

mathe online Skripten

Franz Embacher, Fachhochschule Technikum Wien und Universität Wien

Inhalt

- Mengen und Mengenoperationen
- Zahlenmengen
- Rechengesetze für die Grundrechnungsarten
- Die Ordnung der reellen Zahlen
- Absolutbetrag
- Potenzen
- Wurzeln
- Zahlenpaare und Zahlentripel
- Grundsätzliches zu Termen und Variablen
- Identitäten
- Bruchterme
- Polynome
- Der binomische Lehrsatz und die Binomialkoeffizienten
- Was ist eine Gleichung?
- Lineare Gleichungen und Äquivalenzumformungen
- Quadratische Gleichungen
- Bruchgleichungen
- Betragsgleichungen und die Methode der Fallunterscheidungen
- Wurzelgleichungen
- Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen
- Ungleichungen
- Was ist eine Funktion?
- Rede- und Schreibweisen über Funktionen
- Funktionsdarstellungen: Term, Graph, Tabelle
- Lineare Funktionen und ihre Graphen
- Quadratische Funktionen und ihre Graphen
- Winkelfunktionen und ihre Graphen
- Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Graphen
- Der Funktionen zoo
- Differenzieren – kurz und bündig
- Integrieren – kurz und bündig

Dieses Dokument vereinigt 31 Skripten zu mathematischen Themen, die für den Studieneinstieg in zahlreichen Fächern relevant sind. Unter anderem begleiten sie die an der Fachhochschule Technikum Wien jeweils im Sommer vor Studienbeginn abgehaltenen mathematischen Warmup-Kurse, dienen aber auch während des Studiums zum Wiederholen und Nachschlagen wichtiger Inhalte.

Die Skripten, aus denen diese Sammlung besteht, sind hier in aufbauender Reihenfolge und in der gleichen Version aneinandergereiht, in der sie auf der Seite

<http://www.mathe-online.at/skripten/>

und auf der Mathematik-Übungsplattform der FH Technikum Wien

<http://www.mathe.technikum-wien.at/>

auch einzeln zur Verfügung stehen. Die Nummerierung der Seiten verläuft jeweils innerhalb eines Skriptums. Auf eine zusätzliche, durchgehende Seitennummerierung im vorliegenden Dokument wurde verzichtet.

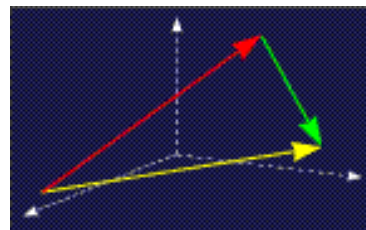
Die Skripten wurden erstellt von Franz Embacher (Fachhochschule Technikum Wien und Universität Wien) in den Jahren 2014 – 2015 (und ein Nachzügler im Jahr 2018) im Rahmen des Projekts

„Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“

(<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>),

einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Sie wurden in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger (Fachhochschule Technikum Wien) mehrmals korrigiert und überarbeitet.





Mengen und Mengenoperationen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

In diesem Skriptum wird besprochen, was man über Mengen wissen sollte. Die hier vorgestellten elementaren Begriffe, Schreibweisen und Operationen werden in praktisch jedem mathematischen Teilgebiet benötigt.

1 Mengen

Der Begriff der **Menge** geht auf den Mathematiker Georg Cantor¹ zurück. Im Jahr 1895 formulierte er (sinngemäß):

Unter einer Menge verstehen wir eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die Elemente der Menge genannt werden – zu einem Ganzen.

Insbesondere ist die Zusammenfassung *mathematischer* Objekte (wie Zahlen, Punkte der Ebene oder Punkte des Raumes, aber auch abstrakterer Objekte wie Funktionen) sehr hilfreich. Sie erlaubt es, Sachverhalte und Beziehungen bequem und übersichtlich auszudrücken, und hilft uns beim Denken über mathematische Problemstellungen. Für die Aneignung praktisch jedes mathematischen Teilgebiets ist es nötig, zumindest ein bisschen über Mengen, wie man sie anschreibt und was man mit ihnen tun kann, zu wissen.

Ist x irgendein (vorzugsweise mathematisches) Objekt und A irgendeine Menge, so kann x ein **Element** der Menge A sein oder auch nicht. Dass x Element von A ist, schreiben wir in der Form²

$$x \in A \tag{1.1}$$

an. Das Symbol \in wird als „Element“ oder „ist Element von“ ausgesprochen. Statt „ x ist Element von A “ sagt man auch „ x liegt in A “ oder kurz „ x in A “ (oder „ x aus A “, insbesondere

¹ 1845 – 1918.

² Manchmal schreibt man auch $A \ni x$, ähnlich wie man statt $x < y$ auch $y > x$ schreiben kann.

dann, wenn man ein Element x aus A „herausgreifen“ möchte). Um auszudrücken, dass x *nicht* Element der Menge A ist, schreibt man $x \notin A$.

Um eine konkrete Menge formal anzugeben (zu definieren), stehen zunächst zwei Möglichkeiten zur Verfügung:

- **Aufzählung:** Die Elemente der Menge werden zwischen **Mengenklammern** $\{$ und $\}$ geschrieben und durch Beistriche getrennt. Beispielsweise bezeichnet

$$E = \{2, 3, 5, 7\} \quad (1.2)$$

die Menge, deren Elemente die Zahlen 2, 3, 5 und 7 sind. Dabei kommt es auf die Reihenfolge nicht an. Die gleiche Menge könnte man auch in der Form

$$E = \{7, 3, 2, 5\} \quad (1.3)$$

angeben. Für die Menge E gilt beispielsweise $3 \in E$ und $4 \notin E$. Weiters kann jedes Element einer Menge nur *einmal* darin vorkommen. Unter $\{2, 3, 5, 5, 7, 7\}$ wird die Menge (1.2) verstanden, also eine Menge mit vier Elementen, auch wenn einige Elemente mehrfach angegeben sind. Mengen können auch unendlich viele Elemente haben. So können wir beispielsweise durch die Schreibweise

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \quad (1.4)$$

festlegen, dass das Symbol \mathbb{N} die Menge aller natürlichen Zahlen (also die Zahlen, mit denen wir zählen, wobei mit 0 begonnen wird) bezeichnen soll. Die Punkte stehen für alle weiteren natürlichen Zahlen, die man ja nicht alle hinschreiben kann. Eine Schreibweise wie in (1.4) sollte nur dann verwendet werden, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, was die Punkte bedeuten.

- **Beschreibung durch Eigenschaften:** Hier ein Beispiel:

$$F = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10\}. \quad (1.5)$$

Diese Definition der Menge F kann wortwörtlich in die Alltagssprache übersetzt werden:

$F =$	F ist gleich
$\{n \in \mathbb{N}$	die Menge aller $n \in \mathbb{N}$ (d.h. die Menge aller natürlichen Zahlen n)
$ $	für die gilt:
$n \leq 10\}$	n ist kleiner-gleich 10.

Die Menge (1.5) besteht also aus allen natürlichen Zahlen, die kleiner-gleich 10 sind. Statt des senkrechten Strichs $|$ („für die gilt“) wird manchmal auch ein Doppelpunkt geschrieben. Statt (1.5) heißt es dann:

$$F = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 10\}. \quad (1.6)$$

Man kann diese Menge (völlig gleichwertig) auch in der Form

$$F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad (1.7)$$

festlegen. Es spricht auch nichts gegen eine Beschreibung in Worten:

$$F \text{ ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die kleiner-gleich 10 sind} \quad (1.8)$$

(oder „ F sei die Menge ...“, wenn der Name F auf diese Weise eingeführt wird) oder

$$F = \{n \mid n \text{ ist natürliche Zahl kleiner-gleich } 10\}. \quad (1.9)$$

Wichtig ist nur, dass in eindeutiger Weise festgelegt wird, welche Objekte Elemente von F sind und welche nicht. Ein anderes Beispiel ist

$$H = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\}, \quad (1.10)$$

d.h. die Menge aller nicht-negativen geraden Zahlen. Da sie unendlich viele Elemente besitzt, kann man sie nicht alle aufzählen, aber man könnte statt (1.10) auch

$$H = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\} \quad (1.11)$$

schreiben, wenn aus dem Zusammenhang klar ist (oder eigens dazugesagt wird), was mit den Punkten gemeint ist. Eine Spur komplizierter als die bisherigen ist die folgende Mengendefinition:

$$Q = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}. \quad (1.12)$$

Lesen wir sie gemäß dem oben beschriebenen Rezept: Q ist die Menge aller n^2 , für die n eine natürliche Zahl ist. Ist klar, was damit gemeint ist?

$$Q = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}.$$

ist die Menge aller Quadrate von natürlichen Zahlen:

Die Zusammenfassung von Objekten zu Mengen kann, wie der Unterschied zwischen (1.5) und (1.8) zeigt, auf mehr oder weniger formale Weise ausgedrückt werden. Man kann auch beispielsweise eine Gerade in der Zeichenebene als Menge aller Punkte, die auf dieser Geraden liegen, auffassen. Ob man dabei offen lässt, was ein „Punkt“ ist (weil wir alle ohnehin eine hinreichend genaue Vorstellung davon haben), oder ob man Punkte durch ihre Koordinaten angeben und eine Geradengleichung dazuschreiben soll, ist zweitrangig und hängt davon ab, was man in weiterer Folge mit dieser Geraden machen möchte.

Generell gilt: Wenn eine formale („formelmäßige“) Beschreibung von Mengen – wie in (1.5) oder (1.12) – hilfreich ist, weil damit ein Sachverhalt knapp und übersichtlich ausgedrückt wird, dann soll man so vorgehen. Wichtig ist aber vor allem, dass durch eine Mengenbeschreibung klar ausgedrückt wird, was gemeint ist – egal, wie man es im Einzelfall macht.

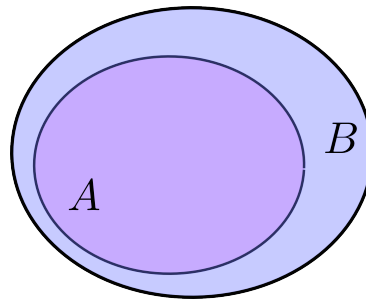


Abbildung 1: Mengendiagramm zur Veranschaulichung der Beziehung $A \subseteq B$. Jede der beiden Mengen A und B ist durch alle Punkte innerhalb der entsprechend beschrifteten ovalen Figur repräsentiert.

2 Beziehungen zwischen Mengen

Sind A und B Mengen und ist jedes Element von A auch ein Element von B , so nennt man A eine **Teilmenge** (oder **Untermenge**) von B (und entsprechend B eine **Obermenge** von A) und schreibt dafür

$$A \subseteq B \quad (2.1)$$

(„ A ist Teilmenge von B “) oder $B \supseteq A$ („ B ist Obermenge von A “). Eine andere Sprechweise dafür ist: „ B umfasst A “.

Anmerkung: Man sagt dann auch, dass A in B „enthalten“ ist. Aber Vorsicht: Manchmal wird – schlampig, wie wir Menschen sind – auch gesagt, dass ein Element y in der Menge B „enthalten“ ist. Ob „enthalten“ nun eine Teilmenge oder ein Element angibt, sollte aber immer aus dem Zusammenhang hervorgehen.

Aus der soeben angegebenen Definition des Begriffs Teilmenge (A heißt Teilmenge von B , wenn jedes Element von A auch Element von B ist) folgt, dass jede Menge Teilmenge von sich selbst ist, d.h. dass stets $A \subseteq A$ gilt. (Das ist ganz analog wie beim Symbol \leq , für das ja nicht nur $5 \leq 7$ gilt, sondern auch $7 \leq 7$.)

Wann sind zwei Mengen A und B gleich? Antwort: Wenn sie die gleichen Elemente besitzen, also wenn jedes Element von A auch Element von B ist *und umgekehrt*. Das ist genau dann der Fall, wenn sowohl $A \subseteq B$ als auch $B \subseteq A$ gilt.

Ist A Teilmenge von B und sind A und B verschieden, also $A \neq B$, so nennt man A eine **echte Teilmenge** von B . Um das eigens hervorzuheben, kann man dann statt $A \subseteq B$ auch $A \subsetneq B$ schreiben. In diesem Fall besitzt B mindestens ein Element, das nicht Element von A ist.

Anmerkung: In der Literatur findet sich auch die Schreibweise $A \subset B$. Leider wird sie von verschiedenen Autoren in unterschiedlicher Weise gebraucht (in einem Lehrbuch für „ A ist Teilmenge von B “, in einem anderen für „ A ist echte Teilmenge von B “), sodass wir davon abraten, sie zu benutzen.

Beziehungen zwischen Mengen kann man übersichtlich durch **Mengendiagramme (Venn-diagramme)** veranschaulichen. Abbildung 1 zeigt ein Mengendiagramm zur Veranschaulichung der Beziehung $A \subseteq B$.

Zwei Mengen A und B , die kein Element gemeinsam haben, heißen **disjunkt** (oder **elementfremd**) – siehe Abbildung 2.

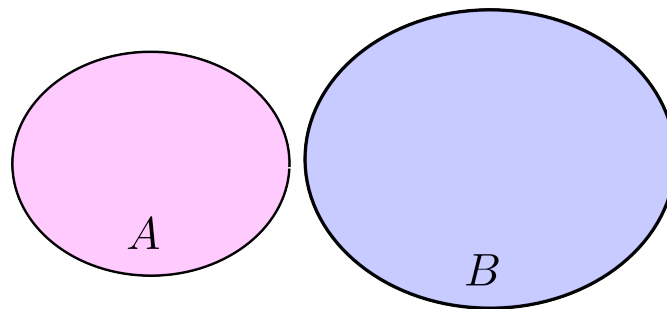


Abbildung 2: Mengendiagramm zur Veranschaulichung zweier disjunkter Mengen.

3 Mengen aus Mengen gewinnen

Sind A und B Mengen, so kann man daraus mit Hilfe einiger Operationen weitere Mengen gewinnen:

- Die **Durchschnittsmenge** (kurz: der **Durchschnitt**) zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die sie *beide* besitzen. Sie wird mit dem Symbol $A \cap B$ bezeichnet. Formal sieht das so aus:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}. \quad (3.1)$$

Siehe Abbildung 3 für eine Veranschaulichung.

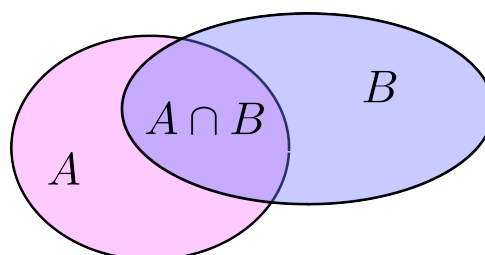


Abbildung 3: Mengendiagramm zur Veranschaulichung des Konzepts der Durchschnittsmenge. A und B sind jeweils durch alle Punkte innerhalb der entsprechend beschrifteten ovalen Figur repräsentiert. $A \cap B$ entspricht jenem Bereich, der von beiden Mengen überdeckt wird.

Beispiel: Mit F von (1.5) und H von (1.10) ist

$$F \cap H = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}. \quad (3.2)$$

Will man dieser Durchschnittsmenge den Namen J geben, so schreibt man

$$J = F \cap H \quad (3.3)$$

oder, wenn gleich auch ihre Elemente in aufzählender Form angegeben werden sollen,

$$J = F \cap H = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}. \quad (3.4)$$

Das Konzept der Durchschnittsmenge wirft eine interessante Frage auf: Was ist der Durchschnitt zweier Mengen, die disjunkt sind, also kein Element gemeinsam haben? Sie müsste „leer“ sein. Obwohl das nicht wirklich der Idee der „Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte“ entspricht, vereinbaren wir, dass eine solche **leere Menge** ebenfalls zugelassen ist. Sie wird entweder mit dem Symbol $\{\}$ oder mit dem Symbol \emptyset bezeichnet³. Jetzt kann aber wirklich nichts mehr passieren: Der Durchschnitt zweier Mengen ist stets wieder eine Menge. Zwei Mengen A und B sind genau dann disjunkt, wenn ihr Durchschnitt leer ist, d.h. wenn $A \cap B = \{\}$ gilt.

Durchschnittsmengen werden in der Mathematik immer wieder und für ganz unterschiedliche Zwecke gebildet. Bezeichnet man beispielsweise die Punktmengen, die zwei einander im Punkt S schneidenden Geraden entsprechen, mit g_1 und g_2 , so ist $g_1 \cap g_2$ die Menge, deren einziges Element der Schnittpunkt S ist. (Salopperweise schreibt man dann oft $g_1 \cap g_2 = S$, obwohl es eigentlich $g_1 \cap g_2 = \{S\}$ heißen müsste. Erkennen Sie den Unterschied?)

- Die **Vereinigungsmenge** (kurz: die **Vereinigung**) von A und B ist die Menge, die man erhält, wenn die Elemente von A und B zusammengewürfelt werden. Sie wird mit dem Symbol $A \cup B$ bezeichnet und ist die Menge aller Objekte, die Element von A oder Element von B sind (oder beides). Formal sieht das so aus⁴:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}. \quad (3.5)$$

Siehe Abbildung 4 für eine Veranschaulichung.

Beispiel: Mit E von (1.2) und $K = \{7, 8\}$ ist

$$E \cup K = \{2, 3, 5, 7, 8\}. \quad (3.6)$$

- Die **Differenzmenge** (kurz: die **Differenz**) von B und A (beachten Sie die Reihenfolge!) ist die Menge aller Elemente von B , die *nicht* Elemente von A sind. Sie wird mit dem Symbol $B \setminus A$ bezeichnet⁵ und kurz als „ B ohne A “ ausgesprochen. Sie entsteht, wenn man aus B alle Elemente entfernt, die in A liegen. Formal sieht das so aus:

$$B \setminus A = \{x \in B \mid x \notin A\}. \quad (3.7)$$

Siehe Abbildung 5 für eine Veranschaulichung.

³ Achtung: Bei \emptyset besteht eine gewisse Verwechslungsgefahr mit dem griechischen Buchstaben Φ (in den Schreibweisen ϕ und Φ) und dem technischen Zeichen \varnothing für *Durchmesser*.

⁴ Das „oder beides“ muss nicht eigens dazugeschrieben werden. Generell ist mit dem Wort „oder“ in der Mathematik gemeint „entweder ... oder ... oder beides“.

⁵ Eine andere Bezeichnung, die man hie und da findet, ist $B \sim A$. Seltener (und nicht zur Nachahmung empfohlen) ist die Schreibweise $B - A$.

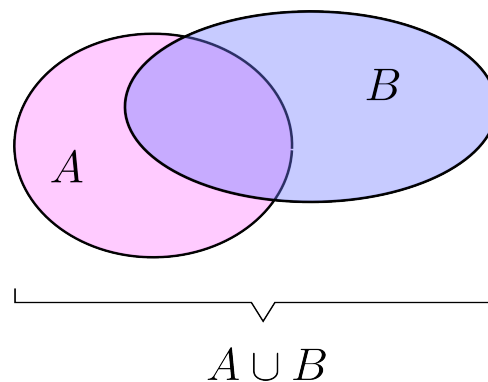


Abbildung 4: Mengendiagramm zur Veranschaulichung des Konzepts der Vereinigungsmenge.

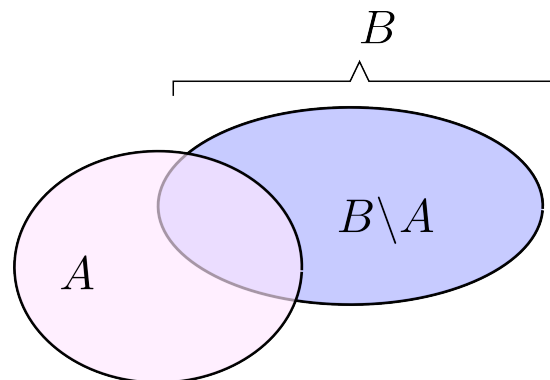


Abbildung 5: Mengendiagramm zur Veranschaulichung des Konzepts der Differenzmenge.

Beispiel: Mit F von (1.5) und H von (1.10) ist

$$F \setminus H = \{1, 3, 5, 7, 9\}. \quad (3.8)$$

Das Konzept der Differenzmenge wird auch benutzt, um einzelne Elemente aus einer Menge auszuschließen.

Beispiel: $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen, die *nicht* gleich 0 sind:

$$\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}. \quad (3.9)$$

- Manchmal arbeitet man mit einer Menge (nennen wir sie G), in der alle Objekte, die in einem bestimmten Zusammenhang auftreten können, als Elemente enthalten sind. (G könnte die Menge aller natürlichen Zahlen oder die Menge aller reellen Zahlen sein.) Wir nennen sie **Grundmenge**. Ist $A \subseteq G$, so wird die Differenzmenge $G \setminus A$ (also die Menge aller Elemente von G , die nicht Element von A sind) als die **Komplementärmenge** (kurz: das **Komplement**) von A (bezüglich G) bezeichnet. Ist klar, um welche Grundmenge es sich handelt, so schreibt man anstelle von $G \setminus A$ kurz A^c . Siehe Abbildung 6 für eine Veranschaulichung.

Ein konkretes Beispiel für eine Komplementärmenge wurde in (3.9) bereits angegeben. (Man könnte diese Menge in der Form $\{0\}^c$ anschreiben, wenn klar wäre, dass die

Grundmenge gleich \mathbb{N} ist. Da aber als Grundmenge oft auch die Menge aller reellen Zahlen verwendet wird, bleibt man lieber bei der Schreibweise $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.)

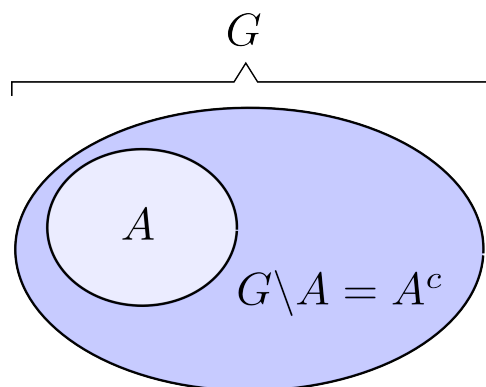


Abbildung 6: Mengendiagramm zur Veranschaulichung des Konzepts der Komplementärmenge.

- Für manche Zwecke benötigt man **geordnete Paare** (kurz: **Paare**) von Objekten. Ein geordnetes Paar ist eine Liste aus zwei Objekten, einem ersten und einem zweiten. Sind a und b irgendwelche (vorzugsweise mathematische) Objekte, so schreibt man das aus a (als erstem Objekt) und b (als zweitem Objekt) gebildete Paar in der Form

$$(a, b) \quad (3.10)$$

an.

Achtung: Das Paar (a, b) ist nicht dasselbe wie die Menge $\{a, b\}$, denn bei geordneten Paaren kommt es auf die Reihenfolge an, bei Mengen hingegen nicht. Das Zahlenpaar $(3, 5)$ ist nicht dasselbe wie das Zahlenpaar $(5, 3)$, aber die Mengen $\{3, 5\}$ und $\{5, 3\}$ sind gleich⁶.

Sind nun A und B Mengen, so nennt man die Menge aller geordneten Paare (a, b) , für die $a \in A$ und $b \in B$ ist, das **kartesische Produkt** der Mengen A und B und bezeichnet sie mit dem Symbol $A \times B$. Formal sieht das so aus:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}. \quad (3.11)$$

Paare von reellen Zahlen werden benutzt, um Punkte in der Ebene anzugeben: Bezeichnen wir die Menge aller reellen Zahlen mit \mathbb{R} , so ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Menge aller reellen

⁶ Apropos $(3, 5)$: Wenn Dezimalzahlen mit einem *Dezimalpunkt* geschrieben werden, kann der Beistrich als Trennzeichen zwischen Zahlen verwendet werden. Dann ist klar, was die Schreibweisen für die Menge $\{3.2, 5.7\}$ oder das Paar $(3.2, 5.7)$ bedeuten. Falls man ein Komma statt des Dezimalpunkts schreibt, braucht man ein anderes Trennzeichen, etwa einen Strichpunkt. Dann heißt es beispielsweise $\{3, 2; 5, 7\}$ und $(3, 2; 5, 7)$. Als Trennzeichen bei Paaren wird auch manchmal ein senkrechter Strich verwendet. Statt (a, b) schreibt man dann $(a|b)$. Man kann ein Paar auch in Spaltenform anschreiben, also als $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Dann ist überhaupt kein Trennzeichen nötig.

Zahlenpaare, d.h. die Menge aller (x, y) , für die x und y reelle Zahlen sind. Werden x und y als Koordinaten von Punkten in der Zeichenebene aufgefasst, so kann die Zeichenebene mit der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ identifiziert werden. Man kürzt sie meist als \mathbb{R}^2 (ausgesprochen „R zwei“) ab.

In analoger Weise können **(geordnete) Tripel**

$$(a, b, c) \quad (3.12)$$

und, ganz allgemein, **(geordnete) n -Tupel**

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (3.13)$$

betrachtet und Mengen

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\} \quad (3.14)$$

und, ganz allgemein,

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\} \quad (3.15)$$

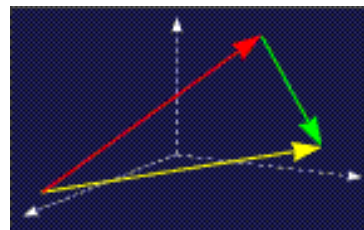
definiert werden. Die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aller reellen Zahlentripel (Kurzschreibweise \mathbb{R}^3) kann mit dem (dreidimensionalen) Raum identifiziert werden.

Dieses Skriptum wurde unter Mitwirkung von Harald Stockinger im Juli 2018 erstellt, gewissermaßen als Nachzügler im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“

(<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>).

Geringfügige Korrekturen erfolgten im Juli 2021 und im Mai 2023.

Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Zahlenmengen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

In diesem Skriptum werden die Mengen der reellen, der natürlichen, der ganzen, der rationalen und der irrationalen Zahlen vorgestellt.

1 Die reellen Zahlen

Fast alle Zahlen, die im Stoff des Mathematikunterrichts auftreten, sind **reelle Zahlen**. Reelle Zahlen können wir schlicht und einfach als **Dezimalzahlen** charakterisieren. Sie lassen sich durch eine Abfolge von Ziffern (d.h. Symbolen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9), einen Dezimalpunkt und ein Vorzeichen (– oder +, wobei letzteres weggelassen werden kann) darstellen. Obwohl wir beispielsweise die Zahl 5.63 als „fünf Komma sechs drei“ aussprechen, werden wir, der im englischen Sprachraum üblichen Konvention folgend, keinen Beistrich, sondern einen Punkt als „Dezimaltrennzeichen“ schreiben. Auch viele Computerprogramme erfordern die Eingabe mit Dezimalpunkt.¹

Beispiele für reelle Zahlen sind –5 („minus fünf“), 54.321 („vierundfünfzig Komma drei zwei eins“) und Zahlen, deren Dezimaldarstellung (Dezimalentwicklung) nie abbricht, mag sie nun

- ab irgendeiner Stelle aus einer immer wiederholten Zifferngruppe bestehen (wie bei $-0.33333333\dots$ und $34.7912121212\dots$); man nennt sie periodisch,
- eine andere Regelmäßigkeit aufweisen (wie z.B. $0.101001000100001\dots$)
- oder aus einer Ziffernabfolge ohne erkennbare Ordnung bestehen, wie etwa bei der berühmten Zahl Pi ($\pi = 3.14159265\dots$), die für jeden Kreis das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser angibt.

¹ Siehe <http://de.wikipedia.org/wiki/Dezimaltrennzeichen> für die „Punkt-Länder“ und die „Komma-Länder“!

Die Menge aller reellen Zahlen wird mit \mathbb{R} bezeichnet. Manchmal will man die 0 ausschließen. Für solche Fälle definieren wir

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}, \quad (1.1)$$

d.h. \mathbb{R}^* ist die Menge aller von 0 verschiedenen reellen Zahlen.

In gewisser Hinsicht kann man sich eine reelle Zahl auch geometrisch vorstellen, nämlich als einen Punkt auf einer Geraden. Dabei müssen zwei Punkte dieser **Zahlengeraden** als 0 und 1 ausgezeichnet sein. Damit kann man einen Ausschnitt der Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen „aufzeichnen“. Im folgenden Diagramm sind einige reelle Zahlen (als Strichmarkierungen bzw. Pfeilmarkierungen, damit man sie sieht) eingezeichnet:

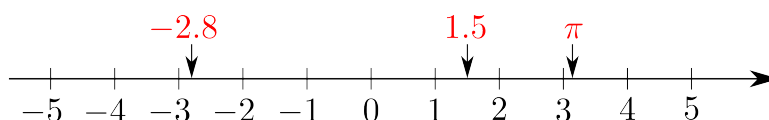


Abbildung 1: Skizze der Zahlengeraden mit einigen ausgewählten reellen Zahlenwerten.

Man kann auch an ein (unendlich langes) Maßband denken, dessen Markierung so fein ist, dass sie „beliebig genaue Ablesungen“ gestattet. Punkte rechts von 0 werden als positive Zahlen, Punkte links von 0 werden als negative Zahlen interpretiert. Auf diese Weise stellt sich eine positive Zahl der Vorstellung als „Abstand“ vom Nullpunkt (von der Nullmarkierung) dar. So hat der Punkt „1“ vom Nullpunkt den Abstand 1. Negative Zahlen entsprechen „minus ihrem Abstand“ vom Nullpunkt. Entsprechend der ansteigenden Richtung setzt man oft ans rechte Ende einer Skizze der Zahlengeraden einen Pfeil.

Einige Teilmengen von \mathbb{R} sind so wichtig, dass sie eigene Namen erhalten.

2 Die natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind die Zahlen, mit denen wir zählen, wobei wir mit 0 beginnen²:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (2.1)$$

Die Menge aller natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit dem Symbol \mathbb{N} , also

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}. \quad (2.2)$$

Wollen wir die 0 ausschließen, so verwenden wir das Symbol \mathbb{N}^* :

$$\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}. \quad (2.3)$$

Da diese Menge aus allen positiven natürlichen Zahlen besteht, ist für sie auch die Bezeichnung \mathbb{N}^+ gebräuchlich.

Werden zwei natürliche Zahlen addiert oder multipliziert, so erhalten wir wieder eine natürliche Zahl.

² Achtung! Hier gibt es zwei Konventionen: Nach der älteren, die in der mathematischen Literatur aber durchaus noch Verwendung findet, wird unter der „Menge der natürlichen Zahlen“ die Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$ verstanden, also ohne die 0! Um Verwechslungen zu vermeiden, kann man, wenn die 0 dabei sein soll, die Bezeichnung $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ verwenden. Das wird auch in den meisten Seiten von mathe online so gemacht.

