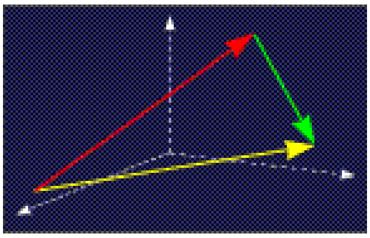
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Der binomische Lehrsatz und die Binomialkoeffizienten

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

In diesem Skriptum wird gezeigt, wie Potenzen einer Summe mit beliebigen natürlichen Exponenten, d.h. $(a+b)^n$ für $n \in \mathbb{N}$, berechnet werden können, ohne alle Klammern einzeln ausmultiplizieren zu müssen.

1 Binomische Formeln und die Potenzen einer Summe

In mathematischen Anwendungen wird oft die ausmultiplizierte Form der Potenz einer Summe benötigt. Das Quadrat einer Summe wird durch eine der drei binomischen Formeln angegeben:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2. \tag{1.1}$$

Durch fleißiges Ausmultiplizieren von Klammern können auch höhere Potenzen einer Summe wie

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3 \tag{1.2}$$

und

$$(a+b)^4 = a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,a\,b^3 + b^4 \tag{1.3}$$

berechnet werden[1]. Beachten Sie, dass die in den Summanden auftretenden Exponenten in (1.3) sich zu 4 addieren, jene in (1.2) zu 3 und jene in (1.1) zu 2 (wobei a als a^1 und b als b^1 zu lesen ist). Das kann „physikalisch" erklärt werden: Stellen Sie sich vor, a und b wären Längen (also Vielfache einer Längeneinheit wie Meter oder Kilometer). Dann ist etwa $(a+b)^3$ eine Größe der Dimension „Länge hoch 3", also ein Volumen. Daher müssen auch

[1] Um die Potenz einer *Differenz*, also etwa $(a-b)^2$, $(a-b)^3$ oder $(a-b)^4$ auszumultiplizieren, ersetzen Sie einfach in der entsprechenden Potenz von $a+b$, also in (1.1), (1.2) oder (1.3) die Variable b durch $-b$. Auf diese Weise ergibt sich etwa $(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$ (das ist die zweite binomische Formel) und $(a-b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3$. Diese Methode ist für beliebige Potenzen $(a-b)^n$ mit natürlichem n anwendbar. Die allgemeine Regel dafür lautet: Die ausmultiplizierte Form von $(a-b)^n$ wird erhalten, indem in jener von $(a+b)^n$ jede Potenz von b mit einem ungeraden Exponenten ein Minuszeichen bekommt. Wir beschränken uns im Folgenden daher auf Potenzen einer *Summe*.

die Summanden in (1.2) Volumina darstellen. Ein Summand wie $a\,b$ (eine Fläche) oder $a^2\,b^2$ („Länge hoch 4“) hätte darin nichts verloren!

Für noch höhere natürliche Potenzen, also für $(a+b)^n$ mit $n = 5, 6, 7, \ldots$ wird das Ausmultiplizieren recht schnell sehr mühsam! Zum Glück steht eine andere Methode zur Verfügung, die nun im Folgenden vorgestellt wird.

2 Das Pascalsche Dreieck

Interessanterweise steckt hinter den Vorfaktoren der ausmultiplizierten Potenzen einer Summe eine relativ einfache Struktur, die ganz allgemein, d.h. für *beliebige* natürliche Zahlen n als Exponenten, angegeben werden kann. Dazu betrachten wir zunächst ein Zahlenschema, das in Form eines Tannenbaums von der Spitze aus nach unten wächst, das so genannte **Pascalsche Dreieck**. Es beginnt so:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & \end{array} \tag{2.1}$$

