und für alle $a \neq 0$.

Schließlich fragen wir, ob wir auch rationale Zahlen (also Brüche von ganzen Zahlen) als Exponenten verwenden können. Macht so etwas wie $5^{1/2}$ Sinn? Wieder lassen wir uns von der

[1] In manchen mathematischen Texten wird $0^0 = 1$ gesetzt. Warum das nicht unproblematisch ist, wird etwas später klar, siehe Fußnote 4.

[2] Der Kehrwert einer reellen Zahl $x \neq 0$ ist $\frac{1}{x}$.

Idee leiten, die Rechengesetze (1.2) und (1.3) beizubehalten. Aus (1.3) müsste dann folgen $(5^{1/2})^2 = 5^{(1/2)\cdot 2} = 5^1 = 5$, d.h. $5^{1/2}$ wäre eine Zahl, deren Quadrat gleich 5 ist. So eine Zahl bezeichnen wir als **Quadratwurzel** (oder kurz **Wurzel**) aus 5, angeschrieben in der Form $\sqrt{5}$. So legen wir also fest

$$a^{1/2} = \sqrt{a} \tag{2.4}$$

für alle $a \geq 0$. Die Einschränkung auf nichtnegative Basen a rührt daher, dass negative reelle Zahlen keine Wurzeln besitzen: Da das Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ sein kann, macht $(-5)^{1/2}$ keinen Sinn, denn dann müsste das Quadrat von $(-5)^{1/2}$ gleich -5 sein – ein Ding der Unmöglichkeit[3]. Ein weiteres Beispiel ist $(5^{1/3})^3 = 5^1 = 5$, d.h. $5^{1/3}$ ist die dritte Wurzel aus 5, angeschrieben in der Form $\sqrt[3]{5}$. Generell definieren wir

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \tag{2.5}$$

für alle $a \geq 0$, wobei n eine beliebige positive natürliche Zahl ist[4]. Da auf der rechten Seite von (1.2) im Exponenten die Summe $m + n$ steht, müssen wir auch Exponenten der Form $1 + \frac{1}{2}$, also $\frac{3}{2}$, und in weiterer Folge beliebige rationale Zahlen als Exponenten zulassen. Allgemein wird für natürliche Zahlen m und n mit $m \geq 0$ und $n > 0$ festgelegt

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \tag{2.6}$$

$$a^{-m/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m} \tag{2.7}$$

für alle $a > 0$. (Das jeweils erste Gleichheitszeichen in diesen beiden Beziehungen definiert, was unter der Schreibweise $a^{m/n}$ bzw. $a^{-m/n}$ zu verstehen ist, die danach angegebene Gleichheit gilt unabhängig davon.)

Insgesamt haben wir damit a^q für beliebige Basen $a > 0$ und Exponenten $q \in \mathbb{Q}$ definiert, wobei in manchen Fällen die Einschränkung $a > 0$ gelockert werden kann: Für $q > 0$ sind alle $a \geq 0$ zugelassen, für ganzzahlige $q \leq 0$ sind alle $a \neq 0$ zugelassen, und für ganzzahlige $q > 0$ alle reellen a. In jedem Fall gelten die Rechengesetze

$$a^p a^q = a^{p+q} \qquad \text{und} \qquad (a^p)^q = a^{p\,q}\ , \tag{2.8}$$

da wir uns ja bei der schrittweisen Erweiterung des Potenzbegriffs daran orientiert haben, (1.2) und (1.3) beizubehalten.

In weiterer Folge ist es sogar möglich, Potenzen für *beliebige reelle Hochzahlen* zu definieren, doch das gehört nicht in dieses einführende Kapitel[5].

[3] Zumindest, wenn man die Menge der reellen Zahlen zugrunde legt. Es gibt einen erweiterten Zahlbegriff – die komplexen Zahlen –, der zulässt, dass ein Quadrat negativ ist. Wir beschränken uns aber hier auf die reellen Zahlen.

[4] Hier wird klar, warum es problematisch ist, $0^0 = 1$ zu setzen: Nach unseren Festlegungen ist $0^{1/n} = \sqrt[n]{0} = 0$ für beliebig große positive natürliche n. Das bedeutet etwa für $n = 1000$, dass $0^{0.001} = 0$. Und so würden wir erwarten, dass, wenn n immer größer wird (und $\frac{1}{n}$ daher immer kleiner), man schließlich bei $0^0 = 0$ landet. Mit einem Wort: Für 0^0 können sich, je nach der verwendeten Berechnungsmethode, verschiedene Werte ergeben. Also Vorsicht bei 0^0!

[5] Nur eine kurze Anmerkung dazu: Um etwa $5^{\sqrt{2}}$ zu definieren, kann die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ durch rationale

3 Potenzen mit verschiedenen Basen

Bis jetzt haben wir nur Potenzen mit gleicher Basis a betrachtet. Um Potenzen mit verschiedenen Basen a und b, aber gleichen Exponenten q zu multiplizieren und zu dividieren, können wir die Regeln

$$(ab)^q = a^q\, b^q \tag{3.1}$$

und

$$\left(\frac{a}{b}\right)^q = \frac{a^q}{b^q} \tag{3.2}$$

verwenden. Als Spezialfälle für $q = \frac{1}{2}$ folgen die nützlichen Formeln

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \tag{3.3}$$

und

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,. \tag{3.4}$$

4 Diskussion

Halten Sie sich bitte vor Augen, was wir auf den vorangegangenen Seiten gemacht haben! Wir haben zunächst Scheibweisen wie $5^{-2/3}$ eine konkrete Bedeutung gegeben. Die Operationen, die damit verbunden sind, können alle auch angeschrieben werden, ohne Exponenten zu verwenden, die über die im Abschnitt 1 festgelegte Bedeutung (a^n als das n-fache Produkt mit sich selbst) hinausgehen, etwa

$$5^{-2/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}\,. \tag{4.1}$$

Die neue Schreibweise hat aber den eminenten Vorteil, dass die Rechengesetze (2.8) das Bilden von mehrfachen Multiplikationen einer Zahl mit sich selbst, höheren Wurzeln und Kehrwerten in einer knappen und einheitlichen Form regeln. Sie sind leicht zu merken und in der Praxis leicht anzuwenden. Mit einem Wort: Die Erweiterung der Potenzschreibweise ist zwar logisch nicht unausweichlich, aber extrem *nützlich*!

Dieses Skriptum wurde erstellt im April 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Überarbeitet im November 2015 und im April 2017 unter Mitwirkung von Harald Stockinger. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.

Zahlen angenähert werden, beispielsweise, indem die Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ benutzt wird: 1.4 ist eine grobe Näherung, 1.41 ist schon besser, 1.414 ist noch besser, usw. Werden dann die Zahlen $5^{1.4}$, $5^{1.41}$, $5^{1.414}$ usw. (die ja alle rationale Exponenten haben) mit dem oben besprochenen Verfahren berechnet, so kommen sie einer bestimmten Zahl immer näher – diese wird dann als $5^{\sqrt{2}}$ definiert. Auch für das Rechnen mit beliebigen reellen Exponenten gelten die Regeln (2.8).