3 Die ganzen Zahlen

Wird eine natürliche Zahl von einer anderen abgezogen, so kann es passieren, dass das Ergebnis keine natürliche Zahl ist (Beispiel: $5 - 7 = -2 \notin \mathbb{N}$). Unter diesem Makel leidet die Menge der **ganzen Zahlen** nicht. Wir definieren eine ganze Zahl als eine reelle Zahl, deren Dezimaldarstellung unmittelbar nach dem Dezimalpunkt abbricht, danach also nur Nullen besitzt (die wir natürlich nicht anschreiben müssen). Die Menge der ganzen Zahlen bezeichnen wir mit dem Symbol \mathbb{Z} , also

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}. \quad (3.1)$$

Auf der Zahlengeraden bildet sie eine Abfolge von Punkten im Abstand 1, von 0 aus nach rechts und links gehend.

Innerhalb der Menge \mathbb{Z} können wir nach Herzenslust addieren, multiplizieren und subtrahieren, und das Ergebnis wird stets wieder in \mathbb{Z} liegen.

4 Die rationalen Zahlen

Wird eine ganze Zahl durch eine andere (von 0 verschiedene) ganze Zahl dividiert, so kann es passieren, dass das Ergebnis keine ganze Zahl ist (Beispiel: $3 : 7 = \frac{3}{7}$). Daher definieren wir als weitere „Zahlenerweiterung“ die **rationalen Zahlen** als jene reellen Zahlen, die durch Division ganzer Zahlen erhalten werden. Das sind genau alle **Bruchzahlen**, d.h. alle Zahlen der Form $\frac{m}{n}$, wobei $m, n \in \mathbb{Z}$ und $n \neq 0$ ist. Wir bezeichnen die Menge aller rationalen Zahlen mit dem Symbol \mathbb{Q} .

Aus den Regeln der Division folgt, dass die Elemente von \mathbb{Q} genau jene reellen Zahlen sind, deren Dezimaldarstellung entweder abbricht, d.h. ab einer bestimmten Stelle nur Nullen aufweist (wie etwa 12.83, was wir auch als Bruchzahl $\frac{1283}{100}$ schreiben können), oder periodisch ist, d.h. ab einer bestimmten Stelle eine sich immer wiederholende Ziffernfolge aufweist, wie das Beispiel

$$\frac{-617}{55} = -11.2181818\dots \quad (4.1)$$

illustriert.³

Eine rationale Zahl kann daher wahlweise als Bruchzahl oder durch ihre Dezimaldarstellung angeschrieben werden. So besteht etwa zwischen $\frac{2}{5}$ und 0.4 – abgesehen von der unterschiedlichen Darstellungsweise – keinerlei Unterschied!

Auf der Zahlengeraden bilden die rationalen Zahlen eine Menge von Punkten, die sehr „dicht“ liegen – viel dichter, als man je einzeichnen könnte, denn zwischen je zwei rationalen Zahlen liegt stets wieder eine rationale Zahl (tatsächlich sogar unendlich viele)!

³ Der Vollständigkeit halber erwähnen wir, dass die Dezimaldarstellung nicht ganz eindeutig ist. So kann die Zahl 1 auch als 0.9999999... oder die Zahl 12.83 als 12.829999999... geschrieben werden. Um ersteres einzusehen, gehen Sie von $\frac{1}{3} = 0.3333333\dots$ aus und berechnen $1 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 0.9999999\dots$.

5 Die irrationalen Zahlen

Die irrationalen Zahlen sind jene reellen Zahlen, die nicht rational sind. Das sind also jene, die *nicht* als Brüche ganzer Zahlen geschrieben werden können oder, was damit gleichbedeutend ist, deren Dezimaldarstellung weder abbricht noch periodisch ist. Ein Beispiel wäre

$$0.101001000100001\dots, \quad (5.1)$$

andere Beispiele sind die Kreiszahl $\pi = 3.14159265\dots$ oder $\sqrt{2} = 1.414213562\dots$. Man kann zeigen, dass die Wurzel aus einer natürlichen Zahl entweder wieder eine natürliche Zahl (wie beispielsweise $\sqrt{9} = 3$) oder eine irrationale Zahl ist.

Die Menge der irrationalen Zahlen (der wir keinen eigenen Buchstaben als Namen zuweisen) kann als $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ geschrieben werden⁴: die Menge aller Elemente von \mathbb{R} , die nicht in \mathbb{Q} liegen.

6 Tipps zur Angabe von Zahlen

Zahlen all dieser Mengen müssen oft als Resultate von Berechnungen angegeben werden. Eine Zahl „anzugeben“ bedeutet, irgendeine Information anzugeben, die sie eindeutig festlegt. Dabei ist es sinnvoll, von vornherein die *exakte Angabe* einer Zahl von der Angabe eines *Näherungswerts* zu unterscheiden.

Manchmal können reelle Zahlen recht leicht durch gewisse Eigenschaften charakterisiert werden (wie zum Beispiel $\sqrt{2}$ als jene positive reelle Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist), während die Angabe ihrer Dezimaldarstellung sehr schwer fällt. Es ist auch nicht immer erforderlich, reelle Zahlen in Dezimaldarstellung anzugeben. So ist es etwa ziemlich überflüssig, anstelle der Zahl $\frac{1}{7}$ die (periodische) Dezimaldarstellung $0.142857142857142857\dots$ anzuschreiben. Eine Angabe wie 0.142857 (ohne Hinweis, dass es sich um eine periodische Dezimaldarstellung handelt) ist ohnedies nicht $\frac{1}{7}$, sondern nur ein Näherungswert! Oder, um ein anderes Beispiel anzuführen: Die Zahl π ist eine eindeutig bestimmte reelle Zahl, während 3.14 oder 3.14159 ebenfalls nur Näherungen, also von π verschiedene Zahlen sind, die nur *ungefähr so groß sind* wie π . In vielen mathematischen Formeln kommt die Zahl π vor, ohne dass dort ihre Dezimaldarstellung verwendet werden müsste. Sie werden noch vielen anderen solchen Zahlen begegnen und sollten der Versuchung widerstehen, jede auftretende Zahl sofort in ihre Dezimaldarstellung umzurechnen oder durch einen Näherungswert zu ersetzen.

Beachten Sie bitte auch, dass Sie mit *Zwischenergebnissen* weiterrechnen müssen! Daher ist es im Hinblick auf spätere Vereinfachungsmöglichkeiten (wie Kürzen) meistens sinnvoll, die Darstellung einer rationalen Zahl als Bruch ganzer Zahlen (wie etwa $\frac{2}{5}$) der Dezimaldarstellung (wie 0.4) vorzuziehen.

Und noch etwas: Bitte verwenden Sie nicht die Schreibweise $3\frac{1}{2}$ für „dreieinhalb“, da hier eine Verwechslungsgefahr mit „3 mal $\frac{1}{2}$ “ besteht, obwohl $3 + \frac{1}{2}$ gemeint ist! Schreiben Sie stattdessen entweder $\frac{7}{2}$ oder 3.5!

⁴ Das Symbol \setminus bedeutet „ohne“. Siehe dazu das Skriptum *Mengen und Mengenoperationen*.

7 Wie viele Elemente...?

Die hier definierten Mengen \mathbb{R} , \mathbb{N} , \mathbb{Z} und \mathbb{Q} sowie die Menge der irrationalen Zahlen sind unendliche Mengen, d.h. sie besitzen unendlich viele Elemente. Interessanterweise besitzen die Mengen \mathbb{N} , \mathbb{Z} und \mathbb{Q} in einem gewissen Sinn „gleich viele“ Elemente – sie lassen sich als (unendliche) Liste aufzählen. Um etwa die Elemente von \mathbb{Z} als Liste aufzuzählen, gehen wir einfach so vor:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots \quad (7.1)$$

Die rationalen Zahlen aufzuzählen, ist etwas schwieriger, aber es geht! Mengen, deren Elemente wir auflisten können (d.h. deren Elementen wir „Platznummern“ zuweisen können), heißen **abzählbar**. Dass das „Unendliche“ nicht leicht mit unseren Alltagsvorstellungen zu fassen ist, wird dadurch illustriert, dass zwar \mathbb{N} eine *echte*⁵ Teilmenge von \mathbb{Q} ist, die beiden Mengen aber dennoch in einem gewissen Sinn „gleich groß“ (die mathematische Bezeichnung dafür lautet *gleichmächtig*) sind!

Die reellen Zahlen lassen sich allerdings *nicht* in Form einer Liste aufzählen⁶, und das gleiche gilt für die irrationalen Zahlen – es gibt „zu viele“ von ihnen! Wir nennen derartige Mengen **überabzählbar**. In diesem Sinn gibt es *sehr viel mehr* reelle oder irrationale Zahlen als natürliche, ganze oder rationale. Die Menge der reellen Zahlen wird auch als „Kontinuum“ bezeichnet, und das Adjektiv „kontinuierlich“ bezieht sich meist auf sie. Für unsere Vorstellung bedeutet das, dass sie *alle* Punkte der Zahlengeraden umfasst, während die Menge der rationalen Zahlen, die wir ja ebenfalls auf der Zahlengeraden untergebracht haben, gewissermaßen „Lücken“ besitzt (allerdings keine Lücken von endlicher Größe), in denen die irrationalen Zahlen sitzen.

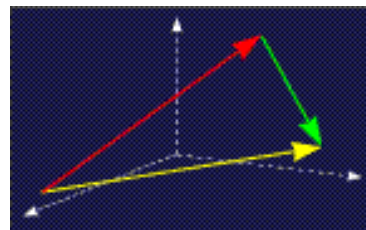
Dieses Skriptum wurde erstellt im April 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.

⁵ D.h. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ und $\mathbb{N} \neq \mathbb{Q}$. Siehe dazu das Skriptum *Mengen und Mengenoperationen*.

⁶ Wenn Sie einen verblüffend einfachen Beweis dieser Tatsache sehen wollen, hier ist er: Angenommen, wir könnten die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 (also jene, deren Dezimaldarstellung mit „0.“ beginnt) als Liste aufschreiben. Dann wählen Sie eine reelle Zahl in Dezimaldarstellung,

- deren erste Ziffer nach dem Dezimalpunkt nicht mit jener der ersten Zahl in der Liste übereinstimmt,
- deren zweite Ziffer nach dem Dezimalpunkt nicht mit jener der zweiten Zahl in der Liste übereinstimmt,
- deren dritte Ziffer nach dem Dezimalpunkt nicht mit jener der dritten Zahl in der Liste übereinstimmt,
- deren vierte Ziffer nach dem Dezimalpunkt nicht mit jener der vierten Zahl in der Liste übereinstimmt,
- usw.

Mit dieser Vorgangsweise erhalten Sie eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, die *nicht* in der Liste enthalten ist – was ein Widerspruch zur Annahme ist, dass die Liste *alle* reellen Zahlen zwischen 0 und 1 umfasst! Dieser wunderbare Beweis geht auf Georg Cantor (1845 – 1918) zurück, den Begründer der Mengenlehre.



Rechengesetze für die Grundrechnungsarten

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

In diesem Skriptum werden die Grundrechnungsarten für reelle Zahlen und deren wichtigste Rechenregeln besprochen.

1 Grundrechnungsarten

Innerhalb der Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen können wir zwei wichtige Rechenoperationen ausführen:

- Werden zwei reelle Zahlen addiert, so ist das Ergebnis (ihre **Summe**) wieder eine reelle Zahl. Die zwei Zahlen, die addiert werden, heißen **Summanden**. Die elementarste Rechenregel für die Addition, die wir (zunächst für die positiven natürlichen Zahlen) schon als Kinder lernen, besagt, dass es auf die Reihenfolge der Summanden nicht ankommt, dass also beispielsweise $2 + 3 = 3 + 2$ gilt. Ganz allgemein drücken wir diese Regel (das sogenannte „Kommutativgesetz der Addition“) in der Form $x + y = y + x$ aus, wobei x und y für beliebige reelle Zahlen stehen.
- Werden zwei reelle Zahlen multipliziert, so ist das Ergebnis (ihr **Produkt**) wieder eine reelle Zahl. Die zwei Zahlen, die multipliziert werden, heißen **Faktoren**. Um zwei konkrete Zahlen zu multiplizieren, schreiben wir einen Punkt zwischen die Faktoren, also beispielsweise $3 \cdot 7$. Bei einer Multiplikation mit Symbolen, die für reelle Zahlen stehen, kann dieser „Malpunkt“ weggelassen werden. Um etwa auszudrücken, dass es auf die Reihenfolge der Faktoren nicht ankommt (das sogenannte „Kommutativgesetz der Multiplikation“), können wir $x \cdot y = y \cdot x$ oder einfach $xy = yx$ schreiben.

Die Elemente 0 und 1 sind besondere Zahlen, denn für jede reelle Zahl x gilt

$$0 + x = x, \quad 1 \cdot x = x \quad \text{und} \quad 0 \cdot x = 0. \quad (1.1)$$

Wir sagen, dass (1.1) für jedes $x \in \mathbb{R}$ (für jedes Element der Menge \mathbb{R}) gilt. Etwas formalistischer könnte diese Aussage auch so ausgedrückt werden:

$$0 + x = x, \quad 1 \cdot x = x \quad \text{und} \quad 0 \cdot x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

wobei das Symbol \forall als „für alle“ ausgesprochen wird.

Um auszudrücken, dass eine Zahl mit sich selbst multipliziert wird, verwenden wir die Potenzschreibweise: 3^2 steht für $3 \cdot 3$, also 9, allgemein steht x^2 für $x \cdot x$, wobei die hochgestellte 2 als **Hochzahl** oder **Exponent** und x^2 als **Potenz** bezeichnet wird. Analog steht x^3 für $x \cdot x \cdot x$, x^4 für $x \cdot x \cdot x \cdot x$, usw.

Aus den Rechenoperationen der Addition und der Multiplikation entstehen zwei weitere – die Subtraktion und die Division:

- Die **Differenz** $12 - 7$ ist die Antwort auf die Frage „ $7 + \text{wieviel} = 12$?“.
- Der **Quotient** $\frac{21}{8}$ ist die Antwort auf die Frage „ $8 \cdot \text{wieviel} = 21$?“ oder, ein bisschen schlampig ausgedrückt, „Wie oft passt 8 in 21 hinein?“ und daher gleich dem Ergebnis der Division $21:8$. In der Mathematik macht man zwischen $21:8$ und $\frac{21}{8}$ keinen Unterschied. Beides stellt die gleiche reelle Zahl dar. Deren Dezimaldarstellung ist 2.625, und auch diese Form stellt die gleiche Zahl dar. Für viele Zwecke ist es am günstigsten, diese Zahl als Bruch $\frac{21}{8}$ anzugeben. Die 21 ist der **Zähler**, die 8 ist der **Nenner** des Bruchs.

Während die Differenz beliebiger reeller Zahlen gebildet werden kann, darf nur durch eine Zahl dividiert werden, die ungleich 0 ist¹. Der Nenner eines Bruchs muss also von 0 verschieden sein.

Die Operationen Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division bilden die **Grundrechnungsarten**. Man kann sie beliebig kombinieren, mit der einzigen Einschränkung, dass keine Division durch 0 vorkommen darf.

2 Rechengesetze für die Grundrechnungsarten

Einige wichtige Regeln im Umgang mit den Grundrechnungsarten wenden wir „automatisiert“ oder „instinktiv“ an. Es ist aber instruktiv, sie sich bewusst vor Augen zu halten.

Da gibt es einmal die beiden bereits erwähnten „Kommutativgesetze“: $x + y = y + x$ und $xy = yx$ für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$. Ihr Name (von lat. *commutare* „vertauschen“) drückt aus, dass wir die Summanden einer Summe oder die Faktoren eines Produkts vertauschen dürfen.

Weiters gelten zwei „Assoziativgesetze“: Um etwa $3 + 5 + 7$ zu berechnen, ist es egal, ob wir zuerst $3 + 5$ berechnen und dann 7 addieren oder ob wir zuerst $5 + 7$ berechnen und das Ergebnis zu 3 addieren. Dass bei beiden Verfahren das Gleiche herauskommt, drücken wir mit Klammern in der Form

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

aus. Dabei ist gemeint, dass die in Klammer stehende Operation zuerst ausgeführt wird. (2.1) drückt also aus, dass es für beliebige reelle Zahlen x , y und z egal ist, ob man zuerst $x + y$

¹ Der formale Grund, warum etwa der Bruch $\frac{21}{0}$ keinen Sinn macht, besteht darin, dass es keine reelle Zahl x gibt, für die $0 \cdot x = 21$ gilt.

berechnet und zum Ergebnis z addiert (linke Seite) oder ob man zuerst $y + z$ berechnet und dann die Summe mit x bildet (rechte Seite). Ein Beispiel mit konkreten Zahlen verdeutlicht, wie das gemeint ist:

$$\underbrace{\underbrace{(2+3)}_5 + 4}_9 = 2 + \underbrace{(3+4)}_7. \quad (2.2)$$

Neben diesem „Assoziativgesetz der Addition“ gibt es ein „Assoziativgesetz der Multiplikation“:

$$(x y) z = x (y z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

was beispielsweise bedeutet, dass es bei der Berechnung von $3 \cdot 5 \cdot 7$ egal ist, ob $3 \cdot 5$ mit 7 multipliziert (das entspricht der linken Seite) oder 3 mit $5 \cdot 7$ multipliziert wird (was der rechten Seite entspricht), also:

$$\underbrace{\underbrace{(3 \cdot 5)}_{15} \cdot 7}_{105} = 3 \cdot \underbrace{(5 \cdot 7)}_{35}_{105}. \quad (2.4)$$

Der Name dieser Gesetze (von lat. *associare* „vereinigen, verbinden“) rührt daher, dass es nicht darauf ankommt, welche Summanden bzw. Faktoren zuerst „verbunden“ werden, d.h. welche Addition bzw. Multiplikation zuerst ausgeführt wird.

Schließlich gilt das „Distributivgesetz“, das ausdrückt, wie die Addition und die Multiplikation zusammenspielen. Es lautet:

$$x (y + z) = x y + x z \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Prüfen wir es anhand des Beispiels $3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$ nach:

$$\underbrace{\underbrace{3 \cdot (4+5)}_9}_{27} = \underbrace{3 \cdot 4}_{12} + \underbrace{3 \cdot 5}_{15}_{27}. \quad (2.6)$$

Der Name des Distributivgesetzes (von lat. *distribuere* „verteilen“) rührt daher, dass die Multiplikation (im Fall von (2.5) die Operation „ x mal“, im Fall des Beispiels (2.6) die Operation „3 mal“) auf die Summanden einer Summe „verteilt“ wird. Wir verwenden es entweder, um einen Faktor (in (2.5) das x) in eine Summe „hineinzumultiplizieren“ oder – wenn wir es in umgekehrter Richtung lesen – um aus einer Summe der Form $x y + x z$ einen gemeinsamen Faktor x „herauszuheben“, also $x y + x z = x (y + z)$ zu rechnen.

Jetzt sind schon viele *Buchstaben* vorgekommen – rechnen wir hier mit Buchstaben statt mit Zahlen? Ja und nein! Jedes der bisher aufgetretenen Symbole x , y und z steht für eine *beliebige* reelle Zahl. Es ist gewissermaßen nur ein „Platzhalter“, den wir jederzeit durch eine konkrete Zahl ersetzen können. Die Verwendung von Symbolen hat den Vorteil, dass Rechengesetze völlig *allgemein* formuliert werden können. Versuchen Sie bitte, sich mit dieser Art des „Rechnens mit Buchstaben“ anzufreunden!

Aus den oben formulierten Rechengesetzen ergeben sich weitere Regeln. Einige betreffen das Rechnen mit negativen Zahlen. Wir fassen sie hier kurz zusammen:

- Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine **Gegenzahl**, die sich, sofern $x \neq 0$ ist, von x nur durch das Vorzeichen unterscheidet. Die Zahl 0 ist ihre eigene Gegenzahl. Die Gegenzahl von x kann als Differenz $0 - x$ gedeutet werden. Um von einer Zahl zu ihrer Gegenzahl überzugehen, stellen wir ihr ein Minuszeichen voran und bezeichnen die Gegenzahl einer reellen Zahl x mit $-x$. Beispiele: Die Gegenzahl von 5 ist -5 . Die Gegenzahl von -5 ist $-(-5)$, und das ist das Gleiche wie 5. Allgemein gilt $x + (-x) = 0$ und $-(-x) = x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Auf der Zahlengeraden erhält man die Gegenzahl durch Spiegelung am Nullpunkt. Klarerweise ist $-0 = 0$.
- **Wichtig:** Wenn in einem mathematischen Ausdruck das Symbol $-x$ vorkommt, so bezeichnet es nicht notwendigerweise eine negative Zahl. Steht x beispielsweise für -7 , dann ist $-x = 7$, also positiv!
- Eine Subtraktion kann als Addition dargestellt werden: $x - y = x + (-y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt also die Regel

$$\text{Subtraktion von } y = \text{Addition der Gegenzahl von } y. \quad (2.7)$$

- Eine reelle Zahl mit -1 zu multiplizieren bedeutet, zu ihrer Gegenzahl überzugehen, d.h. „ihr Vorzeichen umzudrehen“. Beispiele: $(-1) \cdot 5 = -5$ und $(-1) \cdot (-5) = 5$. Allgemein gilt $(-1) \cdot x = -x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.
- Das Produkt einer negativen Zahl mit einer positiven Zahl ist negativ. Beispiel: $(-3) \cdot 5 = -15$. Das Produkt zweier negativer Zahlen ist positiv. Beispiel: $(-3) \cdot (-5) = 15$.

Auch für das Dividieren folgen einige wichtige Regeln:

- Zu jeder von 0 verschiedenen reellen Zahl x gibt es einen **Kehrwert** $\frac{1}{x}$, der $\frac{1}{x} \cdot x = 1$ erfüllt. Die Zahl 1 ist ihr eigener Kehrwert.
- Damit können wir jede Division $\frac{x}{y}$ (mit $y \neq 0$) als Produkt $\frac{1}{y} \cdot x$ schreiben. Beispielsweise ist $\frac{21}{8}$ das Gleiche wie $\frac{1}{8} \cdot 21$ oder $21 \cdot \frac{1}{8}$. Merken Sie sich bitte die Regel:

$$\text{Division durch } y = \text{Multiplikation mit dem Kehrwert von } y. \quad (2.8)$$

- Der Kehrwert von -1 ist gleich -1 . Daher bewirkt eine Division durch -1 das Gleiche wie eine Multiplikation mit -1 . Ein Minuszeichen im Nenner eines Bruchs kann in den Zähler geschrieben werden oder auch vor den Bruch als Ganzes. So ist beispielsweise $\frac{21}{-8}$ das Gleiche wie $\frac{-21}{8}$ oder $-\frac{21}{8}$. Die letzte Form ist für viele Zwecke die praktischste: $-\frac{21}{8}$ ist die Gegenzahl von $\frac{21}{8}$.

3 Bruchrechnen mit reellen Zahlen

Da Brüche wie $\frac{3}{17}$ oder $\frac{13.6}{7.29}$ oder $-\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$ reelle Zahlen bezeichnen, gibt es spezielle Regeln dafür, wie Zahlen, die in dieser Form angegeben sind, addiert, multipliziert, subtrahiert und dividiert werden. Wir fassen die wichtigsten zusammen:

- Zwei Brüche mit dem gleichen Nenner werden gemäß der Regel

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{x+y}{z} \quad (3.1)$$

addiert. Ein Beispiel mit konkreten Zahlen: $\frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{3+5}{7} = \frac{8}{7}$. Die Rechnung „3 Siebentel plus 5 Siebentel ist gleich 8 Siebentel“ wird genauso durchgeführt wie eine Rechnung der Art „3 Äpfel plus 5 Äpfel ist gleich 8 Äpfel“.

- Zwei Brüche werden multipliziert, indem die Zähler multipliziert und die Nenner multipliziert werden:

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{a}{b} = \frac{xa}{yb}. \quad (3.2)$$

Beispiel: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$. Das kann auch in umgekehrter Richtung gelesen werden: Einen Bruch $\frac{xa}{yb}$ kann man als Produkt zweier Brüche $\frac{x}{y} \cdot \frac{a}{b}$ schreiben. Beispiel: $\frac{5 \cdot 17}{18 \cdot 7} = \frac{5}{18} \cdot \frac{17}{7}$.

- Brüche können **gekürzt** werden, indem in Zähler und Nenner ein gemeinsamer Faktor weggelassen wird:

$$\frac{xy}{xz} = \frac{y}{z}. \quad (3.3)$$

Beweis (mit Hilfe der vorigen Regel): $\frac{xy}{xz} = \frac{x}{x} \cdot \frac{y}{z} = 1 \cdot \frac{y}{z} = \frac{y}{z}$.

- Eine verwandte Operation ist das **Erweitern** eines Bruchs: Zähler und Nenner dürfen mit der gleichen (von 0 verschiedenen) Zahl multipliziert werden. Beispiel: $\frac{0.7}{1.5} = \frac{0.7 \cdot 10}{1.5 \cdot 10} = \frac{7}{15}$.
- Sollen zwei Brüche mit unterschiedlichem Nenner addiert werden, so müssen zuerst die Brüche durch Kürzen oder Erweitern so umgeformt werden, dass die Nenner übereinstimmen. Danach können die Brüche gemäß der ersten, oben angegebenen Regel addiert werden. Ein konkretes Beispiel, in dem alle Zähler und Nenner ganzzahlig sind:

$$\frac{7}{3} + \frac{5}{2} = \frac{7 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{14}{6} + \frac{15}{6} = \frac{29}{6}. \quad (3.4)$$

Hier wurde der erste Bruch mit 2 erweitert und der zweite mit 3, damit sich für beide der (gemeinsame) Nenner 6 (das Produkt der beiden ursprünglichen Nenner 3 und 2) ergibt. Beim Erweitern sollte so „sparsam“ wie möglich (d.h. mit so kleinen Erweiterungen wie möglich) vorgegangen werden. Beispiel (mit einer Subtraktion, für die alles ganz analog wie für die Addition funktioniert):

$$\frac{7}{10} - \frac{5}{6} = \frac{7 \cdot 3}{10 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{21}{30} - \frac{25}{30} = -\frac{4}{30} = -\frac{2}{15}. \quad (3.5)$$

Hier sind die Nenner zunächst 10 und 6. Da diese Zahlen beide gerade sind (also beide einen Faktor 2 enthalten), ist ihr „kleinstes gemeinsames Vielfaches“ nicht 60 (ihr Produkt), sondern 30. Dementsprechend wurden die Erweiterungen so gewählt, dass sich 30 als gemeinsamer Nenner ergibt. Zuletzt wurde noch durch 2 gekürzt.

- Um die Summe zweier Brüche allgemein darzustellen, d.h. ausgedrückt durch Variable, die für Zahlen stehen, von denen man keine besonderen Eigenschaften voraussetzen will, kann man die Regel

$$\frac{x}{y} + \frac{a}{b} = \frac{bx}{by} + \frac{ay}{by} = \frac{bx + ay}{by} \quad (3.6)$$

formulieren. In diesem Fall bietet sich nur das Produkt der Nenner y und b der gegebenen Brüche als gemeinsamer Nenner an, auf den sie durch Erweitern gebracht werden.

- Wollen Sie eine Zahl x , die nicht als Bruchzahl dargestellt ist, zu einem Bruch addieren, so können Sie sie als Bruch in der Form $\frac{x}{1}$ schreiben oder gleich in der gewünschten Weise erweitern. Beispiel: $3 + \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{5} + \frac{2}{5} = \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$.
- Den Kehrwert eines Bruchs erhalten wir, indem wir Zähler und Nenner vertauschen:

$$\frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{y}{x}. \quad (3.7)$$

Beispiel: Der Kehrwert von $\frac{2}{3}$ ist $\frac{3}{2}$. Beweis: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} = 1 \cdot 1 = 1$.

- Aufgrund der vorigen Regel zusammen mit (2.8) können zwei Brüche so dividiert werden:

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{a}{b}} = \left(\text{Kehrwert von } \frac{a}{b} \right) \frac{x}{y} = \frac{b}{a} \frac{x}{y} = \frac{xb}{ya}. \quad (3.8)$$

Die gleiche Regel kann gefunden werden, indem mit yb erweitert wird:

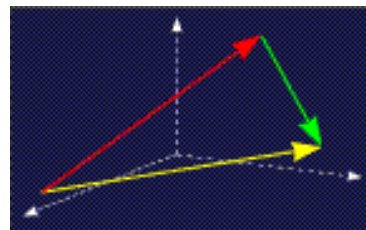
$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{a}{b}} = \frac{\frac{x}{y} yb}{\frac{a}{b} yb} = \frac{xb}{ya}. \quad (3.9)$$

Einen Bruch von Brüchen nennt man Doppelbruch. Die Regel (3.8) zur Berechnung von Doppelbrüchen kann auch in der Form „Produkt der Außenglieder durch Produkt der Innenglieder“ gelesen werden. Beachten Sie, dass der Zähler des Zählers (x) und der Nenner des Nenners (b) zuletzt in den Zähler kommen, während der Nenner des Zählers (y) und der Zähler des Nenners (a) in den Nenner kommen!

Bruchrechnen besteht genau genommen nur in einer konsequenten Anwendung dieser Regeln, obwohl es in der Praxis eine gewisse Übung erfordert. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn komplexere Kombinationen der Grundrechnungsarten in allgemeiner Form (unter Verwendung von Symbolen, deren Aufgabe es ist, Zahlen zu repräsentieren) gebildet werden. Derartige Ausdrücke umzuformen und zu vereinfachen, ist Aufgabe der Termrechnung.

Die Rechengesetze für die Grundrechnungsarten sind die Basis für praktisch alle weiterführenden Stoffkapitel des Mathematikunterrichts. Der Grund dafür liegt darin, dass wir es in der Mathematik sehr oft mit *Aussagen über reelle Zahlen* zu tun haben. Auch wenn es den Anschein hat, dass in diesem Fach oft mit Buchstaben (Symbolen) gerechnet wird, so sind diese Symbole doch in vielen Fällen nichts anderes als Platzhalter für Zahlen.

Dieses Skriptum wurde erstellt im April 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2021 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Die Ordnung der reellen Zahlen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

In diesem Skriptum werden die durch die Beziehungen „kleiner“, „größer“, „kleiner-gleich“ und „größer-gleich“ definierte Ordnung der reellen Zahlen und die Charakterisierung von Intervallen besprochen.