Am Rand steht immer 1, und jede Zahl im Inneren ist die Summe der beiden schräg links und rechts darüber stehenden Zahlen. Das Schema kann beliebig weit fortgesetzt werden. (Schreiben Sie die nächste Zeile an!) Die Zahlen, die in den Zeilen auftreten, sind nun erstaunlicherweise gerade die Vorfaktoren, die in den ausmultiplizierten Formen der Potenzen $(a+b)^n$ auftreten! Wir beweisen diesen Sachverhalt hier nicht, sondern bitten Sie, ihn zu glauben! Für kleine n können wir ihn mit Hilfe der bisher angeschriebenen Beziehungen unmittelbar überprüfen: Die oberste Zeile, in der nur 1 steht, gehört zu $n = 0$, also zur Potenz

$$(a+b)^0 = 1, \tag{2.2}$$

die nächste, mit der Zahlenfolge $1 \;\; 1$, gehört zu $n = 1$, also zur Potenz

$$(a+b)^1 = a + b, \tag{2.3}$$

was wir auch als $1 \cdot a + 1 \cdot b$ lesen können. Die nächste Zeile, in der die Zahlen $1 \;\; 2 \;\; 1$ stehen, gehört zu $n = 2$, also zur binomischen Formel (1.1). Die Vorfaktoren von a^2 und b^2 sind beide 1 (was natürlich nicht eigens angeschrieben werden muss), und der Term $2\,a\,b$ hat 2 als Vorfaktor. Eine Zeile darunter findet sich die Zahlenfolge $1 \;\; 3 \;\; 3 \;\; 1$, und das sind gerade die Vorfaktoren von (1.2). In der darauffolgenden Zeile stehen die Vorfaktoren von (1.3). Aus der nächsten (der letzten hier dargestellten) Zeile können wir die Vorfaktoren von $(a+b)^5$ ablesen, ohne alle Klammern dieser fünften Potenz eigens ausmultiplizieren zu müssen! Um den gesamten Ausdruck für $(a+b)^5$ zu erhalten, schreiben wir zunächst diejenigen Produkte von Potenzen von a und b an, für die die Summe der Exponenten gleich 5 ist, wobei wir, ausgehend von a^5 (was wir auch als $a^5\,b^0$ lesen können) schrittweise den Exponenten von a um 1 vermindern und jenen von b um 1 erhöhen, bis wir bei b^5 (also $a^0\,b^5$) angelangt sind. Die Vorfaktoren entnehmen wir dem Pascalschen Dreieck:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5\,a^4\,b + 10\,a^3\,b^2 + 10\,a^2\,b^3 + 5\,a\,b^4 + b^5\,. \tag{2.4}$$

Dieses Methode kann ganz allgemein angewandt werden, um die ausmultiplizierte Form beliebiger höherer Potenzen $(a+b)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ auf relativ mühelose Weise zu erhalten.

3 Binomialkoeffizienten

Die Zahlen im Pascalschen Dreieck werden **Binomialkoeffizienten** genannt[2]. Wenn wir die Zeilen im Pascalschen Dreieck mit 0 beginnend nummerieren, dann entspricht die Zeilennummer n der Potenz $(a+b)^n$. Innerhalb jeder Zeile werden die Zahlen des Pascalschen Dreiecks ebenfalls mit 0 beginnend durchnummeriert. Ganz links steht dann immer die „nullte“ Zahl, und ganz rechts die n-te, beide sind gleich 1. Die k-te Zahl in der n-ten Zeile wird dann in der Form

$$\binom{n}{k} \tag{3.1}$$

(ausgesprochen „n über k“) angeschrieben. Durch diese Symbole ausgedrückt, sieht der Beginn des Pascalschen Dreiecks so aus:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots &
\end{array} \tag{3.2}$$

Durch Vergleich dieser allgemeinen Form mit den konkreten Zahlenwerten in (2.1) lesen wir beispielsweise

$$\binom{0}{0} = 1\,, \quad \binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1\,, \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \text{und} \quad \binom{5}{2} = 10 \tag{3.3}$$

[2] *Koeffizient* ist ein anderer Name für Vorfaktor. Das Wort *Binomialkoeffizient* bezeichnet jene Vorfaktoren, die entstehen, wenn Potenzen eines „Binoms“, d.h. einer Summe $a+b$, ausmultipliziert werden.

ab.

Es gibt zahlreiche Identitäten, die von den Binomialkoeffizienten handeln. Insbesondere ist es zu ihrer Berechnung für größere n nicht nötig, das Pascalsche Dreieck bis zur betreffenden Zeile aufzubauen. Eine einfache Formel zur Berechnung der Binomialkoeffizienten (die wir hier ebenfalls nicht beweisen) lautet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-k+2)\,(n-k+1)}{k\,(k-1)\,(k-2)\,\ldots\qquad\quad 2\quad\cdot\quad 1}\,. \tag{3.4}$$

Erschrecken Sie jetzt bitte nicht! Die Vorschrift, die durch diese Formel ausgedrückt wird, ist im Grunde einfach: Um etwa den Binomialkoeffizienten $\binom{8}{4}$ zu berechnen, machen Sie einen Bruchstrich und schreiben zuerst das Produkt $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ in den Nenner (d.h. angefangen von 4 bestimmen Sie jeden nachfolgenden Faktor durch Verminderung um 1, bis Sie bei 1 ankommen). Danach schreiben sie ein entsprechendes Produkt (also 8 mal 7 mal 6 usw.) in den Zähler, aber nur so lange, bis gleich viele Faktoren im Zähler stehen wie im Nenner. Der so entstehende Bruch gibt den gewünschten Binomialkoeffizienten an:

$$\binom{8}{4} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 70\,. \tag{3.5}$$

Wird ein Produkt der Form $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$, was gleich 24 ist, als $4!$ (ausgesprochen als „4 **Faktorielle**" oder „4 **Fakultät**") bezeichnet, allgemein also für $k \neq 0$

$$k! = k\,(k-1)\,(k-2)\,\ldots 2\cdot 1 \tag{3.6}$$

geschrieben, und wird zusätzlich

$$0! = 1 \tag{3.7}$$

festgelegt, so kann die Formel für die Binomialkoeffizienten in der kompakten Form

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{3.8}$$

ausgedrückt werden[3]. Also beispielsweise

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{40320}{6\cdot 120} = 56\,. \tag{3.9}$$

Hier führen die Produkte im Zähler und im Nenner zwar auf größere Zahlen als in (3.4), aber diese Form erweist sich oft als nützlich, um Beziehungen zwischen den Binomialkoeffizienten zu finden. Insgesamt stehen also – mit dem Pascalschen Dreieck sowie mit den Formeln (3.4) und (3.8) – mehrere Möglichkeiten zur Verfügung, Binomialkoeffizienten zu berechnen. Naturgemäß können Computerprogramme diese Aufgabe sehr schnell erledigen.

[3] Diese Form folgt aus (3.4), indem der Bruch mit $(n-k)!$ erweitert wird. Im Zähler entsteht dann gerade $n!$.

Eine besondere Eigenschaft der Binomialkoeffizienten ist aus der Symmetrie des Pascalschen Dreiecks (2.1) ersichtlich: In der n-ten Zeile ist der Binomialkoeffizient für $k = 0$ gleich jenem für $k = n$, jener für $k = 1$ ist gleich jenem für $k = n - 1$, usw. Allgemein gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \tag{3.10}$$

beispielsweise

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10. \tag{3.11}$$

4 Der Binomische Lehrsatz

Nun erinnern wir uns daran, dass die Binomialkoeffizienten im Zusammenhang mit den Potenzen $(a + b)^n$ auftreten. Die ausmultiplizierte Form von $(a + b)^n$ ist eine Summe von $n + 1$ Termen, beginnend mit a^n (was wir auch als $a^n\, b^0$ lesen können), danach ein Term vom Typ $\text{Vorfaktor} \cdot a^{n-1}\, b$, danach ein Term vom Typ $\text{Vorfaktor} \cdot a^{n-2}\, b^2$, usw., bis wir beim letzten Term b^n angelangt sind. Die Vorfaktoren sind die entsprechenden Binomialkoeffizienten. Fügen wir sie ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}(a+b)^n = \; & \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \\ & + \cdots + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Wegen

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \tag{4.2}$$

sind die Vorfaktoren von a^n und b^n beide gleich 1. (Sie entsprechen den Einsern am Rand des Pascalschen Dreiecks.) Die in (4.1) auftretenden Exponenten von a und b addieren sich in jedem der Summanden zu n.