1 Kleiner und größer, kleiner-gleich und größer-gleich

Aus dem alltäglichen Umgang mit Zahlen ist uns vertraut, dass von zwei unterschiedlichen Zahlen immer eine die kleinere und die andere die größere ist. Ein Blick auf eine Skizze der Zahlengeraden (Abbildung 1) zeigt diese „Ordnung“ der Zahlen in geometrischer Darstellung.

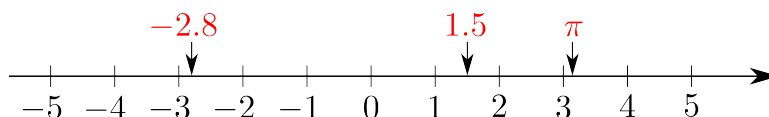


Abbildung 1: Skizze der Zahlengeraden mit einigen ausgewählten reellen Zahlenwerten.

Eine reelle Zahl ist kleiner (größer) als eine andere, wenn sie auf der Zahlengeraden weiter links (rechts) liegt als jene. Ist eine reelle Zahl x kleiner als eine andere reelle Zahl y , so schreiben wir dies in der Form $x < y$ an. Um auszudrücken, dass y größer als x ist, schreiben wir $y > x$. Beide Aussagen sind gleichwertig: $x < y$ gilt genau dann, wenn $y > x$ gilt (eine Aussage, die formal auch in der Form $x < y \iff y > x$ angeschrieben werden kann; das Symbol \iff wird als „genau dann, wenn“ gelesen).

Beachten Sie, dass die Regel „kleiner = weiter links auf der Zahlengeraden“ auch für negative Zahlen gilt! So ist beispielsweise $-5 < -3$. Es ist ja auch -5°C eine niedrigere Temperatur als -3°C , obwohl der Betrag¹ von -3 (also 3) kleiner als der Betrag von -5 (also 5) ist.

¹ Mehr über den Betrag reeller Zahlen lesen Sie im Skriptum *Absolutbetrag*.

Manchmal ist von einer reellen Zahl x nur bekannt (oder vorausgesetzt), dass sie *nicht größer* als eine Zahl y ist. Sie ist dann entweder kleiner oder gleich y . Dies schreiben wir in der Form $x \leq y$ („ x kleiner-gleich y “). Ist hingegen von der Zahl x nur bekannt (oder vorausgesetzt), dass sie *nicht kleiner* als eine Zahl y ist, so ist x entweder größer oder gleich y . Dies schreiben wir in der Form $x \geq y$ („ x größer-gleich y “). Beachten Sie, dass „ $5 \leq 5$ “ eine wahre Aussage ist, während die Aussage „ $5 < 5$ “ falsch ist. Die Aussagen $x \leq y$ und $y \geq x$ sind gleichwertig: $x \leq y \iff y \geq x$.

Gilt für zwei reelle Zahlen $x < y$, so gilt für ihre Gegenzahlen² $-x > -y$, d.h. eine analoge Beziehung, aber mit „umgedrehtem“ Ordnungssymbol. Das lässt sich geometrisch dadurch verstehen, dass der Übergang von einer Zahl x zu ihrer Gegenzahl $-x$ auf der Zahlengeraden durch eine Spiegelung am Nullpunkt bewerkstelligt wird (und zwar gleichgültig, welches Vorzeichen x hat). Durch eine Spiegelung wird die Relation „liegt links von“ in „liegt rechts von“ umgewandelt (und umgekehrt). In analoger Weise folgt aus $x \leq y$, dass $-x \geq -y$ gilt.

2 Intervalle

Bei der Lösung mathematischer Problemstellungen kommt es oft vor, dass wir eine Zahl nicht genau kennen, aber von ihr wissen, dass sie in einem bestimmten Bereich der Menge \mathbb{R} liegt, beispielsweise, dass sie größer als -3 , aber kleiner als 5 ist. Von einer anderen Zahl könnten wir wissen, dass sie größer-gleich $-\frac{1}{2}$, aber kleiner als 1 ist. Derartige Teilmengen von \mathbb{R} nennen wir **Intervalle**. Ein Intervall können wir uns als einen auf der Zahlengeraden liegenden, zusammenhängenden Bereich (also einen Bereich ohne „Lücken“) vorstellen. Dabei unterscheiden wir verschiedene Typen von Intervallen. Ein Intervall heißt **beschränkt**, wenn es nicht bis ins Unendliche reicht, ansonsten heißt es **unbeschränkt**. Folgende vier Formen von beschränkten Intervallen sind möglich:

- Sind a und b reelle Zahlen und ist $a < b$, so bezeichnen wir die Menge aller reellen Zahlen, die größer als a und kleiner als b sind, als (beschränktes) **offenes** Intervall und schreiben es in der Form³

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad (2.1)$$

an. Die Schreibweise $a < x < b$ ist ein Kürzel für „ $a < x$ und $x < b$ “. So ist beispielsweise $(-3, 5)$ die Menge aller reellen Zahlen x , für die $-3 < x < 5$ gilt. Die Zahlen -3 und 5 (die untere und die obere Intervallgrenze) sind *keine* Elemente dieser Menge, wohl aber alle reellen Zahlen dazwischen.

Achtung: Im Intervall $(-3, 5)$ liegen nicht nur die ganzen Zahlen $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ und 4 , sondern auch alle *nicht-ganzen* reellen Zahlen zwischen -3 und 5 , also beispielsweise $-\frac{1}{7}$, 1.5 und π !

² Für jede reelle Zahl $x \neq 0$ bezeichnen wir $-x$ als ihre Gegenzahl. -5 ist die Gegenzahl von 5 , und 5 ist die Gegenzahl von -5 . Die Zahl 0 ist ihre eigene Gegenzahl.

³ Eine andere, ebenfalls gebräuchliche Schreibweise dafür ist $]a, b[$.

- Sind a und b reelle Zahlen und ist $a \leq b$, so bezeichnen wir die Menge aller reellen Zahlen, die größer-gleich a und kleiner-gleich b sind, als (beschränktes) **abgeschlossenes** Intervall und schreiben es in der Form

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad (2.2)$$

an. So ist beispielsweise $[2, 8]$ die Menge aller reellen Zahlen x , für die $2 \leq x \leq 8$ gilt. Die Zahlen 2 und 8 (die untere und die obere Intervallgrenze) sind Elemente dieser Menge, und alle Zahlen dazwischen ebenfalls. Im Extremfall sind die Intervallgrenzen gleich – dann enthält das entsprechende Intervall (beispielsweise $[3, 3]$) nur eine einzige Zahl⁴.

- Ein Intervall kann auch **halboffen** sein. Beschränkte halboffene Intervalle sind für $a < b$ von der Form

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad (2.3)$$

oder

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}. \quad (2.4)$$

Beispielsweise ist $[-3, 6)$ die Menge aller reellen Zahlen x , für die $-3 \leq x < 6$ gilt. -3 ist Element dieser Menge, 6 nicht, alle reellen Zahlen dazwischen aber schon. Und $(-\frac{1}{2}, \pi]$ ist die Menge aller reellen Zahlen x , für die $-\frac{1}{2} < x \leq \pi$ gilt. $-\frac{1}{2}$ ist kein Element dieser Menge, π und alle reellen Zahlen dazwischen aber schon.

Ob ein beschränktes Intervall offen, abgeschlossen oder halboffen ist, hängt nur davon ab, welche der Intervallgrenzen dazu genommen werden (charakterisiert durch ein \leq) und welche nicht (charakterisiert durch ein $<$).

Beschränkte Intervalle können auf der Zahlengeraden dargestellt werden, wobei eine Intervallgrenze üblicherweise als voll ausgemalter Kreis gezeichnet wird, wenn sie zum Intervall gehört, und als offener Kreis, wenn sie nicht dazu gehört:

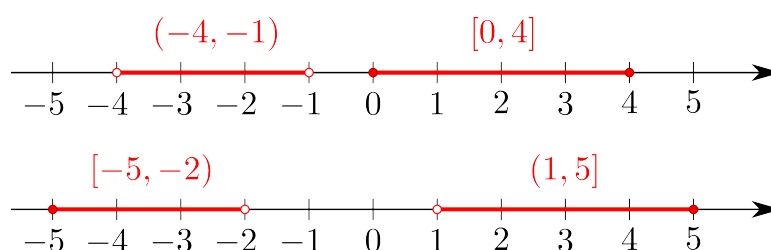


Abbildung 2: Vier beschränkte Intervalle: Das offene Intervall $(-4, -1)$, das abgeschlossene Intervall $[0, 4]$ und die halboffenen Intervalle $[-5, -2)$ und $(1, 5]$.

Ein beschränktes Intervall hat eine **Länge**. Sie kann aus einer Skizze abgelesen oder als Differenz „obere Grenze minus untere Grenze“ berechnet werden. Beispielsweise hat das Intervall $(-4, -1)$ die Länge 3, wie ein Blick auf Abbildung 2 oder die Rechnung $-1 - (-4) = -1 + 4 = 3$ zeigt.

⁴ Da es in gewisser Weise Geschmackssache ist, ob man so etwas noch als Intervall bezeichnen soll, heißt es „Punktervall“ oder „entartetes Intervall“.

Neben den beschränkten Intervallen gibt es noch andere zusammenhängende Teilmengen von \mathbb{R} , nämlich solche, die sich „bis ins Unendliche“ erstrecken, die unbeschränkten Intervalle:

- Für jede reelle Zahl a legen wir folgende Bezeichnungen fest:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \quad (2.5)$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \quad (2.6)$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \quad (2.7)$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \quad (2.8)$$

Das hier verwendete Symbol ∞ steht in der Mathematik generell für „unendlich“ und wird auch in anderen Zusammenhängen verwendet. Die Bedingung $a < x$ lässt sich natürlich auch als $x > a$ lesen und die Bedingung $a \leq x$ als $x \geq a$. Intervalle der Form $(-\infty, a)$ und (a, ∞) werden als offene Intervalle betrachtet, Intervalle der Form $(-\infty, a]$ und $[a, \infty)$ als abgeschlossene Intervalle⁵. Abbildung 3 zeigt anhand zweier Beispiele, wie man sich derartige Intervalle auf der Zahlengeraden vorstellen kann:

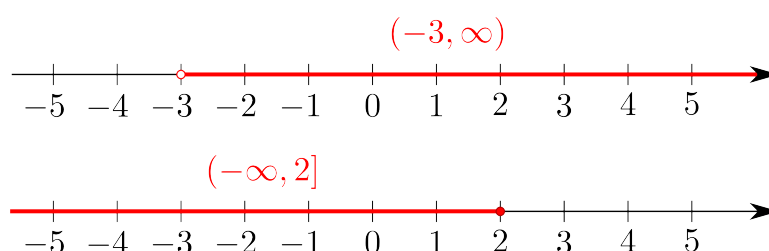


Abbildung 3: Zwei unbeschränkte Intervalle. $(-3, \infty)$ können wir genauer als ein *nach oben unbeschränktes* Intervall bezeichnen, $(-\infty, 2]$ als ein *nach unten unbeschränktes* Intervall. Das erste ist offen, das zweite abgeschlossen.

- Zwei Spezialfälle, die eigene Bezeichnungen bekommen, sind die Menge

$$\mathbb{R}^+ = (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \quad (2.9)$$

der positiven reellen Zahlen und die Menge

$$\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \quad (2.10)$$

der nichtnegativen reellen Zahlen.

- Schließlich kann die Menge \mathbb{R} selbst als Intervall $(-\infty, \infty)$ aufgefasst werden.

⁵ Hinter diesen Bezeichnungen steht ein Konzept, das über die Schulmathematik hinausgeht: Eine Teilmenge M von \mathbb{R} wird als *offen* bezeichnet, wenn es für jedes ihrer Elemente x ein beschränktes offenes Intervall gibt, das x als Element enthält und eine Teilmenge von M ist. Eine Teilmenge A von \mathbb{R} wird als *abgeschlossen* bezeichnet, wenn ihr Komplement (d.h. die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, die *kein* Element von A sind) offen ist. Gemäß dieser Festlegung ist beispielsweise das Intervall $(-\infty, 3)$ offen, das Intervall $(-\infty, 3]$ jedoch abgeschlossen. Dass man für letzteres nicht $[-\infty, 3]$ schreibt, liegt daran, dass ∞ keine Zahl ist. Die leere Menge $\{\}$ und die Menge $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ sind in diesem Sinn sowohl offen als auch abgeschlossen.

Wie mit anderen Mengen auch, können mit Intervallen Durchschnitte und Vereinigungen gebildet werden. Dabei ist zu beachten:

- Wenn wir von einer reellen Zahl wissen, dass sie gleichzeitig in zwei (bekannten) Intervallen liegt, so bedeutet das: Sie liegt in der **Durchschnittsmenge** der beiden Intervalle. Die Durchschnittsmenge zweier Intervalle ist entweder leer oder wieder ein Intervall und kann entweder durch logisches Überlegen oder durch eine Skizze (oder beides) ermittelt werden. Beispielsweise ist $(-3, 4) \cap [-2, 5]$ die Menge aller reellen Zahlen x , für die sowohl $-3 < x < 4$ als auch $-2 \leq x < 5$ gilt. Finden Sie heraus, um welches Intervall es sich handelt! Die Lösung ist:

$$(-3, 4) \cap [-2, 5] = [-2, 4)$$

- Wenn wir von einer Zahl wissen, dass sie *zumindest* in *einem* von zwei (bekannten) Intervallen liegt, so bedeutet das: Sie liegt in der **Vereinigungsmenge** der beiden Intervalle. Die Vereinigungsmenge zweier Intervalle ist nicht notwendigerweise ein Intervall, denn sie muss nicht zusammenhängend sein. So besteht beispielsweise die Menge $(-4, -1) \cup [0, 4]$ aus zwei getrennten Teilen – wie auch ein Blick auf Abbildung 2 zeigt, in der beide Intervalle $(-4, -1)$ und $[0, 4]$ dargestellt sind.

Manchmal möchte man einer reellen Zahl x ein offenes Intervall als „Umgebung“ geben, die sich auf der Zahlengeraden von x aus gleich weit nach links und rechts erstreckt. Ein solches Intervall ist von der Form

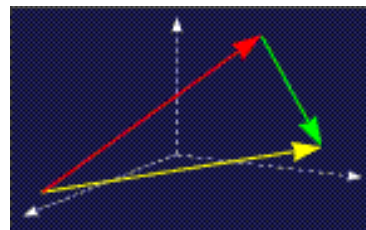
$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon), \quad (2.11)$$

wobei ε eine positive reelle Zahl ist. Von x aus reicht es eine Strecke ε nach links und eine Strecke ε nach rechts. Seine Länge ist 2ε .

Intervalle dienen in der Mathematik und ihren Anwendungen vielfältigen Zwecken. Sie können einen Unsicherheitsbereich angeben (d.h. einen Bereich, in dem eine Größe, deren genauen Wert wir nicht kennen, liegt), sie können einen Bereich angeben, in dem eine gewisse Größe (z.B. ein eingesetztes Kapital) liegen muss, um einen bestimmten Effekt zu erzielen, und sie treten als Lösungsmengen von Ungleichungen auf⁶. Weiters helfen sie uns, theoretische Konzepte, die mit dem Begriff des Unendlichen zusammenhängen, mathematisch präzise zu formulieren. Wenn es um das „unendlich Kleine“ geht, werden Intervalle der Form (2.11) benötigt, wobei ε zwar positiv ist, aber *beliebig* klein sein darf.

Dieses Skriptum wurde erstellt im April 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.

⁶ Siehe dazu das Skriptum *Ungleichungen*.



Absolutbetrag

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

In diesem Skriptum werden das Konzept des Absolutbetrags einer reellen Zahl und der Abstand von Zahlen als Absolutbetrag ihrer Differenz besprochen.

1 Absolutbetrag als „Abstand vom Nullpunkt“

Werden die reellen Zahlen geometrisch auf der Zahlengeraden dargestellt, so liegen die negativen Zahlen links vom Nullpunkt und die positiven Zahlen rechts vom Nullpunkt.

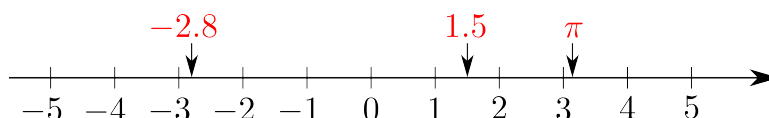


Abbildung 1: Skizze der Zahlengeraden mit einigen ausgewählten reellen Zahlenwerten.

Den **Absolutbetrag** (kurz **Betrag**) einer reellen Zahl können wir uns zunächst als ihren *Abstand vom Nullpunkt* auf der Zahlengeraden vorstellen. Den Absolutbetrag einer reellen Zahl x schreiben wir als $|x|$. Der Absolutbetrag von 0 ist gleich 0 (da der Nullpunkt den Abstand 0 von sich selbst hat), d.h.

$$|0| = 0. \quad (1.1)$$

Der Absolutbetrag von 5 ist gleich 5, d.h.

$$|5| = 5. \quad (1.2)$$

Der Absolutbetrag von -5 ist ebenfalls gleich 5, d.h.

$$|-5| = 5. \quad (1.3)$$

Der Absolutbetrag einer reellen Zahl kann niemals negativ sein, und die einzige reelle Zahl, deren Absolutbetrag gleich 0 ist, ist 0 selbst. Für jede andere reelle Zahl gehen wir so vor: Ist

x positiv, so ist der Absolutbetrag von x gleich x . Ist x negativ, so hat x in der Darstellung als Zahl ein negatives Vorzeichen, und um den Absolutbetrag zu erhalten, lassen wir dieses einfach weg.

Auf diese Weise gibt uns der Absolutbetrag Auskunft darüber, wie nahe eine reelle Zahl auf der Zahlengeraden dem Nullpunkt ist, wobei uns egal ist, ob es sich um eine positive Zahl (rechts vom Nullpunkt) oder um eine negative Zahl (links vom Nullpunkt) handelt.

2 Formale Definition

Die Formulierung „Vorzeichen weglassen“ bei der Ermittlung des Absolutbetrags einer negativen Zahl ist nicht sehr befriedigend. Um diese Vorgangsweise stattdessen durch die Grundrechnungsarten auszudrücken, bemerken wir, dass die „Gegenzahl“¹ einer positiven Zahl negativ und die „Gegenzahl“ einer negativen Zahl positiv ist. Daraus folgt, dass der Absolutbetrag einer negativen Zahl x gleich $-x$ ist:

$$\text{Ist } x < 0, \text{ so ist } |x| = -x. \quad (2.1)$$

Lassen Sie sich vom Minuszeichen in dieser Aussage nicht verwirren! Der Absolutbetrag kann nie negativ sein, auch nicht, wenn er in dieser Weise angeschrieben wird. Nehmen wir als Beispiel für x die Zahl -5 . Ihre „Gegenzahl“ ist $-(-5)$, also gleich 5 , und das ist auch der Absolutbetrag von -5 . Da in (2.1) vorausgesetzt ist, dass die Zahl x negativ ist, trägt sie in der Darstellung als Zahl ein Minuszeichen, das in (2.1) nicht sichtbar ist! Für $x = -5$ können wir (2.1) in der folgenden Weise anwenden:

$$\text{Da } -5 < 0 \text{ ist, gilt } |-5| = -(-5) = 5. \quad (2.2)$$

Um nun den Absolutbetrag x einer beliebigen reellen Zahl formal zu definieren, unterscheiden wir die zwei Fälle $x \geq 0$ und $x < 0$. Falls $x \geq 0$ ist, ist $|x|$ gleich x . Falls $x < 0$ ist, ist $|x|$ gleich $-x$. Das schreiben wir in der folgenden Form an:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Damit ist der Absolutbetrag offiziell und in der gebührenden mathematischen Strenge definiert.

Die Definition (2.3) gilt auch dann, wenn x durch einen Ausdruck ersetzt wird, der seinerseits reelle Werte annehmen kann. So gilt beispielsweise für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 & \text{wenn } 2x - 3 \geq 0 \\ -(2x - 3) & \text{wenn } 2x - 3 < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Das können wir vereinfachen, indem wir (auch ohne viel Theorie) bedenken,

¹ Für jede reelle Zahl $x \neq 0$ bezeichnen wir $-x$ als ihre „Gegenzahl“. -5 ist die „Gegenzahl“ von 5 , und 5 ist die „Gegenzahl“ von -5 . Die Zahl 0 ist, wenn man so will, ihre eigene Gegenzahl. Siehe dazu das Skriptum *Rechengesetze für die Grundrechnungsarten*.

- dass $-(2x - 3) = -2x + 3$ ist,
- dass $2x - 3 \geq 0$ genau dann gilt, wenn $2x \geq 3$ und damit $x \geq \frac{3}{2}$ ist
- und dass $2x - 3 < 0$ genau dann gilt, wenn $2x < 3$ und damit $x < \frac{3}{2}$ ist.

Damit nimmt (2.4) die übersichtlichere Form

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 & \text{wenn } x \geq \frac{3}{2} \\ -2x + 3 & \text{wenn } x < \frac{3}{2} \end{cases} \quad (2.5)$$

an. Beim Lösen bestimmter Typen von Gleichungen und Ungleichungen ist es hilfreich, die Abfolge von Schritten

(2.3) [sich an die Definition des Absolutbetrags erinnern]
 \rightarrow (2.4) [die Definition auf einen Ausdruck anwenden]
 \rightarrow (2.5) [vereinfachen]

flüssig durchführen zu können.

3 Abstand als Absolutbetrag einer Differenz

Eine besonders wichtige Anwendung dieses Konzepts ergibt sich, wenn wir nach dem *Abstand zweier Zahlen* auf der Zahlengeraden fragen. Seien also a und b zwei unterschiedliche reelle Zahlen. Ihr Abstand ist gleich der Differenz „größere Zahl minus kleinere Zahl“. Aber welche ist die größere, welche die kleinere Zahl? In manchen Fällen wissen wir das nicht oder wollen es nicht voraussetzen. Wenn wir $a - b$ und $b - a$ berechnen, so ist eine dieser beiden Differenzen positiv und die andere negativ. Aber da sie sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, haben sie den gleichen Absolutbetrag, und dieser ist gleich der positiven der beiden Differenzen. Damit ist das Problem gelöst: Der gesuchte Abstand ist $|a - b|$ (oder $|b - a|$, was das Gleiche ist)!

Der **Abstand** zweier Zahlen auf der Zahlengeraden ist daher gleich dem **Absolutbetrag ihrer Differenz**, wobei es gleichgültig ist, welche der beiden Zahlen wir von welcher subtrahieren. Betrachten wir ein Beispiel: Den Abstand der Zahlen -3 und 4 können wir entweder in der Form

$$|-3 - 4| = |-7| = 7 \quad (3.1)$$

oder in der Form

$$|4 - (-3)| = |7| = 7 \quad (3.2)$$

berechnen. Ein Blick auf eine Skizze der Zahlengeraden bestätigt dieses Ergebnis:

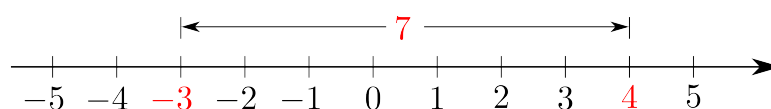


Abbildung 2: Der Abstand der Zahlen -3 und 4 auf der Zahlengeraden ist gleich 7.

Das Konzept des Abstands von Zahlen ist insbesondere dann wichtig, wenn von zwei Zahlen gesagt werden soll, dass sie nahe beieinander liegen (egal, welche von ihnen die größere ist).

Um beispielsweise auszudrücken, dass der Abstand der Zahlen x und y höchstens $\frac{1}{10}$ beträgt, schreiben wir einfach

$$|x - y| \leq \frac{1}{10}. \quad (3.3)$$

Ein anderes Beispiel: Die Menge aller reellen Zahlen x , deren Abstand von der Zahl 5 kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, kann formal beschrieben werden als Menge aller $x \in \mathbb{R}$, die

$$|x - 5| < \frac{1}{2} \quad (3.4)$$

erfüllen. Das sind genau jene Zahlen, für die $\frac{9}{2} < x < \frac{11}{2}$ (oder, in Dezimaldarstellung geschrieben, $4.5 < x < 5.5$) gilt.

Die Verwendung des Absolutbetrags erlaubt es, derartige Aussagen in kompakter Weise zu formulieren, anzuschreiben, mit ihnen zu argumentieren und zu rechnen, ohne sich im Einzelnen um die Vorzeichen kümmern zu müssen, auf die es ohnehin nicht ankommt. Müssen in einer praktischen Anwendung viele Bedingungen vom Typ (3.3) oder (3.4) überprüft werden, so können wir Computerprogramme anweisen, diese Dinge für uns zu erledigen, sofern wir ihnen einmal beigebracht haben, wie sie den Absolutbetrag einer Zahl berechnen.

4 Rechengesetze und Eigenschaften

Zuletzt schreiben wir noch einige den Absolutbetrag betreffende Rechengesetze und Eigenschaften formal an. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x y| = |x| |y| \quad (4.1)$$

und, sofern $y \neq 0$ ist,

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}. \quad (4.2)$$

Weiters gilt²

$$|-x| = |x|. \quad (4.3)$$

Ist $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $a \in \mathbb{R}$ nichtnegativ (also $a \geq 0$), so gilt

$$|a x| = a |x|. \quad (4.4)$$

(Beispielsweise gilt stets $|2x| = 2|x|$.) Weiters gilt für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ die **Dreiecksungleichung**

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad (4.5)$$

² Bitte machen Sie sich klar, dass die Formel $|-x| = x$ *nicht* für alle reellen Zahlen x gilt! Sie gilt nur dann, wenn $x \geq 0$ ist.

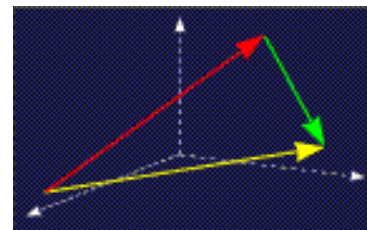
Zuletzt noch ein kleiner Vorgriff auf den Wurzelbegriff³: Für beliebige $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sqrt{x^2} = |x|. \quad (4.6)$$

Der Absolutbetrag auf der rechten Seite ist hier nötig, wenn x negativ ist. Für das Beispiel $x = -3$ sieht das so aus: Es gilt $(-3)^2 = 9$, und die Wurzel aus 9 ist 3, was gleich dem Betrag von -3 ist, kurz angeschrieben also: $\sqrt{(-3)^2} = |-3|$.

Dieses Skriptum wurde erstellt im April 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.

³ Siehe dazu das Skriptum *Wurzeln*.



Potenzen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

In diesem Skriptum wird besprochen, was Potenzen sind, wie der Potenzbegriff auf beliebige rationale Exponenten ausgedehnt werden kann und welche grundlegenden Rechenregeln für Potenzen gelten.

1 Potenzen mit positiven natürlichen Exponenten

Manchmal müssen wir eine Zahl mit sich selbst multiplizieren. So ist beispielsweise der Flächeninhalt eines Quadrats mit Seitenlänge a durch $a \cdot a$ gegeben, was wir kurz als a^2 schreiben. Und hier haben wir auch gleich den Grund, warum a^2 als „ a Quadrat“ ausgesprochen wird. a^2 ist eine **Potenz**, a ist die **Basis** und die hochgestellte 2 der **Exponent** (oder die **Hochzahl**). Analog können wir höhere Potenzen bilden: $a^3 = a \cdot a \cdot a$ („ a hoch 3“ oder „ a zur dritten“, was eine Abkürzung von „ a zur dritten Potenz erhoben“ ist), a^4 („ a hoch 4“), usw. Allgemein steht $a^m = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ für das Produkt aus m Faktoren a , wenn $m \in \mathbb{N}^*$. Die Basis selbst können wir als a^1 schreiben, d.h. $a^1 = a$.

Aus den Rechenregeln für die Multiplikation folgt, dass das Quadrat einer reellen Zahl nie negativ sein kann:

$$a^2 \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

So ist beispielsweise $0^2 = 0$, $5^2 = 25$ und $(-5)^2 = 25$. Analog kann auch eine vierte Potenz (d.h. a^4) nie negativ sein, und das gilt generell für jede Potenz mit einem *geraden* Exponenten. Bei einer Potenz mit einem *ungeraden* Exponenten hingegen bleibt das Vorzeichen erhalten. So ist etwa $5^3 = 125$ und $(-5)^3 = -125$.

Um **Produkte von Potenzen** zu ermitteln, gibt es eine einfache Regel. So ist etwa $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$ (2^7 ist das Produkt aus sieben Faktoren, die alle gleich 2 sind¹). Allgemein gilt

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad (1.2)$$

¹ Man sagt dann auch „2 wird sieben mal mit sich selbst multipliziert“, aber das ist ein bisschen schlampig, weil 2 genau genommen nur sechs mal mit sich selbst multipliziert wird.

für beliebige reelle Zahlen a . Ebenso können **Potenzen von Potenzen** leicht ermittelt werden. So ist etwa $(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3$, besitzt also insgesamt 12 mal den Faktor 2, woraus wir schließen $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$. Allgemein gilt

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (1.3)$$

für beliebige reelle Zahlen a . Die Exponenten m und n in den Beziehungen (1.2) und (1.3) sind zunächst beliebige positive natürliche Zahlen, aber es stellt sich heraus, dass es sehr sinnvoll ist, auch andere Exponenten zuzulassen.

2 Erweiterung des Potenzbegriffs

Nachdem wir also festgelegt haben, dass 5^3 das Produkt aus drei Faktoren ist, die alle gleich 5 sind, stellen wir die Frage, ob es einen Sinn macht, ein Produkt aus „null Faktoren“ zu bilden, also 5^0 zu schreiben. Das ist tatsächlich der Fall, wenn wir verlangen, dass die schöne Regel (1.2) auch dann gelten soll, wenn für m und n die Zahl 0 zugelassen wird: Mit $a = 5$, $m = 1$ und $n = 0$ lautet (1.2) einfach $5^1 \cdot 5^0 = 5^{1+0} = 5^1$, also $5 \cdot 5^0 = 5$. Das ist nur möglich, wenn $5^0 = 1$ ist. Allgemein vereinbaren wir

$$a^0 = 1, \quad (2.1)$$

schränken das aber vorsichtshalber auf reelle Zahlen $a \neq 0$ ein². Mit dieser Definition gelten (1.2) und (1.3) für alle $m, n \in \mathbb{N}$ (also einschließlich der 0) und für alle $a \neq 0$.

Jetzt gehen wir einen Schritt weiter und fragen, ob es Sinn macht, in (1.2) und (1.3) für m und n auch negative ganze Zahlen zuzulassen. Dann müsste beispielsweise $5^1 \cdot 5^{-1} = 5^{1+(-1)} = 5^0 = 1$ gelten, was bedeutet $5^{-1} = \frac{1}{5}$. Eine Potenz mit Exponent -1 wäre dann einfach der **Kehrwert**³ der Basis. Daher legen wir allgemein fest:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad (2.2)$$

für alle $a \neq 0$. (Die Einschränkung auf von 0 verschiedene Basen a rührt jetzt daher, dass 0 keinen Kehrwert besitzt.) Probieren wir auch andere negative Exponenten aus! So wäre beispielsweise $5^3 \cdot 5^{-3} = 5^0 = 1$, also $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$. Allgemein wird festgelegt:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (2.3)$$

für alle $a \neq 0$, wobei n eine beliebige positive natürliche Zahl sein kann. Mit dieser Festlegung gelten die Regeln (1.2) und (1.3) für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ und für alle $a \neq 0$.

Schließlich fragen wir, ob wir auch rationale Zahlen (also Brüche von ganzen Zahlen) als Exponenten verwenden können. Macht so etwas wie $5^{1/2}$ Sinn? Wieder lassen wir uns von der Idee leiten, die Rechengesetze (1.2) und (1.3) beizubehalten. Aus (1.3) müsste dann folgen

² In manchen mathematischen Texten wird $0^0 = 1$ gesetzt. Warum das nicht unproblematisch ist, wird etwas später klar, siehe Fußnote 5.

³ Der Kehrwert einer reellen Zahl $x \neq 0$ ist $\frac{1}{x}$.

$(5^{1/2})^2 = 5^{(1/2) \cdot 2} = 5^1 = 5$, d.h. $5^{1/2}$ wäre eine Zahl, deren Quadrat gleich 5 ist. So eine Zahl bezeichnen wir als **Quadratwurzel** (oder kurz **Wurzel**) aus 5, angeschrieben in der Form $\sqrt{5}$. So legen wir also fest

$$a^{1/2} = \sqrt{a} \quad (2.4)$$

für alle $a \geq 0$. Die Einschränkung auf nichtnegative Basen a rührt daher, dass negative reelle Zahlen keine Wurzeln besitzen: Da das Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ sein kann, macht $(-5)^{1/2}$ keinen Sinn, denn dann müsste das Quadrat von $(-5)^{1/2}$ gleich -5 sein – ein Ding der Unmöglichkeit⁴. Ein weiteres Beispiel ist $(5^{1/3})^3 = 5^1 = 5$, d.h. $5^{1/3}$ ist die dritte Wurzel aus 5, angeschrieben in der Form $\sqrt[3]{5}$. Generell definieren wir

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \quad (2.5)$$

für alle $a \geq 0$, wobei n eine beliebige positive natürliche Zahl ist⁵. Da auf der rechten Seite von (1.2) im Exponenten die Summe $m + n$ steht, müssen wir auch Exponenten der Form $1 + \frac{1}{2}$, also $\frac{3}{2}$, und in weiterer Folge beliebige rationale Zahlen als Exponenten zulassen. Allgemein wird für natürliche Zahlen m und n mit $m \geq 0$ und $n > 0$ festgelegt

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad (2.6)$$

$$a^{-m/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m} \quad (2.7)$$

für alle $a > 0$. (Das jeweils erste Gleichheitszeichen in diesen beiden Beziehungen definiert, was unter der Schreibweise $a^{m/n}$ bzw. $a^{-m/n}$ zu verstehen ist, die danach angegebene Gleichheit gilt unabhängig davon.)

Insgesamt haben wir damit a^q für beliebige Basen $a > 0$ und Exponenten $q \in \mathbb{Q}$ definiert, wobei in manchen Fällen die Einschränkung $a > 0$ gelockert werden kann: Für $q > 0$ sind alle $a \geq 0$ zugelassen, für ganzzahlige $q \leq 0$ sind alle $a \neq 0$ zugelassen, und für ganzzahlige $q > 0$ alle reellen a . In jedem Fall gelten die Rechengesetze

$$a^p a^q = a^{p+q} \quad \text{und} \quad (a^p)^q = a^{p \cdot q}, \quad (2.8)$$

da wir uns ja bei der schrittweisen Erweiterung des Potenzbegriffs daran orientiert haben, (1.2) und (1.3) beizubehalten.

In weiterer Folge ist es sogar möglich, Potenzen für *beliebige reelle Hochzahlen* zu definieren, doch das gehört nicht in dieses einführende Kapitel⁶.

⁴ Zumindest, wenn man die Menge der reellen Zahlen zugrunde legt. Es gibt einen erweiterten Zahlbegriff – die komplexen Zahlen –, der zulässt, dass ein Quadrat negativ ist. Wir beschränken uns aber hier auf die reellen Zahlen.

⁵ Hier wird klar, warum es problematisch ist, $0^0 = 1$ zu setzen: Nach unseren Festlegungen ist $0^{1/n} = \sqrt[n]{0} = 0$ für beliebig große positive natürliche n . Das bedeutet etwa für $n = 1000$, dass $0^{0.001} = 0$. Und so würden wir erwarten, dass, wenn n immer größer wird (und $\frac{1}{n}$ daher immer kleiner), man schließlich bei $0^0 = 0$ landet. Mit einem Wort: Für 0^0 können sich, je nach der verwendeten Berechnungsmethode, verschiedene Werte ergeben. Also Vorsicht bei 0^0 !

⁶ Nur eine kurze Anmerkung dazu: Um etwa $5^{\sqrt{2}}$ zu definieren, kann die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ durch rationale Zahlen angenähert werden, beispielsweise, indem die Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ benutzt wird: 1.4 ist eine grobe Näherung, 1.41 ist schon besser, 1.414 ist noch besser, usw. Werden dann die Zahlen $5^{1.4}$, $5^{1.41}$, $5^{1.414}$ usw. (die ja alle rationale Exponenten haben) mit dem oben besprochenen Verfahren berechnet, so kommen sie einer bestimmten Zahl immer näher – diese wird dann als $5^{\sqrt{2}}$ definiert. Auch für das Rechnen mit beliebigen reellen Exponenten gelten die Regeln (2.8).

3 Potenzen mit verschiedenen Basen

Bis jetzt haben wir nur Potenzen mit gleicher Basis a betrachtet. Um Potenzen mit verschiedenen Basen a und b , aber gleichen Exponenten q zu multiplizieren und zu dividieren, können wir die Regeln

$$(ab)^q = a^q b^q \quad (3.1)$$

und

$$\left(\frac{a}{b}\right)^q = \frac{a^q}{b^q} \quad (3.2)$$

verwenden. Als Spezialfälle für $q = \frac{1}{2}$ folgen die nützlichen Formeln

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad (3.3)$$

und

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}. \quad (3.4)$$

4 Diskussion

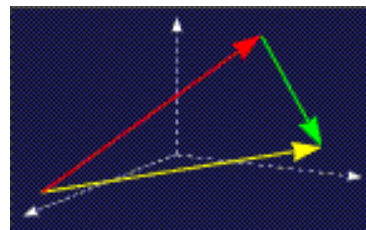
Halten Sie sich bitte vor Augen, was wir auf den vorangegangenen Seiten gemacht haben! Wir haben zunächst Schreibweisen wie $5^{-2/3}$ eine konkrete Bedeutung gegeben. Die Operationen, die damit verbunden sind, können alle auch unter Verwendung von positiven natürlichen Exponenten, (höheren) Wurzeln und Kehrwerten angeschrieben werden, etwa

$$5^{-2/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}. \quad (4.1)$$

Die neue Schreibweise (hier $5^{-2/3}$) hat aber den eminenten Vorteil, dass die Rechengesetze (2.8) das Bilden von mehrfachen Multiplikationen einer Zahl mit sich selbst, höheren Wurzeln, Kehrwerten und beliebigen Kombinationen dieser Operationen in einer knappen und einheitlichen Form regeln. Sie sind leicht zu merken und in der Praxis leicht anzuwenden. Mit einem Wort: Die Erweiterung der Potenzschreibweise ist zwar logisch nicht unausweichlich, aber extrem *nützlich*!

Dieses Skriptum wurde erstellt im April 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“

(<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Wurzeln

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

In diesem Skriptum wird besprochen, was Quadratwurzeln und höhere Wurzeln sind und wie man mit ihnen rechnet.

1 Quadratwurzeln

Im Rahmen der Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen kann gefragt werden, ob es eine Zahl gibt, deren Quadrat gleich 4 ist. Die Antwort: Es gibt sogar zwei solche Zahlen¹, nämlich -2 und 2 . Die positive dieser beiden, also 2 , nennen wir die **Quadratwurzel** (kurz **Wurzel**) aus 4 und bezeichnen sie mit dem Symbol $\sqrt[2]{4}$ oder kurz $\sqrt{4}$. Also:

$$\sqrt{4} = 2. \quad (1.1)$$

Lässt sich das für alle reellen Zahlen verallgemeinern?

- Die Wurzel aus 0 : Es gibt nur eine einzige reelle Zahl, deren Quadrat 0 ist, nämlich 0 selbst. Daher ist

$$\sqrt{0} = 0. \quad (1.2)$$

- Wurzeln aus positiven Zahlen: Für jede positive reelle Zahl a gibt es zwei Zahlen, deren Quadrat gleich a ist. Die positive nennen wir die Wurzel aus a und bezeichnen sie mit \sqrt{a} . Die andere ist dann $-\sqrt{a}$.
- Wurzeln aus negativen Zahlen? Nein! Da im Rahmen der reellen Zahlen kein Quadrat negativ sein kann, besitzt eine negative Zahl keine Quadratwurzel².

¹ Es ist auch gar nicht schwer, das einzusehen: Ist x eine Zahl, deren Quadrat gleich 4 ist, so muss also gelten $x^2 = 4$, oder, anders angeschrieben, $x^2 - 4 = 0$. Das können wir auch in der Form $(x + 2)(x - 2) = 0$ schreiben. Wenn aber nun das Produkt zweier reeller Zahlen gleich 0 ist, muss zumindest eine von ihnen verschwinden. Es muss also entweder $x + 2 = 0$ sein (dann ist $x = -2$) oder $x - 2 = 0$ (dann ist $x = 2$). Dritte Möglichkeit gibt es keine. Voilà!

² Es gibt einen erweiterten Zahlbegriff – die komplexen Zahlen –, der zulässt, dass ein Quadrat negativ ist. Wir wollen uns hier aber auf die reellen Zahlen beschränken.

Die Wurzel aus jeder positiven reellen Zahl ist also wieder eine positive reelle Zahl, beispielsweise $\sqrt{\frac{3}{7}}$ oder $\sqrt{\pi}$. In Berechnungen treten oft Wurzeln aus natürlichen Zahlen auf, also $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ usw. Es lässt sich zeigen, dass die Wurzel aus einer natürlichen Zahl entweder wieder eine natürliche Zahl oder eine irrationale Zahl ist. In die erste Kategorie fallen nur die Wurzeln der „Quadratzahlen“ 0, 1, 4, 9, 16, 25 usw. Alle anderen Wurzeln natürlicher Zahlen können in Dezimaldarstellung nur näherungsweise angegeben werden. So ist beispielsweise

$$\sqrt{2} \approx 1.414213562 \quad (1.3)$$

$$\sqrt{3} \approx 1.732050808 \quad (1.4)$$

$$\sqrt{5} \approx 2.236067977. \quad (1.5)$$

Kommen in einer Berechnung solche Wurzeln vor, so ist die exakte Schreibweise mit dem Wurzelsymbol meist der Verwendung von Näherungswerten vorzuziehen. Ist beispielsweise die Länge d der Diagonale eines Quadrats mit Seitenlänge 1 gesucht, so ergibt sich aus dem Satz von Pythagoras (angewandt auf das rechtwinkelige Dreieck mit den Seiten des Quadrats als Katheten und der Diagonale als Hypotenuse) $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, daher $d = \sqrt{2}$. Will man den ungefähren Zahlenwert auch angeben, so kann man das in der Form $d = \sqrt{2} \approx 1.4142$ tun. Eine Antwort wie $d = 1.4142$ ist genau genommen falsch!

Um Wurzeln zu multiplizieren und zu dividieren, können die praktischen Rechenregeln

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad (1.6)$$

und

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (1.7)$$

verwendet werden (wobei im letzten Fall natürlich b nicht gleich 0 sein darf). So ist beispielsweise

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}. \quad (1.8)$$

Steht eine Wurzel im Nenner eines Bruchs, so kann man mit folgendem Trick den „Nenner rational machen“:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (1.9)$$

Hier wurde der Bruch mit $\sqrt{2}$ erweitert, und es wurde verwendet, dass $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ ist.

Um Brüche, die Wurzeln enthalten, zu addieren, kann ebenfalls ein geeignetes Erweitern helfen, wie das Beispiel

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (1.10)$$

zeigt. (Wenn man will, kann man das noch unter Anwendung des Tricks, der in (1.9) vorgestellt wurde, zu $\frac{1}{6}\sqrt{6}$ umformen.)

2 Höhere Wurzeln

Gibt es eine reelle Zahl, deren dritte Potenz³ gleich 8 ist? Ja, es gibt (in der Menge der reellen Zahlen) *genau eine* solche Zahl, nämlich 2. Wir nennen sie die **dritte Wurzel (Kubikwurzel)** aus 8 und bezeichnen sie mit $\sqrt[3]{8}$. Also:

$$\sqrt[3]{8} = 2. \quad (2.1)$$

Ganz allgemein gibt es für jede nichtnegative reelle Zahl a genau eine reelle Zahl, deren dritte Potenz gleich a ist, und die wir in der Form $\sqrt[3]{a}$ anschreiben. Analog zu (1.6) und (1.7) gelten für dritte Wurzeln die Rechenregeln

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} \quad (2.2)$$

und

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}, \quad (2.3)$$

wobei im letzten Fall natürlich b nicht gleich 0 sein darf.

Da beim Bilden von dritten Potenzen das Vorzeichen erhalten bleibt, wie in $(-2)^3 = -8$, wäre man versucht, $\sqrt[3]{-8} = -2$ zu schreiben. Das sollte aber mit Vorsicht gemacht werden und gilt in manchen Kreisen sogar als verpönt⁴.

Ganz allgemein können n -te Wurzeln mit beliebigen natürlichen Zahlen $n \geq 2$ berechnet werden. Auch hierbei beschränken wir uns darauf, solche Wurzeln nur aus nichtnegativen Zahlen zu ziehen, also $\sqrt[n]{a}$ für $a \geq 0$. Für Produkte und Quotienten höherer Wurzeln gelten die Rechenregeln

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \quad (2.4)$$

und

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \quad (2.5)$$

Wurzeln von Wurzeln können mit Hilfe der Rechenregel

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \quad (2.6)$$

ermittelt werden, und für Potenzen gilt

$$\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n, \quad (2.7)$$

wobei m und n beliebige positive natürliche Zahlen sind. Für Produkte höherer Wurzeln wie $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{a}$ und noch komplexere Berechnungen wird besser die nun folgende Potenzschreibweise verwendet.

³ Die dritte Potenz einer reellen Zahl x ist x^3 .

⁴ Der Grund dafür liegt in den komplexen Zahlen, die hier nicht das Thema sind.

3 Potenzschreibweise von Wurzeln

Quadratwurzeln und höhere Wurzeln können als **Potenzen** aufgefasst werden, deren Exponenten Kehrwerte von positiven natürlichen Zahlen sind. Der Grund für die Nützlichkeit der Potenzschreibweise besteht in den allgemeinen (und sehr praktischen) Rechenregeln

$$a^p a^q = a^{p+q} \quad \text{und} \quad (a^p)^q = a^{p \cdot q} \quad (3.1)$$

sowie

$$(ab)^q = a^q b^q \quad \text{und} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^q = \frac{a^q}{b^q}, \quad (3.2)$$

die für beliebige rationale Zahlen p, q und für beliebige positive reelle a, b gelten. Um sie verwenden zu können, müssen wir festlegen, was „ a hoch einer rationalen Zahl“ bedeutet:

$$a^0 = 1 \quad (3.3)$$

$$a^1 = a \quad (3.4)$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.5)$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.6)$$

$$a^{-1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.7)$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{für } m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

$$a^{-m/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad \text{für } m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.9)$$

Mit (3.6) und (3.7) kann insbesondere

$$a^{1/2} = \sqrt{a} \quad \text{und} \quad a^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad (3.10)$$

gesetzt werden.

Diese Schreibweise zusammen mit den Rechenregeln (3.1) und (3.2) kann wahre Wunder bewirken! Mit ihrer Hilfe können Sie beispielsweise relativ leicht Berechnungen wie

$$\sqrt[4]{5} \sqrt[3]{5} = 5^{1/4} 5^{1/3} = 5^{1/4+1/3} = 5^{7/12} = \sqrt[12]{5^7} \quad (3.11)$$

oder

$$\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \sqrt[6]{10} = \frac{2^{1/3}}{5^{1/3}} 10^{1/6} = \frac{2^{1/3}}{5^{1/3}} (2 \cdot 5)^{1/6} = 2^{1/3+1/6} 5^{-1/3+1/6} = 2^{1/2} 5^{-1/6} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{5}} \quad (3.12)$$

durchführen. Auch alle früher angeschriebenen Regeln (1.6), (1.7), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) und (2.7) folgen aus (3.1) und (3.2). Angesichts dieses mächtigen Formalismus empfiehlt es sich, bei komplexen Ausdrücken mit höheren Wurzeln auf die Wurzelschreibweise ganz zu verzichten und durchgängig die Potenzschreibweise zu verwenden.

4 Wie sollen Zahlen angegeben werden, die Wurzeln enthalten?

Wie sollen Zahlen, die Wurzeln enthalten, angegeben werden, insbesondere wenn sie als Ergebnisse von Berechnungen auftreten? Diese Frage ist nicht eindeutig zu beantworten. So bezeichnen beispielsweise $\sqrt{8}$ und $2\sqrt{2}$ die gleiche reelle Zahl (denn $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$), und in einem gewissen Sinn ist es eine Geschmacksfrage, welche dieser beiden Darstellungen die „schönere“ oder die „einfachere“ ist. Die meisten MathematikerInnen würden wahrscheinlich die Form $2\sqrt{2}$ bevorzugen, weil sie ausdrückt, dass das Doppelte von $\sqrt{2}$ gemeint ist und $\sqrt{2}$ „elementarer“ als $\sqrt{8}$ erscheint. Nach dieser Philosophie sollte man versuchen, natürliche Zahlen unter dem Wurzelsymbol so klein wie möglich zu halten, um Vereinfachungsmöglichkeiten nicht zu übersehen. Das kann sich etwa auszahlen, wenn eine Berechnung auf $\sqrt{8} + \sqrt{18}$ führt. Mit

$$\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \quad (4.1)$$

wird dann ganz offensichtlich eine Vereinfachung erzielt.

Insbesondere wenn unter dem Wurzelsymbol eine größere natürliche Zahl steht, ist es sinnvoll, sie in Faktoren zu zerlegen, um herauszufinden, ob sich nicht doch aus einem ihrer Teile die Wurzel innerhalb der natürlichen Zahlen ziehen lässt. Tritt z.B. bei einer Berechnung $\sqrt{243}$ auf und wird erkannt, dass $243 = 81 \cdot 3$ ist, kann

$$\sqrt{243} = \sqrt{81 \cdot 3} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{3} = 9\sqrt{3} \quad (4.2)$$

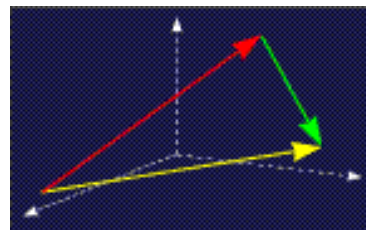
vereinfacht werden.

Tritt $\sqrt{6}$ als Ergebnis einer Berechnung auf, so könnte das auch in der Form $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ angeschrieben werden. Welche dieser beiden Darstellungen „schöner“ ist, ist hier weniger klar, und so sei die Entscheidung darüber Ihrem persönlichen ästhetischen Empfinden überlassen, ebenso wie die Frage, ob statt $\frac{1}{\sqrt{2}}$ besser $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $2^{-1/2}$ geschrieben werden soll.

Ähnliche Überlegungen können angestellt werden, wenn höhere Wurzeln und Wurzeln aus Potenzen auftreten. Ob die Schreibweise $2\sqrt[3]{2}$ oder $2^{4/3}$ vorzuziehen ist, ist wieder Geschmackssache, aber $16^{3/4}$ sollte besser als 8 angeschrieben werden! Im Einzelfall kann es sich also lohnen, ein vermeintliches Endergebnis noch auf derartige Vereinfachungen hin abzuklopfen!

Dieses Skriptum wurde erstellt im April 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“

(<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2021 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Zahlenpaare und Zahlentripel

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

In diesem Skriptum wird besprochen, was Zahlenpaare und Zahlentripel sind, wie man mit ihnen rechnet und wie man sie geometrisch interpretieren kann.

1 Zahlenpaare rechnerisch

Ein Zahlenpaar ist eine (geordnete) Liste zweier Zahlen. „Geordnet“ bedeutet, dass es eine erste und eine zweite Zahl gibt¹. Wenn nichts anderes dazugesagt wird, ist eine Liste aus reellen Zahlen gemeint. (Die genaue Benennung wäre „reelles Zahlenpaar“.) Ist beispielsweise die erste Zahl gleich -5 und die zweite π^2 , so kann das Zahlenpaar entweder in Zeilenform oder in Spaltenform angeschrieben werden:

$$(-5, \pi^2) \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -5 \\ \pi^2 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Die beiden Zahlen werden als **Komponenten** oder **Koordinaten** des Zahlenpaares bezeichnet.

Die Menge aller reellen Zahlenpaare wird mit dem Symbol \mathbb{R}^2 (ausgesprochen „ \mathbb{R} zwei“) bezeichnet².

Was die beiden Zahlen in einem Zahlenpaar bedeuten, ist zunächst nicht weiter festgelegt. Wichtig für uns ist, dass man mit Zahlenpaaren rechnen kann:

¹ Es ist also zwischen dem Paar $(2, 3)$ und der Menge $\{2, 3\}$ zu unterscheiden! Für Paare gilt $(2, 3) \neq (3, 2)$, aber für Mengen gilt $\{2, 3\} = \{3, 2\}$.

² Sie kann als das „kartesische Produkt“ der Menge \mathbb{R} mit sich selbst verstanden werden, wobei das kartesische Produkt zweier Mengen A und B , angeschrieben als $A \times B$ (ausgesprochen „ A kreuz B “), definiert ist als die Menge aller Paare (a, b) , für die a ein Element von A und b ein Element von B ist. In diesem Sinn ist $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Siehe dazu auch das Skriptum *Mengen und Mengenoperationen*.

- Zunächst können Zahlenpaare **addiert** werden. Dabei ist das Ergebnis wieder ein Zahlenpaar, wobei die erste Komponente der Summe gleich der Summe der beiden ersten Komponenten und die zweite Komponente der Summe gleich der Summe der beiden zweiten Komponenten ist. Anhand eines Beispiels, in Zeilen- und Spaltenform angeschrieben:

$$(2, -3) + (6, 7) = (8, 4) \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

- Weiters können **Vielfache** von Zahlenpaaren gebildet werden. So berechnen wir etwa das 3-fache eines Zahlenpaares, indem wir beide Komponenten mit 3 multiplizieren:

$$3(6, 7) = (18, 21) \quad \text{bzw.} \quad 3 \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 21 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Statt $3(6, 7)$ kann auch $3 \cdot (6, 7)$ (also mit „Malpunkt“) geschrieben werden.

- Addieren und das Bilden von Vielfachen können beliebig miteinander kombiniert werden. So ist beispielsweise

$$5(2, -3) + 2(6, 7) = (22, -1) \quad \text{bzw.} \quad 5 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

(Rechnen Sie nach!) Eine derartige Kombination (d.h. eine Summe von Vielfachen von Zahlenpaaren) heißt **Linearkombination**.

- Die Differenz zweier Zahlenpaare, wie beispielsweise

$$(2, -3) - (6, 7) = (-4, -10) \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

kann ebenfalls als Linearkombination „erstes Zahlenpaar $+ (-1) \cdot$ zweites Zahlenpaar“ angesehen werden.

Die zwei elementaren Rechenoperationen mit Zahlenpaaren sind also „Addition“ und „Multiplikation mit einer Zahl“, und aus ihnen ergibt sich die Möglichkeit, beliebige Linearkombinationen (einschließlich der Differenz) zu bilden.

2 Zahlenpaare geometrisch

Wir haben bereits erwähnt, dass zunächst nicht weiter festgelegt ist, was die beiden Komponenten eines Zahlenpaares bedeuten. Es könnte sich um Massen von Teilen eines Motors handeln, um Preise von Waren, Stückzahlen und vieles mehr. Wir können ihnen aber auch *geometrische Bedeutungen* geben. Zwei derartige geometrische Bedeutungen sind besonders wichtig.

- Ein Zahlenpaar kann dazu benutzt werden, um den Ort eines **Punktes** in einer Ebene zu beschreiben. Die Komponenten des Paares werden dabei als Koordinaten eines Punktes gedeutet. Dazu benötigen wir zuerst eine Ebene – wir stellen sie uns gedanklich als „ideale“ Ebene vor, die sich in allen Richtungen bis ins Unendliche erstreckt. Um diese Vorstellung zu unterstützen, nehmen wir ein Blatt Papier, das zumindest einen Ausschnitt dieser Ebene (die wir auch **Zeichenebene** nennen können) darstellen soll. Auf dieses zeichnen wir mit dem Geodreieck zwei „Koordinatenachsen“, d.h. zwei aufeinander normal stehende Geraden, die beide als Modell der Zahlengeraden aufgefasst werden können. Die „erste Achse“ (die sogenannte *Abszisse*) legen wir üblicherweise so, dass die Richtung ansteigender Markierungen von links nach rechts verläuft. Die „zweite Achse“ (die sogenannte *Ordinate*) wird so orientiert, dass die Richtung ansteigender Markierungen auf dem Blatt Papier „von uns weg“ (oder auf dem Bildschirm „von unten nach oben“) verläuft.

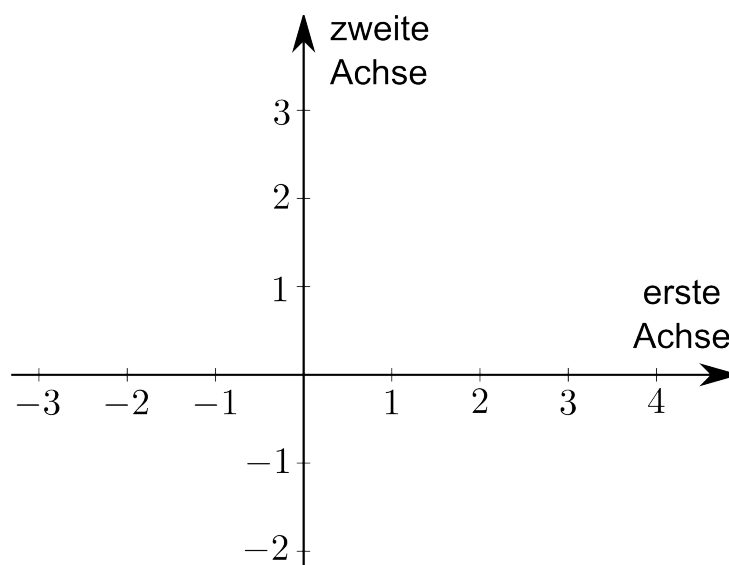


Abbildung 1: (Ausschnitt der) Zeichenebene mit Koordinatensystem.

Den Punkt, der durch das Zahlenpaar $(2, 3)$ dargestellt wird, erhalten wir, indem wir vom Ursprung (dem Schnittpunkt der Achsen) eine Strecke der Länge 2 in Richtung der ersten Achse (nach „rechts“) und eine Strecke der Länge 3 in Richtung der zweiten Achse (nach „oben“) gehen (oder in umgekehrter Reihenfolge: zuerst eine Strecke der Länge 3 in Richtung der zweiten Achse und danach eine Strecke der Länge 2 in Richtung der ersten Achse). Das Gleiche kann auch mit beliebigen anderen Zahlenpaaren gemacht werden, wobei wir im Fall einer negativen Koordinate in die jeweilige Gegenrichtung (nach „links“ bzw. nach „unten“) gehen. Abbildung 2 zeigt vier ausgewählte Punkte. Der Koordinatenursprung (kurz: Ursprung) ist der Schnittpunkt der beiden Achsen. Er ist durch das Zahlenpaar $(0, 0)$ charakterisiert.

Auf diese Weise ist ein **Koordinatensystem** in der Zeichenebene festgelegt. Wir können es etwas genauer ein *kartesisches* Koordinatensystem³ nennen, da es auch andere Me-

³ Zu Ehren von René Descartes (1596 – 1650).

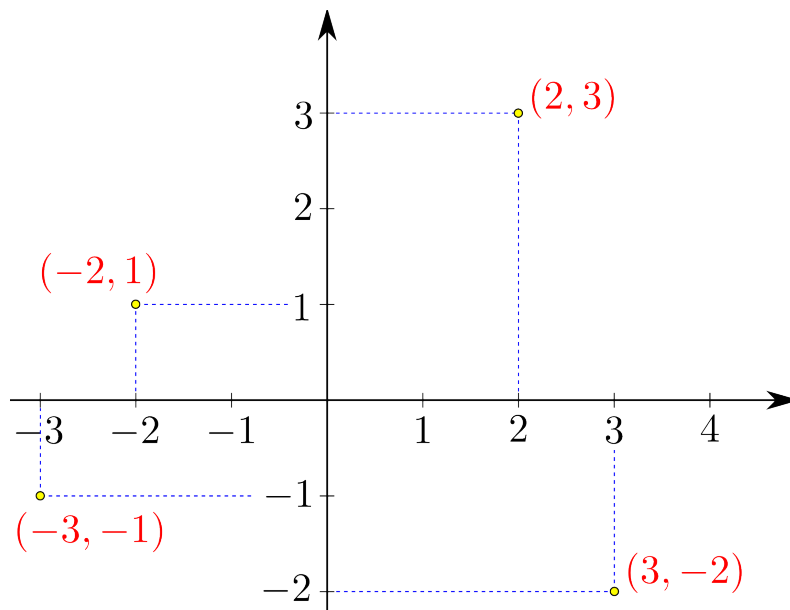


Abbildung 2: Zeichenebene, Koordinatensystem und vier ausgewählte Punkte.

thoden gibt, den Ort eines Punktes in der Ebene durch zwei Zahlen zu charakterisieren. In Bezug auf ein Koordinatensystem können Zahlenpaare als Punkte gedeutet werden. In mathematischer Hinsicht ist die mit einem Koordinatensystem ausgestattete Zeichenebene eine Visualisierung der Menge \mathbb{R}^2 . Die Identifizierung der Zeichenebene mit dem \mathbb{R}^2 (der Menge aller reellen Zahlenpaare) ist so stark, dass wir sprachlich zwischen ihnen oft gar nicht unterscheiden und \mathbb{R}^2 schlicht als „Ebene“ bezeichnen.