Die allgemeine Formel (4.1) ist der **binomische Lehrsatz**. Er kann unter Verwendung der *Summenschreibweise* auch kürzer durch die Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \tag{4.3}$$

ausgedrückt werden. Damit ist gemeint, dass im Ausdruck $\binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$ zuerst $k = 0$ gesetzt wird, dann $k = 1$, dann $k = 2$, usw. bis $k = n$, und alle diese Terme werden addiert. Das Symbol $\sum$ (ein griechisches *Sigma*) bezeichnet die Bildung dieser Summe, das Symbol $\sum\limits_{k=0}^{n}$ wird ausgesprochen als „Summe von k gleich 0 bis n“. Auch in der Form (4.3) ist gut erkennbar, dass sich die Exponenten von a und b in jedem Summanden zu n addieren ($n - k + k = n$).

5 Beziehungen zwischen den Binomialkoeffizienten

Neben der Identität (3.10), die die Symmetrie des Pascalschen Dreiecks (2.1) ausdrückt, gibt es zahlreiche weitere Beziehungen zwischen den Binomialkoeffizienten, von denen wir nur wenige erwähnen. Die Beziehung, die das Bildungsgesetz des Pascalschen Dreiecks ausdrückt, lautet

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{5.1}$$

Sie besagt einfach, dass jede Zahl im Inneren des Pascalschen Dreiecks die Summe der schräg links und rechts darüber stehenden Zahlen ist. Wird vereinbart, dass $\binom{n}{k} = 0$ ist, wenn $k < 0$ oder $k > n$ ist (d.h. wenn die Platznummer k „außerhalb" des Pascalschen Dreiecks gewählt wird), so gilt die Beziehung (5.1) für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$.

Eine weitere Beziehung ergibt sich, indem in der Formel (4.3) $a = b = 1$ gesetzt wird. Die linke Seite reduziert sich auf 2^n, die rechte auf $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Daher gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \tag{5.2}$$

eine Identität, die insbesondere in der Wahrscheinlichkeitsrechnung nützlich ist. Sie besagt, dass die Summe aller Binomialkoeffizienten mit einem gegebenen n (die Summe aller Zahlen in der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks, wobei die Nummerierung der Zeilen bei 0 beginnt) gleich 2^n ist.

Wird in der Formel (4.3) $a = 1$ und $b = -1$ gesetzt, so ergibt sich mit

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \tag{5.3}$$

die Tatsache, dass die „alternierende Summe" der Binomialkoeffizienten verschwindet[4].

Falls Sie an weiteren Identitäten für die Binomialkoeffizienten interessiert sind (oder sie benötigen), so konsultieren Sie die Seite http://de.wikipedia.org/wiki/Binomialkoeffizient!

[4] Die Bezeichnung „alternierend" bezieht sich darauf, dass die Vorzeichen wechseln: Für gerades k ist $(-1)^k = 1$, für ungerades k ist $(-1)^k = -1$.

6 Eine kombinatorische Anwendung der Binomialkoeffizienten

Die Binomialkoeffizienten sind uns beim Ausmultiplizieren der Potenzen einer Summe begegnet. Sie besitzen aber auch zahlreiche andere Anwendungen und treten insbesondere in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der Kombinatorik (der „Lehre vom Abzählen") auf. Um ein Beispiel anzuführen: Stellen Sie sich eine Menge A mit n Elementen vor! Nun geben Sie eine natürliche Zahl $k \leq n$ vor. Wie viele Teilmengen von A gibt es, die k Elemente besitzen? Die Antwort ist: Genau $\binom{n}{k}$.

Um das zu illustrieren, wählen wir $n = 5$ und $k = 2$. Eine Menge mit 5 Elementen ist etwa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sie besitzt genau $\binom{5}{2} = 10$ Teilmengen mit 2 Elementen, nämlich $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$ und $\{4, 5\}$.