Die Werte auf den Koordinatenachsen werden oft mit Symbolen bezeichnet, wie beispielsweise x_1 und x_2 (oder x und y). Die Achsen werden dann dementsprechend als x_1 -Achse und x_2 -Achse (oder x -Achse und y -Achse), die Koordinaten eines Punktes als x_1 -Koordinate und x_2 -Koordinate (oder x -Koordinate und y -Koordinate) bezeichnet. (Selbstverständlich sind auch andere Bezeichnungen möglich, beispielsweise wenn auf der ersten Achse die Zeit t aufgetragen wird – wir nennen sie dann t -Achse.) Die Identifizierung von Zahlenpaaren mit Punkten ist so stark, dass man zwischen ihnen sprachlich meist gar keinen Unterschied macht: Statt „das Zahlenpaar $(2, 3)$ “ können wir auch „der Punkt $(2, 3)$ “ sagen.

Geben wir dem Punkt mit den Koordinaten $(2, 3)$ den Namen P , so schreiben wir einfach

$$P = (2, 3). \quad (2.1)$$

Bei der Bearbeitung geometrischer Fragestellungen ist es wichtig, sich vor Augen zu halten,

- dass die erste Achse aus genau jenen Punkten besteht, deren zweite Koordinate gleich 0 ist, und

- dass die zweite Achse aus genau jenen Punkten besteht, deren erste Koordinate gleich 0 ist.

Die vier Bereiche, in die die Ebene durch die Koordinatenachsen geteilt wird, werden als **Quadranten** bezeichnet und, ausgehend von jenem, in dem alle Koordinaten positiv sind („rechts oben“), im Gegenuhrzeigersinn als erster bis vierter Quadrant nummeriert.

- Es gibt aber auch eine zweite, nicht minder wichtige geometrische Bedeutung, die wir einem Zahlenpaar geben können: Ein Zahlenpaar kann dazu benutzt werden, um einen **Pfeil** in einer Ebene zu beschreiben. So beschreibt das Zahlenpaar $(4, 1)$ einen Pfeil, der, ausgehend von einem beliebigen Punkt (dem Anfangspunkt) zu einem Punkt verläuft, zu dem wir gelangen, indem wir eine Strecke der Länge 4 in Richtung der ersten Achse und eine Strecke der Länge 1 in Richtung der zweiten Achse gehen. Abbildung 3 zeigt einen Pfeil mit diesen Komponenten. Der Anfangspunkt eines Pfeils wird auch als *Schaft*, der Endpunkt als *Spitze* bezeichnet.

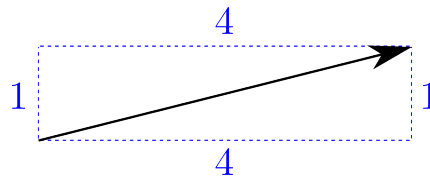


Abbildung 3: Pfeil mit Komponenten $(4, 1)$.

Das Gleiche kann auch mit beliebigen anderen Zahlenpaaren gemacht werden, wobei wir im Fall einer negativen Komponente in die jeweilige Gegenrichtung gehen. Wollen wir einem Pfeil, der durch das Zahlenpaar $(4, 1)$ charakterisiert wird, den Namen u geben, so schreiben wir einfach

$$u = (4, 1). \quad (2.2)$$

Zwei Pfeile, die durch die gleichen Komponenten charakterisiert werden, deren Anfangspunkte (Schäfte) sich aber an unterschiedlichen Orten in der Ebene befinden, bezeichnet man im Allgemeinen mit dem gleichen Symbol.

Zahlenpaare werden auch **Vektoren** genannt. In manchen mathematischen Texten bezieht sich diese Bezeichnung nur auf die Deutung eines Zahlenpaares als Pfeil. Das Zahlenpaar $(0, 0)$ heißt auch „Nullvektor“. In der Pfeil-Interpretation stellt es keinen Pfeil im eigentlichen Sinn dar, wird aber zugelassen, weil es beim Rechnen mit Zahlenpaaren jederzeit auftreten kann. Es wird oft einfach als 0 angeschrieben. Dass damit $(0, 0)$ gemeint ist, muss man dann aus dem Kontext erkennen.

Ob die beiden Zahlen eines Zahlenpaares als „Koordinaten“ oder als „Komponenten“ bezeichnet werden sollen, ist nicht strikt geregelt. Geht es um Zahlenpaare, die geometrisch gedeutet werden, so wird ersteres oft eher für die Punkt-Interpretation und zweiteres eher für die Pfeil-Interpretation verwendet (und wie Ihnen vielleicht schon aufgefallen ist, machen wir es hier genauso).

Zahlenpaare in der Interpretation als Punkte werden oft mit Großbuchstaben, Zahlenpaare in der Interpretation als Pfeile mit Kleinbuchstaben bezeichnet. Das ist nicht zwingend notwendig,

aber praktisch. Zahlenpaare in der Interpretation als Pfeile werden auch oft mit einem über das entsprechende Symbol gestellten Pfeilchen („Vektorpfeilchen“), wie in \vec{u} , bezeichnet. In manchen Texten werden sie fett gedruckt, also in der Form \mathbf{u} .

Besitzen die Operationen „Addition“ und „Multiplikation mit einer Zahl“ (bzw. allgemein das Bilden beliebiger Linearkombinationen von Zahlenpaaren) ebenfalls eine geometrische Bedeutung? Die Antwort ist ein mehrfaches Ja:

- Die Addition zweier Zahlenpaare kann als „Hintereinanderhängen von Pfeilen“ gedeutet werden. In Abbildung 4 ist ein Beispiel gezeigt. Interessant ist, dass sich das „Kommutativgesetz für die Addition von Zahlenpaaren“ ($u + v = v + u$) auch geometrisch zeigt: Auf die Reihenfolge des „Hintereinanderhängens“ kommt es nicht an. Dadurch ergibt sich ein Parallelogramm (Stichwort „Kräfteparallelogramm“).

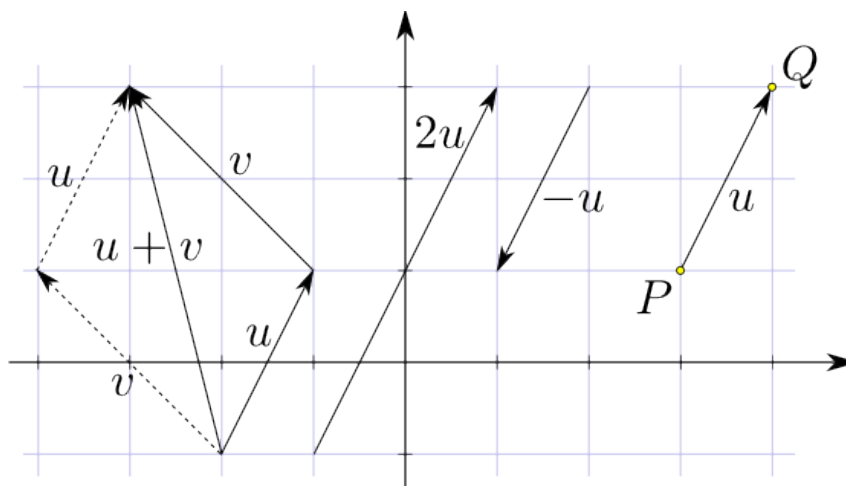


Abbildung 4: Geometrische Deutung der Rechenoperationen mit Zahlenpaaren: Gegeben sind die Zahlenpaare $P = (3, 1)$, $u = (1, 2)$ und $v = (-2, 2)$. Wir interpretieren P als Punkt, u und v als Pfeile. Links ist die Addition $u + v$ als „Hintereinanderhängen von Pfeilen“ gedeutet. Dass es dabei auf die Reihenfolge nicht ankommt, wird durch die gestrichelten Pfeile deutlich, die die Addition $v + u$ darstellen („Kräfteparallelogramm“). In der Mitte sind $2u$ und $-u$ als Pfeile gedeutet. Rechts ist die Addition $P + u$ als Definition eines Punktes Q gedeutet: $Q = P + u$. Letzteres kann auch als Subtraktion $u = Q - P$ angeschrieben werden, wobei nun u gedeutet wird als Verbindungspfeil von P nach Q . Benutzen Sie das zusätzlich eingezeichnete *Koordinatenraster*, um zu verifizieren, dass die genannten (Rechen-)Operationen tatsächlich zu den gleichen Resultaten führen wie die entsprechenden geometrischen Operationen!

- Die Multiplikation eines Zahlenpaares mit einer Zahl c kann als Ver- c -fachung eines Pfeils gedeutet werden. Für $c > 0$ wird damit eine Streckung oder Stauchung erzielt, für $c < 0$ ist zusätzlich die Orientierung des Pfeils „umzudrehen“. In Abbildung 4 ist dies, ausgehend von dem als Pfeil gedeuteten Zahlenpaar u , für $2u$ und $-u$ skizziert.
- Durch Kombination dieser beiden Operationen können auch allgemeine Linearkombinationen von Zahlenpaaren als Pfeil-Operationen gedeutet werden.
- Die Addition zweier Zahlenpaare kann im Sinn von „Punkt plus Pfeil“ als Definition eines neuen Punktes gedeutet werden: Sind P und u Zahlenpaare und wird P als Punkt

und u als Pfeil gedeutet, so ist $Q = P + u$ der Endpunkt (der Punkt an der Spitze) des Pfeils u , wenn sein Anfangspunkt (Schaft) in P gesetzt wird. In Abbildung 4 ist ein Beispiel skizziert.

- Eine besondere geometrische Bedeutung hat auch die Differenz zweier Zahlenpaare: Stellen P und Q Punkte dar, so stellt die Differenz $Q - P$ den Pfeil mit Anfangspunkt (Schaft) in P und Endpunkt (Spitze) in Q (d.h. den Verbindungspfeil von P nach Q , oft auch in der Form \overrightarrow{PQ} angeschrieben) dar. Diesen Sachverhalt nennt man auch die „Spitze-minus-Schaft-Regel“. Abbildung 4 zeigt auch dafür ein Beispiel.

3 Zahlentripel

In völliger Analogie zu Zahlenpaaren können auch Zahlentripel (d.h. geordnete Listen von *drei* Zahlen) betrachtet werden. Die Menge aller reellen Zahlentripel wird als \mathbb{R}^3 bezeichnet. Zahlentripel können addiert und mit Zahlen multipliziert werden, und es können beliebige Linearkombinationen gebildet werden, ganz so, wie wir es mit Zahlenpaaren gemacht haben. Auch Zahlentripel werden als Vektoren bezeichnet.

Hier ein Beispiel für eine Linearkombination von Zahlentripeln:

$$3 \cdot (-2, 5, 4) + 2 \cdot (1, 3, 7) = (-4, 21, 26) \quad (3.1)$$

oder, in Spaltenform angeschrieben:

$$3 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 21 \\ 26 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

(Rechnen Sie nach!)

Um Zahlentripel geometrisch zu deuten, benötigen wir eine weitere Dimension: Die Menge \mathbb{R}^3 stellt den dreidimensionalen **Raum** dar⁴. Zusätzlich zu den zwei Koordinatenachsen der Zeichenebene errichten wir nun (in Gedanken) eine dritte (oft als x_3 -Achse oder z -Achse bezeichnet), die auf die ersten beiden normal steht.

Die geometrische Deutung von Zahlentripeln als Punkte und Pfeile im Raum funktioniert ganz analog wie jene von Zahlenpaaren in der Ebene, und auch die oben aufgezählten geometrischen Deutungen der Operationen „Addition“ und „Multiplikation mit einer Zahl“ übertragen sich ohne Probleme auf den Raum. Ein Nachteil (und eine Herausforderung an unser Vorstellungsvermögen) besteht natürlich darin, dass wir räumliche Sachverhalte nicht direkt „zeichnen“ können, sondern uns mit ebenen Skizzen behelfen müssen.

⁴ Sie kann auch als das dreifache kartesische Produkt der Menge \mathbb{R} mit sich selbst, geschrieben als $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, angesehen werden.

4 n -Tupel

Ergänzend erwähnen wir, dass die Konzepte des Zahlenpaars und des Zahlentripels auf beliebige Dimensionen verallgemeinert werden können. Für jede positive natürliche Zahl n können n -**Tupel**, d.h. geordnete Listen von n reellen Zahlen, betrachtet werden. Sie bilden die Menge \mathbb{R}^n , d.h. einen n -dimensionalen Raum, den wir uns für $n \geq 4$ natürlich überhaupt nicht mehr vorstellen können, in dem aber die Operationen „Addition“ und „Multiplikation mit einer Zahl“ rein rechnerisch ausgeführt werden können wie zuvor, etwa so:

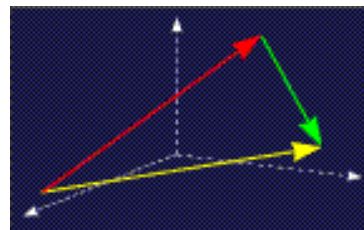
$$3 \cdot (-2, 5, 4, -1) + 2 \cdot (1, 3, 7, 6) = (-4, 21, 26, 9) \quad (4.1)$$

oder, in Spaltenform angeschrieben:

$$3 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 21 \\ 26 \\ 9 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Trotz mangelnder bildlicher Vorstellung können wir wie im \mathbb{R}^2 und im \mathbb{R}^3 auch in höherdimensionalen Räumen von „Punkten“ und „Pfeilen“ sprechen.

Dieses Skriptum wurde erstellt im April 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2021 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Grundsätzliches zu Termen und Variablen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

In diesem Skriptum wird dargelegt, warum in der Mathematik so viel „mit Buchstaben gerechnet“ wird, was Variable, Terme, Identitäten und Formeln sind, wie einfache Termumformungen (vor allem im Hinblick auf das Rechnen mit Klammern) durchgeführt werden und wie wir Terme richtig „anschauen“, um ihre Struktur zu erfassen.

1 Wieso Buchstaben?

Mathematik hat – natürlich – etwas mit „Rechnen“ zu tun. Aber schon ein Blick in ein fortgeschrittenes Mathematikbuch zeigt, dass dort weniger mit Zahlen als mit Buchstaben „gerechnet“ wird. Was soll das sein – „mit Buchstaben rechnen“? Doch der Eindruck täuscht: In weiten Teilen des Mathematikstoffs geht es um das Rechnen mit *Zahlen* – nur sieht man das auf den ersten Blick nicht! Und das kommt so:

Sobald das Interesse über das Hantieren mit einzelnen Zahlen hinausgeht, stellen sich Fragen allgemeinerer Natur ein. Wie sind eigentlich die **Rechenregeln** beschaffen, die wir – mehr oder weniger automatisch – anwenden, um mit Zahlen umzugehen? Eine der einfachsten Regeln ist diese: Beim Addieren von reellen Zahlen (und daher auch von natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen) kommt es auf die Reihenfolge der Summanden nicht an. So ist zum Beispiel

$$2 + 3 = 3 + 2, \quad (1.1)$$

und es ist auch $3 + 7 = 7 + 3$ und $1.3 + 17 = 17 + 1.3$ und $\sqrt{2} + 1 = 1 + \sqrt{2}$, und wir können viele Beispiele für diese Regel angeben. Kurz und bündig ausgedrückt: Sind x und y reelle Zahlen, so gilt

$$x + y = y + x. \quad (1.2)$$

Hier haben wir schon eine Aussage, die *von Zahlen handelt, aber in der nur Buchstaben vorkommen* – ein Beispiel für „Buchstabenrechnen“. Sie heißt **Kommutativgesetz der Addition**.

Ebenso gilt das **Kommutativgesetz der Multiplikation**: Sind x und y reelle Zahlen, so gilt

$$x y = y x. \quad (1.3)$$

Eine weitere Aussage dieses Typs, welche die Multiplikation mit der Addition kombiniert, ist

$$a(b + c) = ab + ac. \quad (1.4)$$

Sie gilt für alle reellen Zahlen a , b und c und heißt **Distributivgesetz** oder „**Klammern ausmultiplizieren**“ („**Klammern auflösen**“). Zur Illustration setzen wir anstelle von a , b und c konkrete Zahlen ein. Werten wir die linke und die rechte Seite von (1.4) für $a = 2$, $b = 3$ und $c = 4$ getrennt aus:

$$\begin{aligned} \text{linke Seite von (1.4): } & 2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 7 = 14 \\ \text{rechte Seite von (1.4): } & 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Wir sehen, dass sich beide Seiten auf dieselbe Zahl reduzieren, nämlich 14, haben die Aussage (1.4) also durch das Einsetzen konkreter Zahlen überprüft. Auch für jede andere konkrete Wahl der drei Zahlen a , b und c ist (1.4) eine wahre Aussage. Es handelt sich offenbar um eine *allgemeine Eigenschaft der reellen Zahlen* – eine Rechenregel.

Eine weitere Rechenregel, die im Umgang mit negativen Zahlen nützlich ist, lautet

$$-(-u) = u, \quad (1.6)$$

wenn u eine reelle Zahl ist. Damit verwandte Regeln sind $(-a)(-b) = ab$, $(-1)z = -z$ und $(-x)y = -xy$, die ebenfalls für beliebige reelle Zahlen gelten.

2 Identitäten

Aussagen, in denen Symbole vorkommen und die stets richtig sind, wenn diese Symbole durch konkrete Zahlen ersetzt werden, nennen wir **Identitäten**. Beispiele für (sehr grundlegende) Identitäten sind die oben angegebenen Rechenregeln. Eine etwas komplexere Identität ist die Aussage

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab. \quad (2.1)$$

Setzen Sie konkrete Zahlen Ihrer Wahl ein und überprüfen Sie sie!

3 Formeln

Die Formulierung von Rechenregeln (Identitäten) ist *einer* der Gründe für die Verwendung von Buchstaben (Symbolen) in der Mathematik. Ein anderer besteht darin, kurze und kompakte **Berechnungsvorschriften** auszudrücken. Ein Beispiel, gleich mit Symbolen formuliert: Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit Seitenlängen a , b und c kann so berechnet werden¹:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{wobei} \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c) \quad (\text{halber Umfang}). \quad (3.1)$$

¹ Das ist die sogenannte *Heronische Flächenformel*, benannt nach Heron von Alexandria, der im 1. Jahrhundert unserer Zeitrechnung wirkte.

Versuchen Sie, die Vorschrift „Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks, wenn seine Seitenlängen bekannt sind“ in Worten auszudrücken, ohne Symbole aufzuschreiben! Erkennen Sie den Vorteil einer knappen **Formel** wie (3.1)?

Eine Formel drückt eine Größe durch eine oder mehrere andere Größen aus. Formeln können auch kombiniert werden. Haben wir beispielsweise einen Zylinder mit Radius r und Höhe h vor uns, so ist seine Mantelfläche durch $M = 2\pi r h$, seine Grundfläche durch $D_1 = \pi r^2$, der Flächeninhalt des „Deckels“ durch $D_2 = D_1$ und seine gesamte Oberfläche durch $A = M + D_1 + D_2$ gegeben. Die Formel für A kann zu $A = M + 2 D_1$ vereinfacht oder in der Form

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2 \quad (3.2)$$

durch r und h ausgedrückt werden. Mit Hilfe des Distributivgesetzes (1.4), nun von rechts nach links gelesen, kann die weitere Vereinfachung

$$A = 2\pi r (h + r) \quad (3.3)$$

erzielt werden². Formeln stellen immer auch *Benennungen* von Größen dar. Wird für irgendeinen Zweck das Quadrat der Oberfläche eines Zylinders benötigt, so kann es – sofern die Bezeichnung von A für die Oberfläche einmal vereinbart wurde – einfach in der Form A^2 angeschrieben werden, wobei anstelle von A jederzeit einer der oben für A angegebenen Terme, also $M + D_1 + D_2$ oder $M + 2 D_1$ oder $2\pi r h + 2\pi r^2$ oder $2\pi r (h + r)$, eingesetzt werden kann.

4 Terme und Variable

Hat die Idee von Rechenregeln und Formeln, die durch Symbole ausgedrückt werden, die Mathematik einmal erfasst, so führen das Verlangen nach tieferem Verstehen und das Interesse an Anwendungen unweigerlich zu größerer Komplexität und zu anspruchsvolleren Aufgabenstellungen. So möchte man zum Beispiel eine Identität wie (2.1) *beweisen*, d.h. nicht nur für einzelne Zahlen überprüfen, sondern sicherstellen, dass sie *immer* gilt – wir werden das etwas weiter unten in diesem Skriptum noch machen. Mit „Buchstaben-Ausdrücken“ umgehen zu können, gehört zum Handwerkszeug in allen Fächern, in denen Mathematik eine Rolle spielt.

Das korrekte mathematische Wort für einen „Buchstaben-Ausdruck“ ist **Term**. Ein Beispiel für einen Term ist

$$(a + b)^2 - (a - b)^2. \quad (4.1)$$

Wir haben ihn bereits weiter oben angeschrieben: Er steht auf der linken Seite von (2.1). Die abstrakten Symbole a und b stehen für konkrete Zahlen, auf die man sich zwar nicht festlegen möchte, die aber jederzeit in den Term eingesetzt werden können. In diesem Sinn sind sie **Platzhalter** für Zahlen. Da sie nicht mit konkreten Zahlenwerten belegt sind, sind sie „variabel“ und heißen daher **Variable**.

Die oben angeschriebene Formel (3.1) gibt den Flächeninhalt eines Dreiecks durch einen Term an. In ihr treten zwei verschiedene Variablentypen auf: Die Seitenlängen a , b und c können

² Wir sagen, dass hier $2\pi r$ „herausgehoben“ wurde.

vorgegeben werden (sie heißen *unabhängige Variable*), der Flächeninhalt F wird dann aus ihnen bestimmt (und da er von der Wahl der Seitenlängen abhängt, ist er eine *abhängige Variable*).

Manchmal können unabhängige Variable nicht wirklich *völlig* frei gewählt werden. So steht etwa die Variable z im Term

$$\frac{3z^2 + 2}{z} \quad (4.2)$$

nicht für beliebige reelle Zahlen, sondern nur für reelle Zahlen, die von 0 verschieden sind. Der Wert $z = 0$ ist „verboten“, denn würde man ihn in (4.2) einsetzen, so müsste man durch 0 dividieren, was keinen Sinn macht. Abgesehen davon kann z aber frei gewählt werden.³

Der Begriff des Terms (ebenso wie der des „Ausdrucks“) ist ein bisschen unscharf, aber er leistet gute Dienste. Die Terme, mit denen man es am Anfang der „Termrechnung“ zu tun hat, haben im Grunde eine einfache Struktur: Werden die in ihnen vorkommenden Symbole durch Zahlen ersetzt, so können sie unter Verwendung der Grundrechnungsarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) und der zusätzlichen Operation des Wurzelziehens berechnet werden. Nach und nach treten dann weitere Elemente (wie Winkelfunktionen, Exponentialfunktionen und Logarithmen) hinzu.

Ausgehend von den Begriffen Variable und Term können zahlreiche interessante, auch für Anwendungen wichtige mathematische Sachverhalte formuliert und neue Erkenntnisse gewonnen werden. Dazu ist es notwendig, **Terme** unter Ausnutzung der grundlegenden Rechengesetze **umzuformen**, beispielsweise zu vereinfachen oder so „herzurichten“, dass man ihnen bestimmte Dinge leicht ansieht.

5 Terme umformen

Wie das Beispiel (2.1) zeigt, können zwei Terme, die verschieden aussehen und verschieden aufgebaut sind, auf den gleichen Zahlenwert führen, wenn für die in ihnen vorkommenden Symbole Zahlen eingesetzt werden. Das ist genau, was eine Identität ausdrückt. Die Identität (2.1) sagt uns, dass die Terme $(a + b)^2 - (a - b)^2$ und $4ab$ im Grunde dieselbe Sache darstellen – man kann sie als **äquivalent** bezeichnen. Sie haben zwar eine unterschiedliche Struktur, nämlich

- $(a + b)^2 - (a - b)^2$ ist die Differenz zweier Terme, von denen der erste das Quadrat einer Summe und der zweite das Quadrat einer Differenz ist,
- $4ab$ ist ein Produkt aus drei Faktoren,

und sind daher nicht im strikten Sinn *gleich*, aber in der Aussage⁴

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (5.1)$$

³ Ein weiteres Beispiel: In (3.1) dürfen nicht wirklich *beliebige* Zahlenwerte für die Variablen a , b und c eingesetzt werden – es muss auch tatsächlich ein Dreieck mit diesen Seitenlängen existieren. Beispielsweise gibt es kein Dreieck mit Seitenlängen $a = b = 1$ und $c = 3$. Setzen wir diese Werte dennoch in (3.1) ein, stoßen wir auf die Wurzel aus einer negativen Zahl!

⁴ Das Symbol \forall bedeutet „für alle“.

ist das Gleichheitszeichen voll gerechtfertigt. Ein Zusatz wie „ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ “ wird oft der Einfachheit halber weggelassen, aber im Fall einer Identität sollte er stets mitgedacht werden.

Wie kommt man aber nun von $(a+b)^2 - (a-b)^2$ zu $4ab$? Durch Anwendung der grundlegenden Rechengesetze! Die oben erwähnten Kommutativgesetze der Addition und der Multiplikation beherrschen wir so sicher, dass sie in diesem Zusammenhang kaum der Rede wert sind (ob man $a+b$ durch $b+a$ oder $4ab$ durch $4ba$ oder durch $ab \cdot 4$ ersetzt, spielt keine Rolle), aber das Distributivgesetz (1.4) sollte man gut kennen und richtig anwenden können. Wir benutzen es, um die Klammern in $(a+b)^2$ und $(a-b)^2$ „auszumultiplizieren“, hier ganz langsam Schritt für Schritt vorgeführt. Schritt 1:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b. \quad (5.2)$$

Erkennen Sie, was passiert ist? Sie können sich das Distributivgesetz (1.4) auch mit vertauschten Rollen der Symbole in der Form $c(a+b) = ca + cb$ vor Augen halten. Ersetzen wir darin c durch $a+b$, so landen wir genau bei (5.2). Nun ist jeder der Summanden im Ergebnis von (5.2) von einer Form, die eine nochmalige Anwendung des Distributivgesetzes nahelegt. (Dass a und b jetzt als Faktoren auftreten, die *rechts* von den Klammern stehen, ist unerheblich, da es beim Multiplizieren nicht auf die Reihenfolge der Faktoren ankommt.) Daher Schritt 2:

$$(a+b)a + (a+b)b = a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (5.3)$$

wobei wir ba durch ab ersetzt und ihre Summe zu $2ab$ zusammengefasst haben. Die Schritte 3 und 4 machen eine analoge Umformung mit $(a-b)^2$. Führen Sie sie selbst aus! Sie sollten auf

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (5.4)$$

kommen. Zuletzt fügen wir alles wieder zusammen:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 - (a-b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 2ab + 2ab = 4ab, \end{aligned} \quad (5.5)$$

wobei im Schritt $(*)$ das Distributivgesetz verwendet wurde, weil ein Minuszeichen vor einer Klammer aufgetreten ist⁵. Im vorletzten Schritt wurde berücksichtigt, dass $a^2 - a^2 = 0$ und $b^2 - b^2 = 0$ ist. Fertig! In der Praxis macht man Umformungen wie diese in einem einzigen, größeren Schritt: Alle Klammern ausmultiplizieren, gegebenenfalls Faktoren von Produkten vertauschen, zusammenfassen und wegstreichen, was wegfällt.

Manche Identitäten haben eine geometrische Bedeutung, die ihre Gültigkeit mit einem Schlag erweist. So kann beispielsweise der Term $(a+b)^2 - (a-b)^2$ als gesamter Flächeninhalt von vier Rechtecken gedeutet werden, die wie in Abbildung 1 (links) aneinander gelegt werden, und der Term $4ab$ als gleich großer Flächeninhalt, wobei die Rechtecke aber nun anders aneinander gelegt werden (rechts). So ergibt sich zwanglos die Identität (2.1).

Wir erwähnen noch zwei Umformungsregeln, die der Vereinfachung von Termen dienen:

⁵ In Umformungen wie $-(x+y) = -x - y$ oder $-(x-y) = -x + y$ wird nichts anderes als das Distributivgesetz mit -1 als Faktor vor der Klammer, zusammen mit der Regel $(-1)x = -x$ verwendet. Generell gilt das Distributivgesetz auch für mehr als zwei Summanden in der Klammer, was bei der Umformung $-(a^2 - 2ab + b^2) = -a^2 + 2ab - b^2$ verwendet wurde.

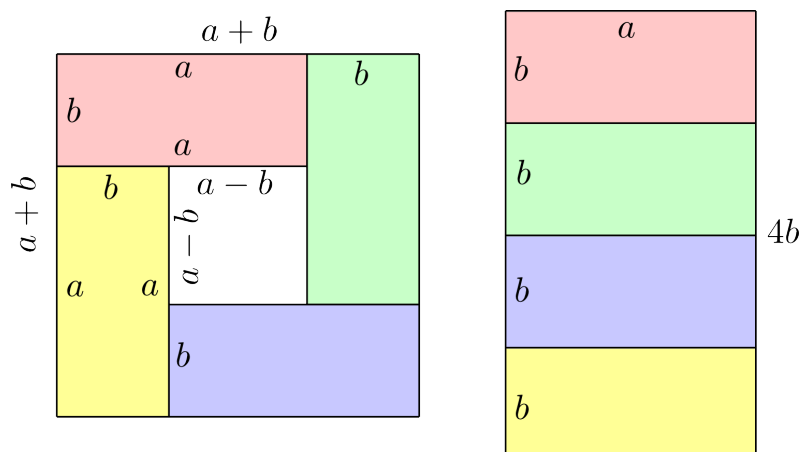


Abbildung 1: Vier Rechtecke mit Seitenlängen a und b (wobei $a > b$) werden so aneinander gelegt wie links skizziert. Ihr gesamter Flächeninhalt ist gleich dem Flächeninhalt des großen, die gesamte Anordnung umfassenden Quadrats mit Seitenlänge $a + b$, also $(a + b)^2$, minus dem Flächeninhalt des frei bleibenden weißen Quadrats in der Mitte mit Seitenlänge $a - b$, also $(a - b)^2$. Insgesamt ist der Flächeninhalt der vier Rechtecke also gleich $(a + b)^2 - (a - b)^2$. Andererseits können wir die vier Rechtecke so aneinanderlegen, wie rechts gezeigt. Ihr gesamter Flächeninhalt ist $4ab$. Daher gilt $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$ (zunächst für $a > b$, aber genauso kann man argumentieren, wenn $a < b$ ist, und der Fall $a = b$ ist gänzlich trivial, da dann das weiße Quadrat in der Mitte verschwindet).