Da der Beweis, dass eine n-elementige Menge genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen besitzt, sehr interessant ist, führen wir ihn hier durch:

Beweis: Wir wählen ein n und ein $k \leq n$ und stellen uns vor, den Term $(a + b)^n$ Klammer für Klammer auszumultiplizieren:

$$(a + b)\,(a + b)\,(a + b)\,\ldots(a + b) = ? \tag{6.1}$$

Nach der allgemeinen Regel des Ausmultiplizierens von Klammern müssen wir aus jeder Klammer in diesem Ausdruck einen Summanden wählen (also das a oder das b), alle ausgewählten a's und b's multiplizieren, diesen Vorgang auf alle möglichen Arten, a's und b's aus den Klammern zu wählen, durchführen und zuletzt alle Produkte, die wir auf diese Weise erhalten, addieren. Wählen wir aus k der Klammern das b und aus den verbleibenden $n - k$ Klammern das a, so erhalten wir das Produkt $a^{n-k}\,b^k$. Es tritt so oft auf, wie wir aus k der Klammern das b wählen können. Das entspricht aber genau der Anzahl aller Möglichkeiten, aus einer n-elementigen Menge (vertreten durch die n Klammern in (6.1)) k Elemente auszuwählen, also der Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Und nach dem binomischen Lehrsatz (4.3) geschieht das genau $\binom{n}{k}$ mal, denn das ist der Vorfaktor von $a^{n-k}\,b^k$ in der ausmultiplizierten Form von $(a + b)^n$. Womit die Behauptung bewiesen ist!

Der Beweis illustriert, dass sich in der Mathematik oft unvermutete Zusammenhänge ergeben. Wer hätte gedacht, dass sich die Frage nach der Zahl der k-elementigen Teilmengen durch die Analyse, wie die Potenz einer Summe gebildet wird, beantworten lässt? Er offenbart eine enge und sehr schöne Verbindung zwischen der Termrechnung (dem Ausmultiplizieren von Klammern) und dem Abzählen von Auswahlmöglichkeiten. Er legt auch eine alternative Formulierung des betrachteten Sachverhalts nahe: $\binom{n}{k}$ ist ganz allgemein die Zahl der Möglichkeiten, aus n Objekten k (verschiedene) Objekte auszuwählen. Man nennt jede solche Auswahl eine *Kombination ohne Wiederholung*.

Mit (5.2) ergibt sich übrigens die Folgerung, dass eine Menge mit n Elementen genau 2^n Teilmengen besitzt (wobei die leere Menge und die Menge selbst mitgezählt sind).

7 Grafische Darstellung der Binomialkoeffizienten

Für ein gegebenes n wachsen die Binomialkoeffizienten zunächst mit steigendem k an und fallen dann, in einer symmetrischen Weise, wieder ab. Abbildung 1 zeigt die Werte der Binomialkoeffizienten für $n = 20$. Auf der ersten Achse ist k aufgetragen, auf der zweiten der zugehörige Binomialkoeffizient $\binom{20}{k}$.