- In Berechnungen treten oft Summen von Termen auf, die sich nur durch die numerischen Vorfaktoren unterscheiden, wie in $2a^2b + 3a^2b$. Eine solche Summe kann zu einem einzigen Term zusammengefasst werden:

$$2a^2b + 3a^2b = 5a^2b, \quad (5.6)$$

eine Regel, die aufgrund unseres „Alltagsverständs“ einleuchtet (ebenso wie wir „2 Euro + 3 Euro = 5 Euro“ rechnen) und die sich formal aus dem Distributivgesetz ergibt⁶. Wir haben sie bereits in (5.3) in der Form $ba + ab = 2ab$ und in (5.5) in der Form $2ab + 2ab = 4ab$ angewandt.

- Müssen im Zuge einer Termumformung zwei Potenzen mit der gleichen Basis⁷ multipliziert werden, so benutzen Sie die Regel

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (5.7)$$

beispielsweise $a \cdot a^2 = a^3$ oder $x^2 x^3 = x^5$. Damit können Sie etwa die Umformung

$$a(a^2 + b^2) - ab^2 = a^3 + ab^2 - ab^2 = a^3 \quad (5.8)$$

durchführen.

Er gibt nun allerdings keine Gewähr, dass beim Umformen eines Terms immer etwas erkennbar Einfacheres herauskommt als der Term, von dem man ausgegangen ist. So können Sie

⁶ Und zwar (anhand des obigen Beispiels) so: $2a^2b + 3a^2b = (2 + 3)a^2b = 5a^2b$.

⁷ Zur Erinnerung: a^n ist eine Potenz, a heißt Basis und n heißt Exponent oder Hochzahl.

beispielsweise analog zum obigen Beispiel (2.1), das wir von (5.1) bis (5.5) Schritt für Schritt durchgerechnet haben, die Umformung

$$2(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 6ab + b^2 \quad (5.9)$$

durchführen (machen Sie es zur Übung!). Ob man damit eine Vereinfachung erzielt hat, ist jetzt nicht mehr so klar und hängt in konkreten Anwendungen davon ab, was man mit so einem Term in weiterer Folge noch machen möchte. Hier zwei Möglichkeiten:

- Stehen etwa a und b für Dezimalzahlen mit vielen Nachkommastellen und muss man die durch den Term dargestellten Zahlen eine Million mal jeweils für verschiedene Werte von a und b berechnen, so wird ein Computer schneller sein, wenn er die ursprüngliche Form $2(a+b)^2 - (a-b)^2$ benutzt, da hier nur zwei „schwierige“ Multiplikationen auszuführen sind, in $a^2 + 6ab + b^2$ jedoch drei.
- Geht es aber etwa darum herauszufinden, wie man a bei gegebenem b wählen muss, damit der Zahlenwert des Terms gleich 1 ist (eine Fragestellung, wie sie in einer realistischen Anwendung durchaus auftreten kann), so landet man bei einer quadratischen Gleichung⁸, die mit einer entsprechenden Lösungsformel nach a gelöst werden kann. Für eine derartige Berechnung eignet sich die Form $a^2 + 6ab + b^2$ besser.

Sie sehen, dass Termumformungen zu gewissen Zwecken gemacht werden, auch wenn sie Ihnen (vor allem zu Beginn, wenn Sie die Sache etwas üben sollen) eher wie *l'art pour l'art* vorkommen mögen.

6 Klammern

Nun sind schon etliche Klammern vorgekommen, sodass es an der Zeit ist, etwas über ihren Gebrauch zu sagen:

- Der Zweck von Klammern besteht darin, Dinge zusammenzufassen. So bedeutet beispielsweise $3 \cdot (4 + 5)$, dass zuerst $4 + 5$ berechnet werden soll, und erst danach wird die Multiplikation mit 3 ausgeführt. Das Gleiche gilt auch für Klammern, die Terme umfassen, in denen Symbole (Variablenamen) stehen.
- Aufgrund der Regel „Punktrechnung vor Strichrechnung“ muss in $7 \cdot 5 - 2$ keine Klammer geschrieben werden, wenn zuerst $7 \cdot 5$ berechnet werden soll. Gäbe es diese Regel nicht, so müsste man $(7 \cdot 5) - 2$ schreiben. Das Gleiche gilt auch für die Division: In $2 : 9 + 8$ oder, was das Gleiche bedeutet, $\frac{2}{9} + 8$ ist es nicht notwendig, eine Klammer zu schreiben, wenn gemeint ist, dass 8 zu $2 : 9$ bzw. $\frac{2}{9}$ addiert werden soll. Soll hingegen 2 durch $9 + 8$ dividiert werden, so ist $2 : (9 + 8)$ bzw. $\frac{2}{9+8}$ zu schreiben, wobei im letzten Fall keine Klammer nötig ist, da die Schreibweise als Bruch die gewünschte Reihenfolge der Operationen bereits eindeutig ausdrückt.
- Wo immer keine Klammer nötig ist, ist es der Übersichtlichkeit halber meist besser, keine zu schreiben. Sehen Sie sich beispielsweise die folgende Aussage an: „Das Produkt von $a + 3b$ mit $2x - y$ schreiben wir in der Form $(a + 3b)(2x - y)$ “. Verstanden, wo eine Klammer angeschrieben wird und wo nicht?

⁸ Quadratische Gleichungen kommen im Stoff dran, wenn Sie schon ein bisschen mit Termen umgehen können.

- Um die Struktur eines Terms zu erfassen, in dem Klammerausdrücke vorkommen, kann es sinnvoll sein, ihn „von innen“ her zu lesen und nicht „von links nach rechts“. Haben Sie beispielsweise den Term

$$(p + q)^2 + 5(r - s)^2 \quad (6.1)$$

vor sich und wollen sich erst mal grob darüber orientieren, welche Werte er annehmen kann, wenn für die Variablen konkrete reelle Zahlenwerte eingesetzt werden, so lesen Sie ihn am besten in der Form

$$\text{etwas}^2 + 5 \cdot (\text{etwas anderes})^2. \quad (6.2)$$

Unabhängig davon, welche Werte die beiden „Etwasse“ haben, ist das Ergebnis immer ≥ 0 . Und es ist nur dann gleich 0, wenn die beiden „Etwasse“ gleich 0 sind, d.h. wenn $p + q = 0$ und $r - s = 0$ ist. In allen anderen Fällen nimmt der Term einen positiven Wert an.

7 Rezept zum Ausmultiplizieren von Klammern

Wie die bisherigen Beispiele gezeigt haben, ist es im Zuge der Termrechnung des Öfferns notwendig, Produkte von Klammern, in denen Summen oder Differenzen stehen, auszumultiplizieren. Dazu können wir – wie es in (5.2) und (5.3) gemacht wurde – Schritt für Schritt das Distributivgesetz anwenden, aber einfacher ist es, sich eine allgemeine Regel zu merken. Um sie kompakt formulieren zu können, fassen wir auch Differenzen als Summen auf. So ist etwa $a + 2b - 3c$ das Gleiche wie $a + 2b + (-3c)$. Das Rezept lautet nun: **Jeder Summand der ersten Klammer wird mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert – und alle diese Produkte werden addiert.** Ein einfaches Beispiel:

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by. \quad (7.1)$$

Hier wurde zuerst der erste Summand der ersten Klammer (a) mit beiden Termen der zweiten Klammer multipliziert (so entsteht $ax + ay$) und danach der zweite Summand der ersten Klammer (b) mit beiden Termen der zweiten Klammer (so entsteht $bx + by$). Das ist eine praktische Methode, die sich mit ein bisschen Übung leicht automatisieren lässt. Dabei hilft es mitunter, wenn Sie mit zwei Fingern auf die jeweiligen Summanden, die gerade multipliziert werden, zeigen. (Ein Finger der linken Hand zeigt auf a , ein Finger der rechten Hand zeigt zuerst auf x , dann auf y . Danach rückt der erste Finger weiter und zeigt auf b , und der zweite Finger zeigt wieder zuerst auf x , dann auf y .) Nun ein Beispiel, in dem ein Minuszeichen vorkommt:

$$\begin{aligned} (a - b)(x + y) &= (a + (-b))(x + y) = \\ &= ax + ay + (-b)x + (-b)y = ax + ay - bx - by. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Um nicht so umständlich mit dem Minuszeichen hantieren zu müssen, rechnen wir das einfach in der Form

$$(a - b)(x + y) = ax + ay - bx - by \quad (7.3)$$

aus. Jedes Produkt im Ergebnis mit b als Faktor hat ein Minuszeichen bekommen. Und jetzt ein Beispiel mit zwei Minuszeichen:

$$\begin{aligned} (a - b)(x - y) &= (a + (-b))(x + (-y)) = \\ &= ax + a(-y) + (-b)x + (-b)(-y) = ax - ay - bx + by, \end{aligned} \quad (7.4)$$

was wir einfach in der Form

$$(a - b)(x - y) = ax - ay - bx + by \quad (7.5)$$

berechnen. Wo zwei Minuszeichen in einem Produkt aufeinander treffen, wird ein Plus daraus (hier im letzten Summanden des Ergebnisses). Dieses Rezept überträgt sich natürlich auch auf Klammern, in denen mehr als zwei Summanden stehen.

8 Mehrfache Produkte von Termen

Um etwa das Produkt von mehr als zwei Termen, die ihrerseits Summen von Termen sind, auszumultiplizieren, beispielsweise

$$(a + 2b)(3a^2 - b^2)(b - 2a), \quad (8.1)$$

verwenden Sie die (durch das Assoziativgesetz für die Multiplikation ausgedrückte) Tatsache, dass es auf die Reihenfolge, in der Sie die Produkte bilden, nicht ankommt. Sie können also etwa zuerst $(a + 2b)(3a^2 - b^2)$ berechnen und das Ergebnis mit $b - 2a$ multiplizieren. Die Rechnung sieht dann so aus:

$$\begin{aligned} (a + 2b)(3a^2 - b^2)(b - 2a) &= (3a^3 - ab^2 + 6ba^2 - 2b^3)(b - 2a) = \\ &= 3a^3b - 6a^4 - ab^3 + 2a^2b^2 + 6a^2b^2 - 12a^3b - 2b^4 + 4ab^3 = \\ &= -6a^4 - 9a^3b + 3ab^3 + 8a^2b^2 - 2b^4. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Gehen Sie die Rechnung Schritt für Schritt durch! Wir haben hier in allen Produkten a links von b gestellt, um im letzten Schritt besser zu erkennen, welche sich nur durch numerische Vorfaktoren unterscheiden und daher zusammengefasst werden können.

9 Terme richtig „anschauen“

Neben der Fähigkeit zu formalen Umformungen, also der korrekten Anwendung der jeweils geeigneten Rechengesetze, lohnt sich beim Umgang mit einem Term der Versuch, *seine Struktur zu verstehen*. Dabei sollten Sie das Entscheidende an den Variablen, nämlich für Zahlen zu stehen, nicht vergessen. Ein Beispiel dafür war (6.1). Betrachten wir als zweites Beispiel den „Bruchterm“

$$\frac{1}{x^2 + 3} \quad (9.1)$$

und gehen einige seiner Eigenschaften durch, die man auf den ersten Blick (durch „richtiges Anschauen“) erkennen kann:

- Für $x = 0$ reduziert er sich auf $\frac{1}{3}$.
- Wird x , angefangen bei 0, größer gemacht, so wird der Nenner größer und der gesamte Bruch daher kleiner.

- Wird x *sehr groß* (eine Million), so wird der Zahlenwert des Terms *betragsmäßig sehr klein*.⁹
- Wird x *sehr groß* (eine Million), so wird der Zahlenwert des Terms ungefähr gleich jenem des (einfacheren) Terms $\frac{1}{x^2}$, denn im Vergleich zu einem sehr großen x (und einem noch größeren x^2) fällt der Summand 3, der im Nenner steht, kaum mehr ins Gewicht.
- Wird x durch $-x$ ersetzt, so ändert sich nichts, da $(-x)^2 = x^2$ ist. Daher wissen wir ohne jede Rechnung, dass der Term etwa für $x = -12.43$ den gleichen Wert annimmt wie für $x = 12.43$.
- Da x^2 nie negativ werden kann, ist der Nenner immer ≥ 3 . Der gesamte Term (1 dividiert durch eine Zahl, die größer oder gleich 3 ist) kann daher nie größer als $\frac{1}{3}$ sein – egal, welche Zahl wir für x einsetzen.
- Da der Nenner nie 0 werden kann, kann der Term für *jedes* reelle x berechnet werden – ohne Einschränkung. Wir sagen daher, dass der Term für alle reellen x *wohldefiniert* ist.
- Für jedes reelle x ist der Term positiv. Aufgrund seiner Konstruktion kann er weder 0 noch negativ werden – egal, welche Zahl wir für x einsetzen.
- Da wir nun wissen, dass der Term für alle reellen x wohldefiniert ist, dass er stets positiv ist und nie größer als $\frac{1}{3}$ sein kann, gilt

$$0 < \frac{1}{x^2 + 3} \leq \frac{1}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (9.2)$$

Ein schönes Ergebnis, das wir praktisch ohne Berechnung, nur durch „richtiges Anschauen“ und elementares Zahlenverständnis erzielt haben!

Durch Beobachtungen dieser Art bekommt jeder Term so etwas wie eine „Individualität“, mit der wir uns anfreunden können. So können Sie beim Umgang mit Termen lernen, eine „Beziehung“ zu den mathematischen Objekten, mit denen Sie zu tun haben, aufzubauen – eine Fähigkeit, die das Verstehen erleichtert und sich insbesondere bei fortschreitendem Stoff bezahlt machen wird!

⁹ Leider ist die Formulierung „sehr klein“ nicht ganz eindeutig: Sowohl 0.0001 als auch -10000 können als „sehr klein“ angesehen werden. Hier ist ersteres gemeint, daher zur Sicherheit der Zusatz „betragsmäßig“. In der Regel ist mit „betragsmäßig sehr klein“ gemeint: Der Betrag ist sehr viel kleiner als 1. Wenn so ein Zusatz fehlt, muss man aus dem Kontext erschließen, was genau mit „sehr klein“ gemeint ist.

10 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Beweisen Sie das Distributivgesetz $a(b + c) = ab + ac$ auf geometrische Weise! Benutzen Sie dazu zwei Rechtecke, eines mit Seitenlängen a und b , und eines mit Seitenlängen a und c !

Lösung:

Ordnen Sie die beiden Rechtecke in Gedanken so an, dass zwei Seiten der Länge a nebeneinander liegen! Die beiden so aneinander gelegten Rechtecke bilden gemeinsam ein Rechteck mit Seitenlängen a und $b + c$. Der gesamte Flächeninhalt ist daher einerseits gleich der „großen“ Rechtecksfläche $a(b + c)$ und andererseits gleich der Summe der Flächeninhalte der einzelnen Rechtecke, also $ab + ac$.

- Multiplizieren Sie die Klammern aus: $-(c - c^2) - c(c - 1) =$

Lösung:

$$0$$

- Multiplizieren Sie die Klammern aus: $2a(a + x) - x(2a - x) =$

Lösung:

$$2ax + x^2$$

- Multiplizieren Sie die Klammern aus: $(u^2 - t^2)(u + 2t) - u(2t - u)(u + t) + 3t^2u =$

Lösung:

$$2t^3 + 3t^2u - 2t^2u$$

- Multiplizieren Sie die Klammern aus: $(1 - p)(1 + p + p^2 + p^3 + p^4) =$

Lösung:

$$1 - p^5. \text{ Alles andere fällt weg!}$$

- Für welche Werte von y ist der Term $\frac{y+1}{y-1}$ wohldefiniert?

Lösung:

Für alle Werte $y \neq 1$. Für $y = 1$ ergibt sich eine Division durch 0.

- Welche Werte kann der Term $4 + (x - 2y)^4$ annehmen, wenn für x und y reelle Zahlen eingesetzt werden?

Lösung:

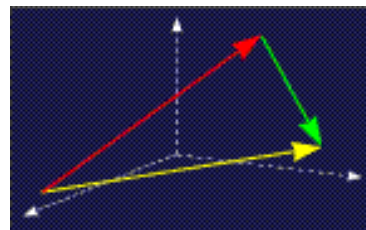
Er kann jeden Wert ≥ 4 annehmen.

- Eine etwas schwierigere Aufgabe: Wie müsste man r und s wählen, damit $\frac{1}{r-s}$ *sehr groß* ist? Geben Sie ein Beispiel an!

Lösung:

Es müsste $r > s$ sein, und die Differenz $r - s$ müsste sehr klein sein.
Beispiel: Mit $r = 1.000001$ und $s = 1$ ist $\frac{1}{r-s} = 1$ Million.

Dieses Skriptum wurde erstellt im April 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2021 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Identitäten

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

In diesem Skriptum werden einige einfache Identitäten für den Alltagsgebrauch vorgestellt. Die wichtigsten sind die elementaren Rechenregeln, die der Umformung von Termen dienen, und die binomischen Formeln.

1 Identitäten, Rechengesetze und Umformungsregeln

Die Grenze zwischen „Rechengesetzen“ („Rechenregeln“) und anderen „Identitäten“ ist unscharf. Im Kern bezeichnen beide Begriffe das Gleiche: die Aussage, dass zwei Terme, die verschieden aussehen, die gleichen Zahlenwerte haben, wenn alle Symbole, die in ihnen vorkommen, durch Zahlen ersetzt werden. Als Rechengesetze bezeichnet man aber sinnvollerweise die *elementaren* und *einfachen* unter ihnen, aus denen sich in weiterer Folge auch die komplizierteren ergeben. Wir listen zunächst die elementaren auf: Neben den Kommutativgesetzen für die Addition und die Multiplikation

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a b &= b a \end{aligned} \tag{1.1}$$

und den Assoziativgesetzen für die Addition und die Multiplikation

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c \\ a (b c) &= (a b) c \end{aligned} \tag{1.2}$$

wären hier noch die Regeln im Umgang mit 0 und 1

$$\begin{aligned} a + 0 &= a \\ 0 \cdot a &= 0 \\ 1 \cdot a &= a, \end{aligned} \tag{1.3}$$

die Regeln im Umgang mit negativen Zahlen¹

$$\begin{aligned} (-1)a &= -a \\ -(-a) &= a \\ (-a)b &= a(-b) = -ab \\ (-a)(-b) &= ab, \end{aligned} \tag{1.4}$$

die Regeln für das Dividieren

$$\begin{aligned} \frac{a}{1} &= a \\ \frac{b}{b} &= 1 \\ \frac{a}{b} \cdot c &= \frac{ac}{b} \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd} \\ \frac{-a}{b} &= \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \\ \frac{1}{\frac{b}{f}} &= \frac{f}{b} \end{aligned} \tag{1.5}$$

(für $b, f \neq 0$) und das Distributivgesetz²

$$\begin{aligned} a(b+c) &= ab+ac \\ (a+b)c &= ac+bc \end{aligned} \tag{1.6}$$

zu nennen. Letzteres gilt auch für mehr als zwei Summanden in der Klammer, also etwa

$$a(b+c+d+f+g) = ab+ac+ad+af+ag. \tag{1.7}$$

Für den Fall $a = -1$ ergibt sich die Regel, dass ein „Minus“ vor einer Klammer zu einer Umkehr aller Vorzeichen führt, also beispielsweise

$$-(b-c+d) = -b+c-d. \tag{1.8}$$

Alle bisher hingeschriebenen Regeln³ sind Identitäten. Wir werden sie im Folgenden benutzen, um weitere Identitäten zu gewinnen, d.h. wir verwenden sie als **Regeln für die Umformung von Termen**. Beachten Sie, dass Sie alle diese Regeln (sowie auch alle folgenden Identitäten) ebenso in „umgekehrter Reihenfolge“ lesen können, also beispielsweise die erste von (1.6) in der Form

$$ab+ac = a(b+c). \tag{1.9}$$

¹ Beachten Sie, dass $-a$ nicht notwendigerweise für eine negative Zahl steht. Für $a = -5$ ist beispielsweise $-a = 5$.

² Aufgrund des Kommutativgesetzes der Multiplikation sagen beide Identitäten in (1.6) das Gleiche aus. Das Distributivgesetz regelt das „Klammern ausmultiplizieren“.

³ Sie sind nicht alle voneinander unabhängig – manche lassen sich aus anderen folgern. Die Zusammenstellung umfasst jene Regeln, die Sie sicher und schnell, ohne großartiges Nachdenken, wann immer es nötig ist, anwenden können sollten.

Diese Art, einen Term umzuformen, kann man als „Herausheben eines gemeinsamen Faktors aus einer Summe“ bezeichnen. Halten Sie sich bitte beim Umgang mit Klammern vor Augen, dass es manchmal nützlich ist, eine Klammer auszumultiplizieren (wie in (1.6)), während es in anderen Fällen günstiger ist, durch Herausheben eines Faktors eine Klammer zu „erzeugen“ (wie in (1.9)). Welche Umformungen in einem konkreten Fall die geeigneten sind, hängt davon ab, was man mit dem betreffenden Term vorhat. Oft geht es schlicht und einfach darum, einen etwas längeren und unübersichtlichen Ausdruck zu vereinfachen, sodass man ihm seine Struktur besser ansieht. Da kann es schon mal nötig sein, ein paar Umformungsschritte auszuprobieren und, falls sie nicht zu einer Vereinfachung führen, zu verwerfen.

2 Binomische Formeln

Die (drei) binomischen Formeln gehören zu den berühmtesten Identitäten. Sie lauten

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (2.1)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2.2)$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad (2.3)$$

und sollten Ihnen jederzeit locker aus der Feder fließen!

Der **Beweis** erfolgt einfach durch Ausmultiplizieren der Klammern nach dem zuvor beschriebenen Rezept, jeden Summanden der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer zu multiplizieren, dabei die Vorzeichen entsprechend zu berücksichtigen und alle diese Produkte zu addieren:

- Erste binomische Formel: $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- Zweite binomische Formel: $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- Dritte binomische Formel: $(a + b)(a - b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$.

Hier eine Anwendung:

$$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9. \quad (2.4)$$

Alles klar? (Falls nicht: Verwenden Sie (2.1) für $a = 2x$ und $b = 3$ und rechnen Sie Schritt für Schritt: $(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$.)

Die binomischen Formeln können nicht nur zum Ausmultiplizieren von Klammern verwendet werden, sondern – umgekehrt – auch dazu, einen Term zu **faktorisieren**, d.h. als Produkt anzuschreiben. Haben Sie beispielsweise den Term

$$y^2 - 2y + 1 \quad (2.5)$$

vor sich, so sollten Sie erkennen, dass er sich mit Hilfe der zweiten binomischen Formel als Quadrat schreiben lässt:

$$y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2. \quad (2.6)$$

So etwas lässt sich nicht mit jedem Term machen! Beispielsweise mit $y^2 - 2y + 2$ geht es nicht. Um zu erkennen, ob sich ein komplizierterer Term mit Hilfe der binomischen Formeln als Produkt schreiben lässt oder nicht, ist ein bisschen Übung und auch etwas Fingerspitzengefühl nötig.

3 Höhere Potenzen von $a + b$

Die binomische Formel (2.1) gibt das Quadrat einer Summe in ausmultiplizierter Form an. Manchmal werden höhere Potenzen einer Summe benötigt. Durch Ausmultiplizieren der Klammern finden wir

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (3.1)$$

und

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, \quad (3.2)$$

und wir könnten mit entsprechend wachsendem Aufwand noch einige weitere Potenzen der Form $(a + b)^n$ für $n = 5, 6, 7$ usw. ausmultiplizieren.

Um ganz allgemein die ausmultiplizierte Form einer Potenz von $a + b$ mit natürlichem Exponenten zu ermitteln, gibt es eine einfachere Methode. Von ihr handelt der *binomische Lehrsatz*, der in einem eigenen Skriptum behandelt wird.

4 Höhere Potenzen von $a - b$

Um $(a - b)^3$ oder $(a - b)^4$ in ausmultiplizierter Form zu erhalten, müssen wir nicht zum Start zurückkehren und die Klammern ausmultiplizieren wie zuvor. Stattdessen können wir in (3.1) oder (3.2) die Variable b einfach durch $-b$ ersetzen. Erinnern wir uns: Die Buchstaben a und b sind ja Platzhalter für reelle Zahlen. Da (3.1) und (3.2) Identitäten sind, also für *alle* reellen Zahlen a und b gelten, bleiben sie auch richtig, wenn a und b durch andere Terme ersetzt werden. Wird b durch $-b$ ersetzt, so wird b^2 durch $(-b)^2$ ersetzt, was aber gleich b^2 ist. b^3 wird durch $(-b)^3$ ersetzt, was gleich $-b^3$ ist. Allgemein fällt das Minuszeichen bei Potenzen von b mit geradem Exponenten weg, während es für Potenzen von b mit ungeradem Exponenten bestehen bleibt. Auf diese Weise finden wir

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad (4.1)$$

und

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4. \quad (4.2)$$

Wir sehen, dass sich die Vorzeichen der Vorfaktoren abwechseln (man sagt: sie „alternieren“), und das gilt auch für höhere Potenzen von $a - b$.

5 Einige weitere Identitäten

Jede Termumformung erzeugt eine Identität. Identitäten können in allen mathematischen Anwendungsbereichen auftreten, und in jedem mathematischen Gebiet, in dem neue Strukturen eingeführt werden (beispielsweise Logarithmen oder Winkelfunktionen), treten neue Identitäten auf, die von diesen Strukturen handeln. Beispiele für einfache Identitäten, die mit Hilfe der binomischen Formeln leicht nachgerechnet werden können, sind

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) \quad (5.1)$$

und

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab. \quad (5.2)$$

Eine besonders interessante Identität ist

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1}. \quad (5.3)$$

Sie gilt für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Beispielsweise für $n = 7$ lautet sie

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7) = 1 - x^8. \quad (5.4)$$

Rechnen Sie zur Übung zuerst (5.4) nach und versuchen Sie danach, (5.3) ganz allgemein zu beweisen! Ist $x \neq 1$, so kann aus (5.3) geschlossen werden, dass

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (5.5)$$

gilt. Das folgt einfach aus der Definition des Dividierens: Gilt $ab = c$ und ist $a \neq 0$, so gilt $b = \frac{c}{a}$. Wenden wir das auf $a = 1 - x$, $b = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ und $c = 1 - x^{n+1}$ an, so folgt (5.5) sofort aus (5.3). Dieses Ergebnis kann benutzt werden, um Summen vom Typ $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ mit vielen Summanden zu berechnen, ohne die Summanden einzeln addieren zu müssen, also etwa

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255. \quad (5.6)$$

Wie Sie sehen, gibt es Identitäten ganz unterschiedlicher Art.

Auch hinter so manchem „Zahlentrick“ steckt eine Identität, der eine einfache Termumformung zugrunde liegt. Vielleicht kennen Sie diesen: Um die Zahl 45 zu quadrieren, nehmen wir die Zehnerstelle, also 4, und multiplizieren sie mit der um 1 erhöhten Zahl, also 5. An das Ergebnis $4 \cdot 5 = 20$ hängen wir die Ziffern 25 und erhalten 2025, was genau 45^2 ist! Das klappt mit jeder zweistelligen Zahl, deren Einerstelle 5 ist. Der Grund dafür ist einfach: Eine zweistellige Zahl mit Zehnerstelle m und Einerstelle 5 kann in der Form $10m + 5$ geschrieben werden. Ihr Quadrat ergibt sich mit der ersten binomischen Formel zu

$$(10m + 5)^2 = 100m^2 + 100m + 25, \quad (5.7)$$

was wir auch – durch Herausheben von $100m$ aus der Summe der ersten beiden Summanden – in der Form

$$100m(m + 1) + 25 \quad (5.8)$$

schreiben können. Das Rezept zum Quadrieren unserer Zahl lautet also: Es wird $m(m + 1)$ berechnet, mit 100 multipliziert (wodurch an der Einer- und Zehnerstelle Nullen entstehen) und 25 addiert – was genau dem Trick entspricht (der hiermit bewiesen ist)! Er ist nichts anderes als eine Anwendung der Identität

$$(10m + 5)^2 = 100m(m + 1) + 25. \quad (5.9)$$

Damit beschließen wir unseren Einstieg in die Welt der Identitäten. Einen wichtigen, hier nicht behandelten Typ stellen Identitäten dar, in denen Brüche (d.h. Divisionen) eine entscheidende Rolle spielen. Ihnen ist ein eigenes Skriptum gewidmet.

6 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Multiplizieren Sie die Klammer aus: $(3p + z^3)^2 =$
Lösung:

$$9p^2 + 6pz^3 + z^6$$

- Multiplizieren Sie die Klammern aus: $(2a + b)^2 - (2a - b)^2 - (a - 2b)^2 + (a + 2b)^2 =$
Lösung:

$$8ab$$

- Multiplizieren Sie die Klammern aus: $(3t^4 + 4s^3)(3t^4 - 4s^3) =$
Lösung:

$$9t^8 - 48t^4s^3 + 16s^6$$

- Versuchen Sie, den Term $4u^4 - 4u^2v + v^2$ mit Hilfe einer der binomischen Formeln als Quadrat zu schreiben!
Lösung:

$$(u^2 - v)^2$$

- Versuchen Sie, den Term $16w^4 - q^2$ mit Hilfe einer der binomischen Formeln als Produkt zu schreiben!
Lösung:

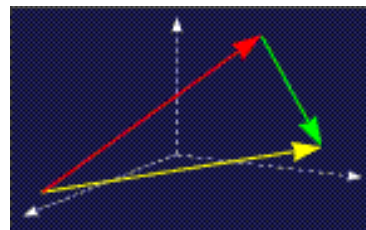
$$(4w^2 - q)(4w^2 + q)$$

- Eine etwas schwierigere Aufgabe: Multiplizieren Sie die Klammern aus:
 $((x + y)^2 + y^2)((x - y)^2 + y^2) =$
Lösung:

$$(x^2 + y^2)^2$$

Dieses Skriptum wurde erstellt im Mai 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“

(<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2021 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Bruchterme

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

In diesem Skriptum werden die Grundlagen des Rechnens mit Bruchtermen beschrieben.

1 Division und Brüche

Früh in der Schule lernen wir, dass die Division die „Umkehrung“ der Multiplikation ist. So ist etwa $24 : 8$ die Antwort auf die Frage „8 mal wieviel ist 24?“. Danach lernen wir „Bruchzahlen“ (also Brüche ganzer Zahlen) wie $\frac{2}{3}$ kennen, und später erfahren wir, dass diese Bruchzahlen rationale Zahlen sind. Das Bruchrechnen ist aber nicht auf ganze Zahlen beschränkt, sodass wir auch Brüche wie $\frac{\sqrt{2}}{3}$ oder $\frac{5}{\pi^2}$ betrachten können. Gibt es bei diesen letzten beiden Brüchen etwas zu „dividieren“, zu „berechnen“? Das ist eine Frage, die die Beziehung zwischen dem Dividieren und den Brüchen betrifft, und die wir zunächst einmal grundsätzlich klären wollen.

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ (wobei a , der **Zähler**, und b , der **Nenner**, für Zahlen stehen und $b \neq 0$ sein soll) ist nur eine andere (in der Mathematik üblicherweise bevorzugte) Art, $a : b$ anzuschreiben:

$$a : b = \frac{a}{b}. \quad (1.1)$$

Lesen Sie nun bitte die folgende Formulierung:

„Sind a und b reelle Zahlen und ist $b \neq 0$, so können wir die Division $\frac{a}{b}$ ausführen, und das Ergebnis ist wieder eine reelle Zahl.“

Einverstanden? So einleuchtend und harmlos dieser Satz klingt – er ist nicht unproblematisch! Was genau bedeutet es, „eine Division auszuführen“? Dass hier ein möglicher Stolperstein verborgen liegt, wird sichtbar, wenn wir uns vor Augen halten, dass ein Bruch auf zweierlei Weisen interpretiert werden kann:

- Ein Bruch kann verstanden werden als „Aufforderung, zu dividieren“.

- Ein Bruch stellt eine reelle Zahl dar.

In gewisser Weise kann man sagen, dass die Zahl, die ein Bruch darstellt, das *Ergebnis* einer Division ist. Aber Vorsicht! Sehen wir uns einige Beispiele an:

- Der Bruch $\frac{12}{3}$ kann als Aufforderung verstanden werden, 12 durch 3 zu dividieren – das Ergebnis dieser Division ist 4. Wenn wir nun einen Bruch auch als Darstellung einer Zahl akzeptieren, so stellen $\frac{12}{3}$ und 4 die gleiche Zahl dar, und in der Rechnung

$$\frac{12}{3} = 4 \quad (1.2)$$

ist das Gleichheitszeichen *wörtlich* gemeint: $\frac{12}{3}$ und 4 bezeichnen *dieselbe* Zahl (wenngleich die zweite Darstellung vorteilhafter ist). Bitte interpretieren Sie ein Gleichheitszeichen wie das in (1.2) nicht als „und das Ergebnis ist“, sondern als „ist gleich“ oder als „stellt das Gleiche dar wie“!

- Der Bruch $\frac{12}{5}$ kann ebenfalls als Aufforderung zur Division verstanden werden – aber was ist das Ergebnis? Wir haben zwei Möglichkeiten¹, es anzuschreiben: in der Dezimaldarstellung als 2.4 oder als Bruchzahl $\frac{12}{5}$. Erkennen Sie, was hier vor sich geht? Wenn man $\frac{12}{5}$ als Darstellung einer Zahl ansieht, dann gibt es hier nichts mehr zu „dividieren“! In der Mathematik wird die Darstellung als Bruch oft der Dezimaldarstellung vorgezogen. In diesem Sinn ist der Bruch $\frac{12}{5}$ nicht als Handlungsanweisung („dividiere!“), sondern als Darstellung einer Zahl anzusehen.
- Wie sieht es mit dem Bruch $\frac{12}{9}$ aus? Wir können ihn in der Form

$$\frac{12}{9} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{3} \quad (1.3)$$

kürzen und haben damit – das Gleichheitszeichen wieder *wörtlich* interpretiert – *drei* Möglichkeiten, das „Ergebnis“ darzustellen: als $\frac{12}{9}$ (wobei man berechtigterweise anmerken möchte, dass hier noch gekürzt werden kann), als Bruchzahl $\frac{4}{3}$ oder in der Dezimaldarstellung als 1.333... (was aber nur dann eine exakte Angabe ist, wenn dazu gesagt oder in irgendeiner Weise kenntlich gemacht wird, dass die Ziffernfolge nie abbricht).

- Den Bruch $\frac{\pi}{2}$ als „Aufforderung, zu dividieren“ anzusehen, kann kontraproduktiv sein, denn wie sollte diese Division aussehen? Ihr „Ergebnis“ in der Form 1.5707963 oder 1.5707963... anzugeben, ist nicht exakt, und zudem wird dabei verschleiert, woher diese Zahl kommt. Bitte akzeptieren Sie, dass die Form $\frac{\pi}{2}$ die einfachste und klarste Art ist, dieses „Ergebnis“ anzugeben – was de facto bedeutet, den Bruch nicht als „Aufforderung, zu dividieren“ aufzufassen, sondern einfach als Darstellung einer bestimmten reellen Zahl. Sollte nicht aus irgendeinem speziellen Grund ein numerischer Näherungswert von $\frac{\pi}{2}$ gefragt sein, so gibt es hier nichts zu „dividieren“!

Behalten Sie bitte immer im Auge, dass ein Bruch eine reelle Zahl darstellt und dass „das Dividieren“ in der Form, wie wir es in der Schule gelernt haben, lediglich in manchen Fällen dazu dient, die Darstellungsform zu vereinfachen!

¹ Eine dritte Möglichkeit, diese Zahl in der Form $2\frac{2}{5}$ im Sinn von „zwei + zwei Fünftel“ anzugeben, ist in der Mathematik eher unüblich, da das Fehlen eines Operationszeichens gewöhnlich als Multiplikation gedeutet wird und damit $2\frac{2}{5}$ auch als „zwei mal zwei Fünftel“ verstanden werden könnte.

2 Bruchrechnen mit Zahlen

Was bedeutet $2 \cdot \frac{3}{5}$? Wir können es uns vorstellen als „das Doppelte von $\frac{3}{5}$ “ oder als „drei Fünftel von 2“. Diese Zahl kann auf verschiedene Arten angeschrieben werden, die alle das Gleiche bedeuten:

$$2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{2 \cdot 3}{5} = 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{6}{5} = \frac{1}{5} \cdot 6 = \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{5}, \quad (2.1)$$

und schließlich kann auch ihre Dezimaldarstellung 1.2 angegeben werden. Alle unterschiedlichen Formen in (2.1) sind dadurch charakterisiert, dass die Faktoren 2 und 3 „oben“ stehen, also zum Zähler gehören, auch wenn sie nicht unbedingt oberhalb eines Bruchstrichs stehen. Stellen Sie sich 2 einfach als $\frac{2}{1}$ vor – jetzt steht die 2 oberhalb eines Bruchstrichs! Beachten Sie weiters, dass das „von“ in der Formulierung „drei Fünftel von 2“ auch als „mal“ verstanden werden kann: „Drei Fünftel von 2“ ist das gleiche wie „drei Fünftel mal 2“:

$$\text{„drei Fünftel von 2“} = \frac{3}{5} \cdot 2. \quad (2.2)$$

Was bedeutet $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$? Wir können es uns vorstellen als „die Hälfte von $\frac{3}{5}$ “ oder als „drei Fünftel von $\frac{1}{2}$ “. Auch hier kann das „von“ als „mal“ gelesen werden, und auch diese Zahl kann auf verschiedene Arten angeschrieben werden, die alle das Gleiche bedeuten:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2 \cdot 5} = 3 \cdot \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{2 \cdot 5} \cdot 3 = \frac{3}{10} = \frac{1}{10} \cdot 3 = 3 \cdot \frac{1}{10}, \quad (2.3)$$

und ihre Dezimaldarstellung ist 0.3. Alle unterschiedlichen Formen in (2.3) sind dadurch charakterisiert, dass die Faktoren 2 und 5 „unten“ stehen, also zu einem Nenner gehören – gleichgültig, ob nun ein Bruchstrich verwendet wird oder zwei.

Und schließlich kann auch ein Produkt wie $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}$ in verschiedenen Formen angeschrieben werden, die alle das Gleiche bedeuten:

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35} = 2 \cdot \frac{3}{7 \cdot 5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2 \cdot 3}{7} = \dots, \quad (2.4)$$

wobei es noch viele weitere Möglichkeiten gibt, die wir nicht alle hinschreiben. Hier stehen 2 und 3 immer „oben“, während 5 und 7 immer „unten“ stehen. Die Dezimaldarstellung dieser Zahl bricht nicht ab, näherungsweise ist sie durch 0.1714 gegeben.

Diese Beispiele geben die Regeln an, wie Brüche miteinander und mit Zahlen, die nicht als Brüche angeschrieben sind, multipliziert werden. Lassen Sie die „Muster“, die durch (2.1) – (2.4) ausgedrückt werden, auf sich wirken! Sie werden sie bei der Umformung von Brüchen benötigen!

Wir kommen nun zur Addition von Brüchen. „2 Siebentel + 3 Siebentel ist gleich 5 Siebentel“,

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}. \quad (2.5)$$

Ein „Siebentel“, symbolisch dargestellt durch die Zahl 7 im Nenner, kann hier genauso als Objekt aufgefasst werden wie ein Apfel in „2 Äpfel + 3 Äpfel ist gleich 5 Äpfel“. Das durch

(2.5) ausgedrückte „Muster“ gibt an, wie Brüche mit gleichem Nenner addiert werden. Analog funktioniert die Subtraktion

$$\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}. \quad (2.6)$$

Was passiert, wenn wir die größere von der kleineren Zahl abziehen? Ganz einfach:

$$\frac{2}{7} - \frac{5}{7} = \frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}. \quad (2.7)$$

Die Formen $\frac{-3}{7}$ und $-\frac{3}{7}$ stellen die gleiche Zahl dar, nämlich die „Gegenzahl“² von $\frac{3}{7}$. Das ergibt sich mit dem durch (2.1) ausgedrückten „Muster“, wenn wir es auch für negative Zahlen anwenden:

$$\frac{-3}{7} = \frac{(-1) \cdot 3}{7} = (-1) \cdot \frac{3}{7} = -\frac{3}{7}. \quad (2.8)$$

Und wenn eine negative Zahl im Nenner eines Bruchs steht? Mit $\frac{-1}{-1} = 1$ und dem durch (2.3) ausgedrückten „Muster“ ergibt sich

$$\frac{3}{-7} = \frac{-1}{-1} \cdot \frac{3}{-7} = (-1) \cdot \frac{3}{(-1) \cdot (-7)} = (-1) \cdot \frac{3}{7} = -\frac{3}{7}. \quad (2.9)$$

Ein Faktor -1 , gleichgültig, ob er im Zähler oder im Nenner steht, kann also als Minuszeichen vor den Bruch gezogen werden. Bitte merken Sie sich:

$$\frac{-3}{7} = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}. \quad (2.10)$$

Bei der Addition oder Subtraktion von Brüchen mit *verschiedenen* Nennern müssen die Brüche zuerst „auf gleichen Nenner“ gebracht werden. Dies geschieht in der Regel durch „Erweitern“. Ein Bruch wird erweitert, indem Zähler und Nenner mit der gleichen (von 0 verschiedenen) Zahl multipliziert werden. Beispielsweise kann der Bruch $\frac{5}{9}$ mit 4 erweitert werden:

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{20}{36}. \quad (2.11)$$

Die genaue Argumentation, die in der Praxis natürlich nicht so ausführlich angeschrieben wird, sieht so aus:

$$\frac{5}{9} = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{4} = \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{20}{36}, \quad (2.12)$$

wobei also zunächst $\frac{4}{4}$, was ja gleich 1 ist, eingefügt und danach das durch (2.4) dargestellte „Muster“ benutzt wurde. Berechnen wir nun also die Summe zweier Brüche mit unterschiedlichen Nennern, etwa

$$\frac{5}{9} + \frac{7}{12}. \quad (2.13)$$

Was könnte der gleiche Nenner sein? Die sparsamste Möglichkeit besteht darin, den ersten Bruch mit 4 und den zweiten mit 3 zu erweitern, sodass sich als gleicher Nenner 36 ergibt:

$$\frac{5}{9} + \frac{7}{12} = \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 4} + \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{20}{36} + \frac{21}{36} = \frac{41}{36}. \quad (2.14)$$

Wieso aber ist das die sparsamste Möglichkeit der Erweiterung? Im Rahmen der ganzen Zahlen ist 36 das „kleinste gemeinsame Vielfache“ der ursprünglichen Nenner 9 und 12. Das erkennen wir an der Zerlegung der beiden Nenner in Primzahlen:

² Für jede reelle Zahl $x \neq 0$ bezeichnen wir $-x$ als ihre „Gegenzahl“.

- $9 = 3 \cdot 3$
- $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

Ein Faktor 3 ist beiden gemeinsam. Auf ein möglichst kleines gemeinsames Vielfaches fehlt der 9 ein Faktor $2 \cdot 2$, also 4, und der 12 fehlt ein Faktor 3:

- $9 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$
- $12 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

Eine ungeschicktere (aber ebenfalls korrekte) Berechnung von (2.13) besteht darin, jeden Bruch mit dem Nenner des anderen zu erweitern, sodass als gleicher Nenner das Produkt der beiden ursprünglichen Nenner (also $9 \cdot 12 = 108$) entsteht:

$$\frac{5}{9} + \frac{7}{12} = \frac{5 \cdot 12}{9 \cdot 12} + \frac{7 \cdot 9}{12 \cdot 9} = \frac{60}{108} + \frac{63}{108} = \frac{123}{108}. \quad (2.15)$$

Wird nun noch bemerkt, dass 123 und 108 beide durch 3 teilbar sind, ergibt sich durch Kürzen mit $\frac{41}{36}$ das gleiche Resultat wie in (2.14).

Nun bleibt noch die Division von Brüchen zu besprechen. Dazu bemerken wir, dass der Kehrwert³ von 3 gleich $\frac{1}{3}$ ist und der Kehrwert von $\frac{1}{3}$ gleich 3 ist. Da eine Division durch eine Zahl als Multiplikation mit ihrem Kehrwert angesehen werden kann, gilt: Eine Division durch $\frac{1}{3}$ ist das Gleiche wie eine Multiplikation mit 3. Hier ein Beispiel:

$$\frac{7}{\frac{1}{3}} = 7 \cdot 3 = 21. \quad (2.16)$$

In analoger Weise bemerken wir, dass der Kehrwert von $\frac{2}{3}$ gleich $\frac{3}{2}$ ist (und umgekehrt), denn es gilt ja $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$. Eine Division durch $\frac{2}{3}$ ist daher das Gleiche wie eine Multiplikation mit $\frac{3}{2}$. Ein Beispiel:

$$\frac{7}{\frac{2}{3}} = 7 \cdot \frac{3}{2} = \frac{7 \cdot 3}{2} = \frac{21}{2}. \quad (2.17)$$

Statt der Zahl 7 im vorigen Beispiel können wir ebenfalls einen Bruch nehmen:

$$\frac{\frac{7}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{21}{10}. \quad (2.18)$$

Dieses „Muster“ zur Berechnung eines *Doppelbruchs* wird manchmal in der Form „Produkt der Außenglieder durch Produkt der Innenglieder“ eingelernt, aber für das Verstehen günstiger ist es, sich vor Augen zu halten, dass die Division durch einen Bruch das Gleiche ist wie die Multiplikation mit seinem Kehrwert.

³ Ist $x \neq 0$, so bezeichnen wir $\frac{1}{x}$ als Kehrwert von x .

3 Bruchrechnen mit Termen

Sollen Bruchterme multipliziert, addiert, subtrahiert und dividiert werden, so müssen wir genau genommen nur die „Muster“, die im vorigen Abschnitt aufgetreten sind, benutzen, denn Terme stehen ja für nichts anderes als für Zahlen, die sich ergeben, wenn anstelle der Variablen (der „Platzhalter“) Zahlen eingesetzt werden. Aus diesen „Mustern“ ergeben sich einige allgemeine **Regeln der Bruchrechnung**, die wir nun zusammenstellen. Dabei setzen wir voraus, dass die Werte der Variablen stets so gewählt sind, dass im Nenner nie 0 steht. Wie in der Termrechnung üblich, schreiben wir den „Malpunkt“ nur zwischen Zahlen an, ansonsten lassen wir ihn weg.

- **Produkt zweier Bruchterme:**

$$\frac{a}{b} \frac{x}{y} = \frac{ax}{by}. \quad (3.1)$$

In dieser knapp ausgedrückten Regel stehen a , b , x und y für beliebige Terme. So gilt beispielsweise

$$\frac{z^3 + w - 1}{4u + w} \frac{z + 2}{zu} = \frac{(z^3 + w - 1)(z + 2)}{(4u + w)zu}. \quad (3.2)$$

Als Spezialfall der Regel (3.1) mit $b = 1$ ergibt sich

$$a \frac{x}{y} = \frac{ax}{y}. \quad (3.3)$$

Ein Faktor (hier a) kann also in den Zähler geschrieben werden (und auch wenn man das nicht tut, sollte man ihn sich als dem Zähler zugehörig vorstellen).

Das **Kürzen** und das **Erweitern** eines Bruchs ergibt sich als Spezialfall von (3.1) für $a = b$:

$$\frac{ax}{ay} = \frac{x}{y}. \quad (3.4)$$

Gekürzt wird, indem ein gemeinsamer Faktor von Zähler und Nenner (hier a) weggelassen wird. Das wird im Zug einer Rechnung meist in der Form

$$\frac{\cancel{a}x}{\cancel{a}y} = \frac{x}{y} \quad (3.5)$$

gekennzeichnet. Erweitert wird, indem Zähler und Nenner den gleichen zusätzlichen Faktor a bekommen. Kürzen und erweitern beruhen beide auf der Tatsache, dass $\frac{a}{a} = 1$ ist.

Hinweis zur Vermeidung von Fehlern: Bitte beachten Sie, dass nur ein gemeinsamer *Faktor* von Zähler und Nenner gekürzt werden kann! Eine Rechnung wie

$$\frac{ax + 1}{ax - 1} = \frac{\cancel{a}x + 1}{\cancel{a}x - 1} = \frac{x + 1}{x - 1} \quad (3.6)$$

ist **falsch**, da hier a *kein Faktor* von Zähler und Nenner ist! Eine korrekte Kürzung hingegen ist beispielsweise beim folgenden Bruchterm möglich (und wird hier *ganz* ausführlich angeschrieben):

$$\frac{a y + 2 a}{a y - 2 a} = \frac{a (y + 2)}{a (y - 2)} = \underbrace{\frac{a}{a}}_{=1} \frac{y + 2}{y - 2} = \frac{y + 2}{y - 2}. \quad (3.7)$$

Um Brüche effizient kürzen zu können, sollten Sie versuchen, Zähler und Nenner auf mögliche gemeinsame Faktoren, die nicht auf den ersten Blick ersichtlich sind, zu untersuchen! Hier ein Beispiel:

$$\frac{4 p^2 - q^2}{p q (2 p - q)} = \frac{(2 p + q) (2 p - q)}{p q (2 p - q)} = \frac{2 p + q}{p q}. \quad (3.8)$$

Hier wurde im Zähler eine binomische Formel angewandt, um $4 p^2 - q^2$ in ein Produkt zu zerlegen.

- **Division zweier Bruchterme (Doppelbruch):**

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}} = \frac{a}{b} \frac{y}{x} = \frac{a y}{b x}, \quad (3.9)$$

wobei a , b , x und y für beliebige Terme stehen. Als Spezialfall mit $b = 1$ ergibt sich daraus

$$\frac{\frac{a}{x}}{\frac{y}{y}} = a \frac{y}{x} = \frac{a y}{x}. \quad (3.10)$$

Als Spezialfall von (3.9) mit $y = 1$ ergibt sich

$$\frac{\frac{a}{b}}{x} = \frac{a}{b} \frac{1}{x} = \frac{a}{b x}. \quad (3.11)$$

Die Regeln (3.9) und (3.10) beruhen auf der Tatsache, dass die Division durch $\frac{x}{y}$ das Gleiche ist wie die Multiplikation mit $\frac{y}{x}$. Die Regel (3.11) beruht auf der Tatsache, dass die Division durch x das Gleiche ist wie die Multiplikation mit $\frac{1}{x}$.

- **Regeln für den Umgang mit dem Minuszeichen:**

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad (3.12)$$

und

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}. \quad (3.13)$$

- **Summe von Brüchen mit gleichem Nenner:**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = \frac{x + y}{a}. \quad (3.14)$$

Ersetzen wir y durch $-y$, so ergibt sich

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{a} = \frac{x - y}{a}. \quad (3.15)$$

- **Summe von Brüchen mit verschiedenen Nennern:** Die einzige wirklich *allgemeine* Regel, die wir zur Berechnung einer Summe von Brüchen mit verschiedenen Nennern angeben können, lautet

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{x b}{a b} + \frac{y a}{b a} = \frac{x b + y a}{a b}. \quad (3.16)$$

Hier wurden die Brüche so erweitert, dass der entstehende gleiche Nenner das Produkt $a b$ der beiden ursprünglichen Nenner ist. In konkreten Fällen kann es jedoch, analog zum obigen Beispiel (2.14), „sparsamere“ Formen geben, die Brüche auf einen gleichen Nenner zu bringen. Ein Beispiel:

$$\frac{2x+1}{x(x+3)} + \frac{1-x}{(x-2)(x+3)} = \frac{(2x+1)(x-2)}{x(x+3)(x-2)} + \frac{(1-x)x}{(x-2)(x+3)x}. \quad (3.17)$$

Hier muss der erste Bruch nur mit $x-2$ und der zweite nur mit x erweitert werden, um einen gleichen Nenner zu erzielen. Wir schreiben ihn einheitlich als $x(x-2)(x+3)$ und rechnen weiter:

$$(3.17) = \frac{(2x+1)(x-2) + (1-x)x}{x(x-2)(x+3)} = \frac{x^2 - 2x - 2}{x(x-2)(x+3)}, \quad (3.18)$$

wobei nur der Zähler durch Ausmultiplizieren der Klammern vereinfacht wurde. So können wir das Ergebnis stehen lassen. Es gibt keinen Grund, den Nenner ebenfalls auszumultiplizieren!

Um Brüche effizient addieren zu können, sollten Sie versuchen, die auftretenden Nenner auf mögliche gemeinsame Faktoren, die nicht auf den ersten Blick ersichtlich sind, zu untersuchen! Hier zwei Beispiele:

$$\begin{aligned} \frac{3}{x^2+2x} - \frac{2x}{x+2} &= \frac{3}{x(x+2)} - \frac{2x}{x+2} = \\ &= \frac{3}{x(x+2)} - \frac{2x^2}{x(x+2)} = \frac{3-2x^2}{x(x+2)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{a}{a^2+2a+1} + \frac{1}{a+1} &= \frac{a}{(a+1)^2} + \frac{1}{a+1} = \\ &= \frac{a}{(a+1)^2} + \frac{a+1}{(a+1)^2} = \frac{a+a+1}{(a+1)^2} = \frac{2a+1}{(a+1)^2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

In (3.19) wurde im ersten Nenner x herausgehoben, in (3.20) wurde eine binomische Formel verwendet, um $a^2 + 2a + 1$ als Quadrat zu schreiben.

Der Vollständigkeit halber führen wir noch eine Regel an, die das Bilden von Potenzen betrifft:

- **Potenz eines Bruchs:**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}. \quad (3.21)$$

Diese Regel gilt zunächst, wenn a und b beide $\neq 0$ sind, für beliebige ganze Zahlen k und darüber hinaus, sofern a und b positiv sind, auch für beliebige rationale k . Als Spezialfall für $k = \frac{1}{2}$ ergibt sich

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}. \quad (3.22)$$

Schließlich noch eine Empfehlung: Vermeiden Sie, wenn möglich, allzu lange Bruchstriche! So können Sie beispielsweise den Term

$$\frac{5x^3 + 3xy + y^2 + ax - 7}{2} \quad (3.23)$$

auch einfacher in der Form

$$\frac{1}{2} (5x^3 + 3xy + y^2 + ax - 7) \quad (3.24)$$

anschreiben. (Erinnern wir uns: Division durch 2 ist das Gleiche wie Multiplikation mit $\frac{1}{2}$!)

Ausgerüstet mit diesen Regeln sollten Sie in der Lage sein, Terme, die in beliebiger Weise durch die Grundrechnungsarten (einschließlich des Dividierens, also des Bildens von Brüchen) und das Wurzelziehen kombiniert werden, zu berechnen bzw. zu vereinfachen.

4 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Berechnen Sie:

$$\frac{c-1}{2xb} \cdot \frac{x^2 b^3}{(c-1)^2} =$$

Lösung:

$$\frac{(1-2)c}{2^q x}$$

- Vereinfachen Sie:

$$\frac{s^2 - 7s}{s(s-7)} =$$

Lösung:

- Berechnen Sie, indem Sie auf gleichen Nenner bringen:

$$\frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} =$$

Lösung:

$$\frac{c^x}{v+x}$$

- Berechnen Sie, indem Sie auf gleichen Nenner bringen:

$$\frac{1}{u-1} + \frac{1}{u+1} =$$

Lösung:

$$\frac{1-c^n}{n \cdot c} \text{ wie ist die Gleichung, was das } \frac{(1-n)(1+n)}{n \cdot c}$$

- Berechnen Sie:

$$\frac{3a}{a^2 - y^2} - \frac{2}{a - y} =$$

Lösung:

$$\frac{c^{h-c} \cdot v}{h \cdot c - v}$$

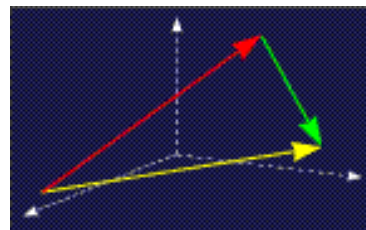
- Etwas knifflig, aber trotzdem machbar:

$$\frac{\frac{1}{h} + \frac{1}{h-1}}{\frac{1}{h} - \frac{1}{h-1}} =$$

Lösung:

$$4c - 1$$

Dieses Skriptum wurde erstellt im Mai 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2021 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Polynome

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

Dieses Skriptum gibt einen ersten Überblick über Polynome und stellt allerlei Wissenswertes über diese wichtigen mathematischen Objekte zusammen. Obwohl manche der vorgestellten Eigenschaften von Polynomen mit den hier zur Verfügung stehenden Methoden nicht gebührend begründet werden können, stellt ihre Kenntnis eine gute Vorbereitung auf spätere mathematische Stoffgebiete dar.

1 Was sind Polynome?

Ein Polynom (genauer: ein Polynom in *einer* Variable, die wir meistens x nennen) ist eine Summe von Termen, die ihrerseits jeweils Produkte einer Zahl mit einer Potenz x^n (mit $n \in \mathbb{N}$) sind. Ein Beispiel:

$$7x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 12x + 9. \quad (1.1)$$

Die einzelnen Summanden (hier $7x^4$, $-2x^3$, $5x^2$, $-12x$ und 9) werden als **Glieder** des Polynoms bezeichnet. Die Zahlen, die vor den Potenzen stehen, heißen **Koeffizienten** oder **Vorfaktoren**. Im obigen Beispiel ist der Koeffizient von x^4 gleich 7 und jener von x^3 gleich -2 . Der letzte Summand, 9 , wird auch das *konstante Glied* genannt und kann als Koeffizient von x^0 (was ja gleich 1 ist) angesehen werden. Einzelne Koeffizienten können auch 0 sein. Das ist beispielsweise beim Polynom $3x^3 - 4x + 5$ der Fall, das wir auch in der Form $3x^3 + 0 \cdot x^2 - 4x + 5$ lesen können: Hier verschwindet der Koeffizient von x^2 .

Die Ausdrücke $2x + \frac{5}{x} + 8$ und $7x^2 - 5\sqrt{x}$, die wir auch in der Form $2x + 5x^{-1} + 8$ und $7x^2 - 5x^{1/2}$ anschreiben können, sind *keine* Polynome, da nicht alle vorkommenden Exponenten von x aus \mathbb{N} sind.

Polynome können auch in anderen Schreibweisen angegeben werden. Ein Beispiel ist

$$x(x+3), \quad (1.2)$$

was nach Ausmultiplizieren der Klammer die Form $x^2 + 3x$ annimmt. Ob es sinnvoll ist, ein als Produkt gegebenes Polynom auszumultiplizieren, hängt davon ab, was man mit ihm tun möchte.

Der höchste auftretende Exponent wird **Grad** (manchmal auch **Ordnung**) des Polynoms genannt. (1.1) ist ein Polynom vom Grad 4 (ein Polynom vierten Grades). Ein Polynom vom Grad 1 (ein Polynom ersten Grades) wird auch *lineares*¹ Polynom genannt, ein Polynom vom Grad 2 (ein Polynom zweiten Grades) wird auch *quadratisches* Polynom genannt, und ein Polynom vom Grad 3 (ein Polynom dritten Grades) können wir auch als *kubisches* Polynom bezeichnen. Ein Polynom, das nur aus einem einzigen Glied besteht, wie beispielsweise $3x^5$, heißt *Monom*. Ein Polynom, das aus zwei Gliedern besteht, wie beispielsweise $3x^5 - 7x^2$, heißt *Binom* (ein Wort, von dem sich die Bezeichnungen *binomische Formel* und *binomischer Lehrsatz* ableiten). Ein Polynom, das nur aus einem konstanten Glied $\neq 0$ besteht, das also genau genommen nur eine Zahl ist, kann man auch als Polynom *nullten* Grades bezeichnen, um auszudrücken, dass diese Zahl als Polynom aufgefasst wird².