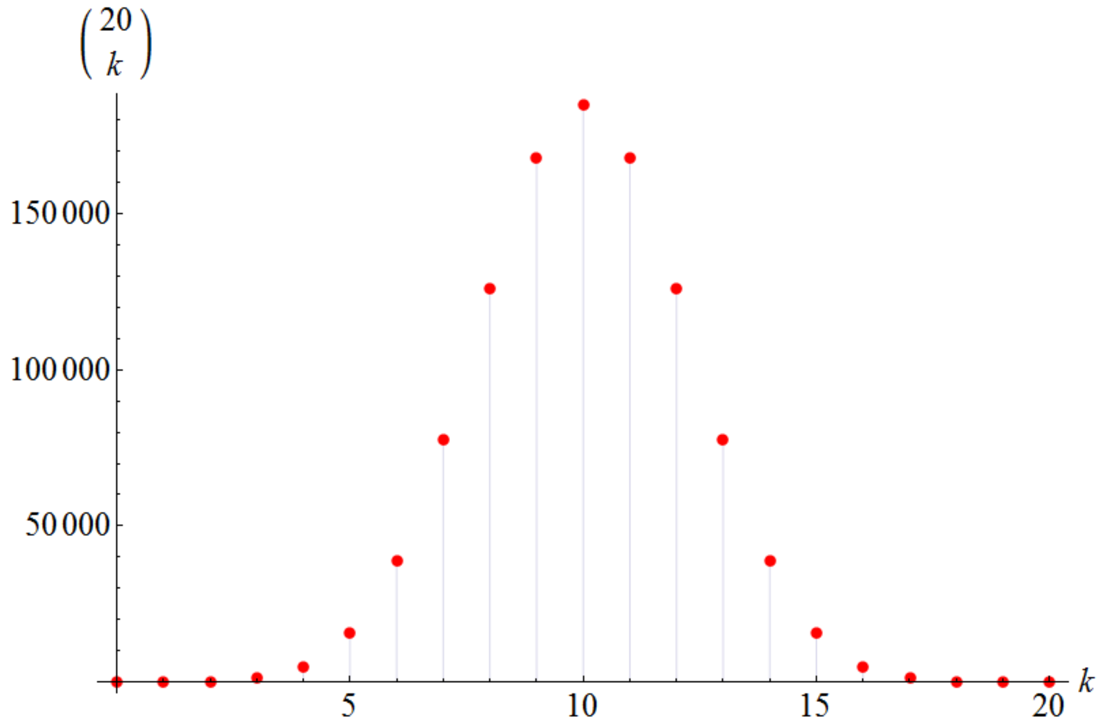


Abbildung 1: Plot der Binomialkoeffizienten für $n = 20$, d.h. der Vorfaktoren in der ausmultiplizierten Form der Potenz $(a + b)^{20}$.

Dieses Verhalten hängt eng mit der so genannten *Binomialverteilung* zusammen, die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik eine wichtige Rolle spielt.

8 Verallgemeinerung

Formel (3.4) kann benutzt werden, um die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ auch für beliebige *reelle* Zahlen n zu definieren. Wichtig an Formel (3.4) ist ja nur, dass k eine natürliche Zahl ist, da Zähler und Nenner jeweils k Faktoren haben (eine Aussage, die nur für natürliche k Sinn macht). Der Zähler kann auch dann hingeschrieben werden, wenn n keine natürliche Zahl ist.

Mit den so verallgemeinerten Binomialkoeffizienten lassen sich auch Identitäten für Potenzen $(a + b)^n$ mit nicht-natürlichen Exponenten n angeben, also etwa für $\sqrt{a+b}$, was ja das

Gleiche ist wie $(a+b)^{1/2}$, oder für $\frac{1}{a+b}$, was das Gleiche ist wie $(a+b)^{-1}$. Allerdings lassen sich derartige Potenzen nicht als endliche Summen, sondern nur als „Reihen" („unendliche Summen") schreiben. Das Thema Reihen geht zwar über den Horizont dieses Skriptums hinaus, aber für den Fall, dass Sie eine solche *binomische Reihe* sehen möchten, hier ist eine (für $\sqrt{a+b}$ mit $a=1$):

$$\begin{aligned}\sqrt{1+b} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} b^k = \\ &= \binom{1/2}{0} + \binom{1/2}{1} b + \binom{1/2}{2} b^2 + \binom{1/2}{3} b^3 + \ldots = \\ &= 1 + \frac{1}{2} b - \frac{1}{8} b^2 + \frac{1}{16} b^3 + \ldots\end{aligned} \tag{8.1}$$

Je mehr Summanden berücksichtigt werden, umso genauer ist das Ergebnis. Aber Achtung: Diese Sache klappt nur, wenn $-1 < b < 1$ ist!

Dieses Skriptum wurde erstellt im Mai 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen" (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Überarbeitet im November 2015 und im April 2017 unter Mitwirkung von Harald Stockinger. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.