Ein Polynom, dessen Koeffizienten reelle Zahlen sind und dessen Variable ein Platzhalter für reelle Zahlen ist, kann – wenn man es ganz genau ausdrücken will – als *reelles* Polynom oder „Polynom über \mathbb{R} “ bezeichnet werden³.

Für manche allgemeinen Überlegungen müssen wir Polynome betrachten, deren Koeffizienten nicht konkret festgelegt sind. So ist beispielsweise jedes Polynom zweiten Grades von der Form

$$ax^2 + bx + c, \quad (1.3)$$

wobei a , b und c Platzhalter für seine Koeffizienten sind. In diesem Ausdruck kommen zwar vier verschiedene Buchstaben vor (a , b , c und x), aber sie dienen unterschiedlichen Zwecken. a , b und c stellen die Koeffizienten dar (auf deren konkrete Werte man sich nicht festlegen möchte, die aber als fix festgehalten gedacht und daher auch als **Konstanten** bezeichnet werden). Der Buchstabe x steht ebenfalls für konkrete Zahlenwerte, auf die man sich nicht festlegen möchte, aber diese Zahlenwerte stellt man sich am besten als *variabel* vor, was der Grund dafür ist, dass x als **Variable** des Polynoms bezeichnet wird⁴. Oft werden die Koeffizienten entsprechend den Exponenten der Potenzen, zu denen sie gehören, durchnummeriert. So kann ein allgemeines Polynom zweiten Grades auch in der Form

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (1.4)$$

¹ In manchen Texten wird mit dem Wort *linear* nur ein Polynom ersten Grades bezeichnet, dessen konstantes Glied gleich 0 ist. Siehe auch Fußnote 2.

² Manchmal werden konstante Polynome ebenfalls zu den *linearen* gezählt. Leider wird das Wort „linear“ in unterschiedlichen Bedeutungen gebraucht. Siehe dazu auch Fußnote 1. Das „Nullpolynom“, das nur aus dem konstanten Glied 0 besteht, kann – aus Gründen, die hier nicht wichtig sind – als Polynom vom Grad „minus unendlich“ angesehen werden.

³ Man kann auch Polynome mit anderen mathematischen Objekten bilden, etwa mit komplexen Zahlen oder mit Matrizen.

⁴ Dieser Unterschied zwischen a , b und c als Konstanten und x als Variable ist hier noch ein bisschen unscharf. Er wird präzisiert, wenn Polynome als *Funktionen* aufgefasst werden, was wir in diesem Skriptum aber nicht tun.

angeschrieben werden, wobei nun die Symbole a_2 , a_1 und a_0 die Koeffizienten darstellen.

Oft (aber nicht immer) ist es sinnvoll, die Glieder eines Polynoms in abfallender Reihenfolge der Exponenten zu ordnen, wie wir es bei den bisherigen Beispielen gemacht haben. Man könnte aber, da die Addition reeller Zahlen kommutativ ist, (1.1) genauso gut in der Form

$$9 - 12x + 5x^2 - 2x^3 + 7x^4 \quad (1.5)$$

oder mit irgendeiner anderen Reihenfolge der Summanden anschreiben.

Wir haben bisher nur Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten angeschrieben. Man sollte aber im Auge behalten, dass Polynome beliebige reelle Zahlen als Koeffizienten haben können. Beispielsweise ist

$$-\frac{2}{7}x^4 + \sqrt{3}x^3 - \frac{\pi^2 + 5}{4}x^2 - 12x + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (1.6)$$

ein Polynom wie jedes andere!

Die Variable eines Polynoms mit dem Buchstaben x zu bezeichnen, ist eine weit verbreitete Angewohnheit (und insofern bequem, als sich das Auge nach einiger Zeit daran gewöhnt, unter „ x “ automatisch eine Variable zu sehen), aber keineswegs verpflichtend⁵. So ist

$$s^2 - 2s + 1 \quad (1.7)$$

ein Polynom (zweiten Grades) in der Variable s .

In konkreten Anwendungssituationen stellen die Variablen von Polynomen Größen dar, die im betreffenden Gebiet eine Rolle spielen, und werden mit den dort üblichen Symbolen bezeichnet. Um ein Beispiel anzuführen: Der Anhalteweg beim Autofahren (d.h. die – in Meter gemessene – Strecke, die das Fahrzeug vom Zeitpunkt des Erkennens einer „normalen“ Situation, die ein Bremsen erfordert, bis zum Stillstand zurücklegt) wird mit der Faustformel

$$\text{Anhalteweg in normaler Situation} = \frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10} \quad (1.8)$$

berechnet⁶, wobei v die in km/h angegebene Geschwindigkeit (zum Zeitpunkt des Erkennens der Gefahr) ist. Das ist ein Polynom zweiten Grades in der Variable v . Der Koeffizient von v^2 ist $\frac{1}{100}$, jener von v ist $\frac{3}{10}$, und das konstante Glied ist gleich 0. So ergibt sich etwa für eine Geschwindigkeit von 60 km/h (also $v = 60$) der Anhalteweg (in Meter) zu

$$\frac{60^2}{100} + \frac{3 \cdot 60}{10} = 54. \quad (1.9)$$

Formel (1.8) kann dazu benutzt werden, um den im Autoverkehr einzuhaltenden Mindestabstand zu berechnen. Handelt es sich um eine „Gefahrenbremsung“, bei der besonders hart auf das Bremspedal gedrückt wird, wird die modifizierte Formel

$$\text{Anhalteweg in Gefahrensituation} = \frac{v^2}{200} + \frac{3v}{10} \quad (1.10)$$

⁵ Generell neigt man dazu, Variablen mit Buchstaben am Ende des Alphabets zu bezeichnen, Konstanten mit Buchstaben vom Anfang des Alphabets.

⁶ Der lineare Term $\frac{3v}{10}$ gibt den Reaktionsweg an, der quadratische Term $\frac{v^2}{100}$ den Bremsweg.

verwendet. Für eine gegebene Geschwindigkeit v ist (1.10) stets kleiner als (1.8).

Ein letztes Anwendungsbeispiel: Wird ein Gegenstand aus der Höhe h_0 mit Geschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen, so beträgt seine Höhe nach der Zeit t

$$-\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + h_0, \quad (1.11)$$

wobei $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ die Erdbeschleunigung ist⁷. Dieser Term kann als Polynom zweiten Grades in der Variable t aufgefasst werden. Die Koeffizienten sind hier nicht als konkrete Zahlen gegeben, sondern durch die Konstanten g , v_0 und h_0 ausgedrückt⁸. Diese Formel kann etwa dazu benutzt werden, um zu berechnen, wann der Gegenstand seine größte Höhe erreicht und welchen Wert diese hat. Mit $v_0 = 0$ und $h_0 = 0$ (wobei letzteres einfach bedeutet, dem Anfangsort die Höhe 0 zuzuweisen) ergibt sich das *Fallgesetz* von Galileo Galilei, das Sie wahrscheinlich aus dem Physikunterricht kennen.

2 Polynome multiplizieren

Viele Terme, mit denen wir es in der Mathematik zu tun haben, sind Polynome. Ein schöner Zug an der Gesamtheit aller Polynome besteht darin, dass wir sie mit Zahlen multiplizieren (d.h. Vielfache bilden), zueinander addieren, voneinander subtrahieren und miteinander multiplizieren können und dabei stets wieder Polynome erhalten. Insbesondere die Multiplikation von Polynomen ist interessant: Der Grad des Produkts zweier Polynome ist die *Summe* der Grade der beiden Polynome. So ist das Produkt eines Polynoms vom Grad 2 mit einem Polynom vom Grad 3 ein Polynom vom Grad 5. Beispiel:

$$(x^2 + 3x - 1)(4x^3 - 2x^2 + x - 5) = 4x^5 + \dots, \quad (2.1)$$

wobei die Punkte für weitere Glieder stehen, deren Exponenten aber alle kleiner als 5 sind. Ist Ihnen klar, warum das so ist? ($4x^5$ kommt zustande, indem in beiden Klammern jeweils das Glied mit dem größten Exponenten gewählt wird – kein anderes Produkt eines Glieds der ersten Klammer mit einem Glied der zweiten Klammer kann diesen Exponenten überbieten.) Wenn wir (2.1) ausmultiplizieren, so erhalten wir den vollständigen Ausdruck

$$(x^2 + 3x - 1)(4x^3 - 2x^2 + x - 5) = 4x^5 + 10x^4 - 9x^3 - 16x + 5. \quad (2.2)$$

Auch das Bilden einer Potenz eines Polynoms mit einer natürlichen Zahl als Exponenten (was ja nur ein Spezialfall des Multiplizierens ist) führt wieder auf ein Polynom. So berechnen wir mit Hilfe der binomischen Formeln

$$(3x + 4)^2 = 9x^2 + 24x + 16 \quad (2.3)$$

und

$$(3x - 4)^2 = 9x^2 - 24x + 16. \quad (2.4)$$

⁷ Luftwiderstand und Luftauftrieb sind hier vernachlässigt.

⁸ Der Index ₀ an den Symbolen v_0 und h_0 bezieht sich auf die Geschwindigkeit und die Höhe zum Anfangszeitpunkt, also zur Zeit $t = 0$.

Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes⁹ können wir Potenzen wie $(3x - 4)^5$ berechnen, und fleißiges Ausmultiplizieren von Klammern erlaubt es uns, auch Ungetümen wie $(7x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 12x + 9)^3$ zu Leibe zu rücken.

3 Polynome faktorisieren

Es ist aber nicht immer sinnvoll, Produkte von Polynomen auszumultiplizieren, denn die Faktoren eines Polynoms zeigen uns manche seiner Eigenschaften in recht direkter Form. So ist beispielsweise klar, dass das Polynom

$$(x - 5)(x^2 + 3x + 7) \quad (3.1)$$

den Wert 0 annimmt, wenn $x = 5$ gesetzt wird. Dann ist nämlich $x - 5 = 0$, und das Produkt von 0 mit einer anderen Zahl ist wieder 0. Der ausmultiplizierten Form, die sich nach einer kurzen Rechnung zu

$$(x - 5)(x^2 + 3x + 7) = x^3 - 2x^2 - 8x - 35 \quad (3.2)$$

ergibt, sieht man das nicht mehr auf den ersten Blick an! Der Faktor $x - 5$ des Polynoms (3.1) ist für sich genommen ein lineares Polynom (ein Polynom ersten Grades) und heißt daher **Linearfaktor**. Ein Polynom wie

$$(x - 3)(4x + 7) \quad (3.3)$$

ist von vornherein als Produkt von Linearfaktoren gegeben. Aus dieser Form gehen viele seiner Eigenschaften hervor, ohne dass wir es ausmultiplizieren müssen (beispielsweise, dass es den Wert 0 annimmt, wenn $x = 3$ oder $x = -\frac{7}{4}$ gesetzt wird).

Aus Gründen wie diesen möchte man manchmal von einem gegebenen Polynom mit einem Grad ≥ 2 wissen, ob es als Produkt von Polynomen niedrigeren Grades geschrieben werden kann. Im Rahmen der reellen Zahlen (auf die wir uns hier beschränken) ist das manchmal möglich und manchmal nicht¹⁰. Hier einige Beispiele:

- Wir multiplizieren (3.3) aus,

$$(x - 3)(4x + 7) = 4x^2 - 5x - 21, \quad (3.4)$$

und finden daher im Umkehrschluss, indem wir diese Beziehung „verkehrt herum“ in der Form

$$4x^2 - 5x - 21 = (x - 3)(4x + 7) \quad (3.5)$$

lesen, dass das Polynom $4x^2 - 5x - 21$ in der Form $(x - 3)(4x + 7)$, also als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann.

⁹ Siehe dazu das Skriptum *Der binomische Lehrsatz und die Binomialkoeffizienten*.

¹⁰ Im Rahmen der komplexen Zahlen ist es *immer* möglich. Das garantiert ein berühmter Satz von Carl Friedrich Gauß.

- Das Polynom $x^2 + 3x - 1$ lässt sich ebenfalls als Produkt von Linearfaktoren schreiben, aber um diese zu finden, muss man eine Gleichung lösen, was hier nicht das Thema ist¹¹.
- Indem wir (3.2) „verkehrt herum“ lesen, schließen wir, dass das Polynom $x^3 - 2x^2 - 8x - 35$ in der Form $(x - 5)(x^2 + 3x + 7)$ als Produkt geschrieben werden kann.
- Der zweite Faktor des vorigen Beispiels, $x^2 + 3x + 7$, lässt sich hingegen (im Rahmen der reellen Zahlen) *nicht* weiter in ein Produkt zerlegen¹². Um das einzusehen, müsste man quadratische Gleichungen lösen können, was wir hier nicht voraussetzen.
- Auch das Polynom $x^2 + 1$ kann nicht in ein Produkt zerlegt werden. Das ist (im Unterschied zum vorigen Beispiel) relativ leicht einzusehen: Wäre $x^2 + 1$ ein Produkt, so wäre es ein Produkt von Linearfaktoren, hätte also die Form $(x + a)(x + b)$. Für $x = -a$ und $x = -b$ müsste sein Wert gleich 0 sein. Aber $x^2 + 1$ kann nicht den Wert 0 annehmen, da es ein Quadrat (das immer ≥ 0 ist) plus 1 ist, also nie kleiner als 1 sein kann.
- Zwei letzte Beispiele: Mit ein bisschen Gefühl für die binomischen Formeln kann man erkennen, dass das Polynom $4x^2 - 4x + 1$ als $(2x - 1)^2$ geschrieben werden kann, also das Produkt von $2x - 1$ mit sich selbst ist. Und mit einer anderen binomischen Formel kann $9x^2 - 16$ in der Form $(3x + 4)(3x - 4)$ als Produkt geschrieben werden.

Diesen umgekehrten Vorgang, ein Polynom als Produkt zu schreiben, nennen wir **Faktorisierung**. Polynome zu faktorisieren, ist eine schwierigere Aufgabe als das Ausmultiplizieren von Klammern. Wir gehen hier nicht weiter auf dieses Problem ein, sondern bitten Sie, sich zu merken:

- Wenn man auf ein Produkt von Polynomen stößt, muss man es nicht gleich ausmultiplizieren. Ausmultiplizieren ist nur angebracht, wenn es einen Grund dafür gibt.
- Festzustellen, ob ein gegebenes Polynom faktorisiert werden kann (und, falls ja, seine Faktoren zu finden), ist zwar oft wünschenswert, aber nicht immer leicht. Für manche Polynome zweiten Grades können die Faktoren unter Ausnutzung der binomischen Formeln gefunden werden. Ganz allgemein werden Sie von Polynomen zweiten Grades feststellen können, ob sie sich faktorisieren lassen (und, falls ja, ihre Faktoren finden), sobald sie in der Lage sind, quadratische Gleichungen zu lösen.

¹¹ Aber für den Fall, dass es Sie interessiert, sei das Ergebnis verraten: Es gilt $x^2 + 3x - 1 = \left(x + \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$.

¹² Vielleicht ist Ihnen aufgefallen, dass wir über die Faktoren von Polynomen so sprechen wie über die Primfaktoren natürlicher Zahlen. Tatsächlich kann man beweisen, dass die Faktoren eines Polynoms bis auf multiplikative Konstanten *eindeutig* sind. Das Faktorisieren eines Polynoms kann man daher als „Zerlegung“ betrachten, ähnlich wie die Zahl 60 in der Form $60 = 6 \cdot 10 = 6 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ Schritt für Schritt in Primfaktoren „zerlegt“ werden kann. Das garantiert, dass etwa das Polynom $4x^2 - 5x - 21$ keine andere Faktorisierung als die in (3.5) angegebene besitzt (ausgenommen solche, die lediglich durch das Herumschieben multiplikativer Konstanten gewonnen werden wie $4(x - 3)(x + \frac{7}{4})$, was aus $(x - 3)(4x + 7)$ durch Herausheben von 4 aus der zweiten Klammer entsteht).

4 Polynome dividieren

Polynome können nicht nur multipliziert, sondern – ähnlich wie Zahlen – auch dividiert werden. Erinnern wir uns, was eine Division ist: Der Quotient $12 : 5$, was wir lieber als Bruchzahl $\frac{12}{5}$ schreiben, ist die Antwort auf die Frage „Wieviel mal 5 ist 12?“. Analog ist der Bruchterm

$$\frac{3x^2 + x - 7}{2x + 1} \quad (4.1)$$

die Antwort auf die Frage „Welcher Term mal $2x + 1$ ist $3x^2 + x - 7$?“. Der Quotient zweier Polynome ist in den meisten Fällen allerdings *kein* Polynom. Manchmal aber doch:

$$\frac{4x^2 - 5x - 21}{x - 3} = 4x + 7. \quad (4.2)$$

Woher wissen wir das? Blicken Sie auf die Identität (3.4)! Mit ihrer Hilfe können wir berechnen

$$\frac{4x^2 - 5x - 21}{x - 3} = \frac{(x - 3)(4x + 7)}{x - 3} = 4x + 7, \quad (4.3)$$

wobei wir den Bruchterm durch $x - 3$ gekürzt haben¹³! Das Faktorisieren von Polynomen ist also bei der Berechnung ihrer Quotienten hilfreich, ähnlich wie die Kürzung des Bruchs $\frac{21}{7} = \frac{3 \cdot 7}{7} = 3$ auf der Zerlegung der Zahl 21 in ein Produkt beruht.

Beachten Sie aber: Diese Methode klappt nicht immer! So lässt sich der Quotient (4.1) nicht in analoger Weise wie (4.3) kürzen, da Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Faktor besitzen. Ein bisschen entspricht das der Situation, dass die Bruchzahl $\frac{25}{7}$ nicht gekürzt werden kann, da 25 und 7 keinen gemeinsamen (Prim-)Faktor, also keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Die Division $25 : 7$ lässt sich aber „teilweise“ ausführen, wenn der „Rest“ berücksichtigt wird: Schon früh in der Schule rechnen wir $25 : 7$ „ist gleich 3 mit Rest 4“, was nichts anderes aussagt als $\frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7}$. Etwas Analoges kann man auch mit Polynomen machen. So lässt sich beispielsweise (4.1) in der Form

$$\frac{3x^2 + x - 7}{2x + 1} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} - \frac{27}{4(2x + 1)} \quad (4.4)$$

schreiben. Wenn wir das mit

$$\frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7} \quad (4.5)$$

vergleichen, spielt das Polynom $\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$ die Rolle des Divisionsergebnisses „ohne Rest“ und $-\frac{27}{4}$ die Rolle des „Rests“. Wir gehen nicht darauf ein, wie man die Form (4.4) finden kann (die Kunst, das zu tun, heißt *Polynomdivision*¹⁴), sondern merken uns, dass der Quotient zweier Polynome in den meisten Fällen kein Polynom ist, aber manchmal – wenn der „Rest“ Null ist, wie es etwa bei (4.2) der Fall ist – schon. Ganz wie bei der Division ganzer Zahlen!

¹³ Genau genommen müsste man jetzt dazusagen, dass (4.3) nur dann gilt, wenn $x \neq 3$ ist, denn für $x = 3$ stünde hier eine Division durch 0.

¹⁴ Die Polynomdivision wurde früher angewandt, um bestimmte Berechnungen zu vereinfachen. Seitdem Computerprogramme uns bei der Lösung mathematischer Probleme helfen, wird sie als nicht mehr so wichtig erachtet und ist mittlerweile aus den meisten Mathematik-Lehrplänen der Schulen verschwunden.

5 Die Werte von Polynomen

Wir haben bereits gesehen, dass ein Polynom für gewisse Werte der Variable gleich 0 sein kann. In vielen mathematischen Anwendungen, in denen Polynome auftreten, möchte man sich grob darüber orientieren, welche Zahlenwerte ein Polynom annehmen kann, wenn die Variable alle möglichen Werte durchläuft. Hier einige Regeln, die dabei helfen:

- Wie verhält sich ein Polynom, wenn seine Variable einen *sehr großen* Wert annimmt? Betrachten wir als Beispiel das Polynom

$$2x^3 + 7x^2 - 5x + 3. \quad (5.1)$$

Setzen wir x gleich einer Million, so ist sein Wert gleich

$$2 \cdot 1000000^3 + 7 \cdot 1000000^2 - 5 \cdot 1000000 + 3 = 2000006999995000003. \quad (5.2)$$

Erkennen Sie, was hier passiert? Der erste Summand, $2 \cdot 1000000^3$, also $2 \cdot 10^{18}$, ist um ein Vielfaches größer als alle anderen Summanden zusammen. Letztere betragen weniger als ein Tausendstel Prozent dieses ersten Summanden! Wird x etwa auf eine Milliarde vergrößert, so wird die dominante Rolle dieses ersten Summanden noch ausgeprägter. Das Verhalten unseres Polynoms (5.1) für große x wird daher fast ausschließlich von seinem *führenden Glied* $2x^3$ bestimmt, d.h. vom Summanden mit dem größten Exponenten. In diesem Sinn können wir schreiben

$$2x^3 + 7x^2 - 5x + 3 \approx 2x^3 \quad \text{für sehr große } x. \quad (5.3)$$

Diese Regel gilt für beliebige Polynome, unabhängig von den Zahlenwerten ihrer Koeffizienten: Für genügend große Werte der Variable wird der Wert eines Polynoms von seinem führenden Glied dominiert.

- Wie verhält sich das Polynom (5.1), wenn x negativ ist und sein Betrag *sehr groß* ist, also wenn etwa x gleich minus einer Million gesetzt wird? Die Antwort: Auch in diesem Fall wird der Zahlenwert vom führenden Glied dominiert. Konkret ergibt sich aus (5.1) mit $x = -1000000$ der Wert

$$-2 \cdot 1000000^3 + 7 \cdot 1000000^2 + 5 \cdot 1000000 + 3 = -1999992999994999997. \quad (5.4)$$

Auch hier sind alle anderen Summanden im Vergleich zum ersten praktisch vernachlässigbar. Wir können daher (5.3) verallgemeinern zu:

$$2x^3 + 7x^2 - 5x + 3 \approx 2x^3 \quad \text{falls } |x| \text{ sehr groß ist.} \quad (5.5)$$

Auch diese Regel gilt für beliebige Polynome, unabhängig von den Zahlenwerten ihrer Koeffizienten: Ist der Betrag der Variable genügend groß, so wird der Wert des Polynoms von seinem führenden Glied dominiert¹⁵.

¹⁵ Der Grund, warum wir hier mit dem *Betrag* argumentieren, liegt in unserer Sprache: $x = 1000000$ können wir als „sehr groß“ bezeichnen. Aber wie kann $x = -1000000$ charakterisiert werden? Die Bezeichnung „sehr klein“, die mathematisch im Sinne von „sehr weit links auf der Zahlengeraden“ korrekt wäre, könnte missverstanden werden, denn „sehr klein“ im üblichen Sinn wäre eher $x = 0.000001$. Um $x = -1000000$ zu charakterisieren, sagen wir daher, dass $x < 0$ und sein Betrag $|x| = 1000000$ sehr groß ist.

- Ein Polynom, dessen Grad eine *ungerade* Zahl ist, kann immer positive und negative Werte annehmen. Das ergibt sich unmittelbar aus dem bisher Gesagten. Betrachten wir wieder (5.1), ein Polynom dritten Grades, als Beispiel. Ist x sehr groß, so wird sein Wert vom führenden Glied $2x^3$ dominiert und ist daher positiv. Ist $x < 0$ und $|x|$ sehr groß, so wird sein Wert ebenfalls vom führenden Glied $2x^3$ dominiert und ist daher negativ.
- Aus dem Vorigen ergibt sich ein wichtiger Sachverhalt: Ein Polynom, dessen Grad eine *ungerade* Zahl ist, nimmt zumindest für *einen* Variablenwert den Wert 0 an. Der genaue Beweis dieser Eigenschaft ist nicht ganz leicht, aber die Grundidee ist einfach: Wird die Variable x auf der Zahlengeraden von einem Wert, für den das Polynom negativ ist, zu einem Wert, für den es positiv ist, „bewegt“, so gibt es irgendwo ein x , bei dem der Wert des Polynoms von einem negativen zu einem positiven „umschlägt“, und dort ist er gleich 0.
- Von einem Polynom, dessen Grad eine *gerade* Zahl ist, kann von vornherein nicht so einfach gesagt werden, welche Vorzeichen seine Werte annehmen können. Beispiele:
 - $x^2 + 1$ kann nur positive Werte annehmen.
 - $-x^2 - 1$ kann nur negative Werte annehmen.
 - $x^2 - 1$ kann Werte beiderlei Vorzeichens annehmen. Für $x = 0$ ist dieses Polynom negativ, für $x = 2$ ist es positiv.

Wir können aber über ein Polynom, dessen Grad eine gerade Zahl ist, sagen, dass es entweder *nach unten beschränkt* ist (d.h. dass es eine untere Grenze für die Werte gibt, die es annehmen kann) oder *nach oben beschränkt* ist (d.h. dass es eine obere Grenze für die Werte gibt, die es annehmen kann). Der erste Fall tritt ein, wenn der Koeffizient des führenden Glieds positiv ist, der zweite Fall tritt ein, wenn dieser Koeffizient negativ ist. So gilt beispielsweise, dass die Werte des Polynoms $-3x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 9$ nicht beliebig groß werden können, gleichgültig, wie x gewählt wird. Der genaue Beweis dieser Eigenschaft ist nicht ganz leicht, sodass wir hier darauf verzichten. Mit einer grafischen Methode, die später im Stoff kommt, kann diese Eigenschaft aber leicht nachvollzogen werden.

Um Genaueres über die möglichen Werte, die ein Polynom annehmen kann, herauszufinden, gibt es eine Reihe von Methoden, die sich nach und nach mit dem Fortschreiten des Mathematikstoffs ergeben. Ihre Anwendung ist mit dem Lösen von Gleichungen verbunden und setzt für Polynome vom Grad ≥ 3 Kenntnisse in der Differentialrechnung voraus.

6 Verallgemeinerung: Polynome in mehreren Variablen

Bisher haben wir Polynome in *einer* Variable betrachtet. Die Mathematik kennt auch Polynome in *mehreren* Variablen. So ist etwa

$$4x^3y - 2x^2y^3 + 5xy^2 + 2x - 3y^2 + 1 \quad (6.1)$$

ein Polynom in den Variablen x und y .

Ob ein Term, in dem mehrere Variable in „polynomialer“ Art vorkommen, als Polynom (und, wenn ja, in welchen Variablen) aufgefasst werden soll, ist nicht von vornherein vorgegeben, sondern kommt darauf an, was man mit ihm machen möchte. Betrachten wir etwa folgende Situation: Ein Gebäude hat die Form eines Würfels mit Seitenlänge a , auf dessen Deckfläche eine Pyramide der Höhe h gesetzt ist. Der gesamte Volumsinhalt des Gebäudes ist durch

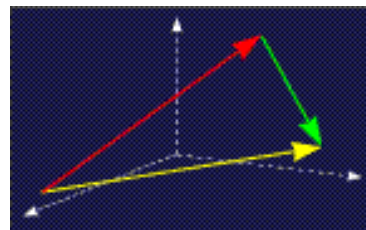
$$V = a^3 + \frac{1}{3} a^2 h \quad (6.2)$$

gegeben. Wir sind frei, diesen Term

- als Polynom in der Variable a (mit Koeffizienten 1 und $\frac{1}{3}h$),
- als Polynom in der Variable h (mit Koeffizienten a^3 und $\frac{1}{3}a^2$)
- oder als Polynom in den zwei Variablen a und h (mit Koeffizienten 1 und $\frac{1}{3}$)

zu interpretieren. Für manche Aufgabenstellungen macht das keinen Unterschied, sodass man sich nicht wirklich für eine dieser Möglichkeiten entscheiden muss. Bietet ein Architekt aber mehrere derartige Gebäude an, wobei in jedem Einzelfall die Länge a durch die Größe des Grundstücks vorgegeben ist, die Höhe h aber disponibel ist und mit dem Auftraggeber ausverhandelt werden kann, so wird er a eher als „Konstante“ (wenngleich in jedem Fall mit einem anderen Wert) und h eher als „Variable“ behandeln und bei der Planung der Klimaanlage (deren Kosten er proportional zum Volumsinhalt veranschlagt) den Term (6.2) als Polynom in der Variable h auffassen.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Mai 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2021 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Der binomische Lehrsatz und die Binomialkoeffizienten

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

In diesem Skriptum wird gezeigt, wie Potenzen einer Summe mit beliebigen natürlichen Exponenten, d.h. $(a + b)^n$ für $n \in \mathbb{N}$, berechnet werden können, ohne alle Klammern einzeln ausmultiplizieren zu müssen.

1 Binomische Formeln und die Potenzen einer Summe

In mathematischen Anwendungen wird oft die ausmultiplizierte Form der Potenz einer Summe benötigt. Das Quadrat einer Summe wird durch eine der drei binomischen Formeln angegeben:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \quad (1.1)$$

Durch fleißiges Ausmultiplizieren von Klammern können auch höhere Potenzen einer Summe wie

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (1.2)$$

und

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \quad (1.3)$$

berechnet werden¹. Beachten Sie, dass die in den Summanden auftretenden Exponenten in (1.3) sich zu 4 addieren, jene in (1.2) zu 3 und jene in (1.1) zu 2 (wobei a als a^1 und b als b^1 zu lesen ist). Das kann „physikalisch“ erklärt werden: Stellen Sie sich vor, a und b wären Längen (also Vielfache einer Längeneinheit wie Meter oder Kilometer). Dann ist etwa $(a + b)^3$ eine Größe der Dimension „Länge hoch 3“, also ein Volumen. Daher müssen auch

¹ Um die Potenz einer *Differenz*, also etwa $(a - b)^2$, $(a - b)^3$ oder $(a - b)^4$ auszumultiplizieren, ersetzen Sie einfach in der entsprechenden Potenz von $a + b$, also in (1.1), (1.2) oder (1.3) die Variable b durch $-b$. Auf diese Weise ergibt sich etwa $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (das ist die zweite binomische Formel) und $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Diese Methode ist für beliebige Potenzen $(a - b)^n$ mit natürlichem n anwendbar. Die allgemeine Regel dafür lautet: Die ausmultiplizierte Form von $(a - b)^n$ wird erhalten, indem in jener von $(a + b)^n$ jede Potenz von b mit einem ungeraden Exponenten ein Minuszeichen bekommt. Wir beschränken uns im Folgenden daher auf Potenzen einer *Summe*.

die Summanden in (1.2) Volumina darstellen. Ein Summand wie $a^4 b^4$ (eine Fläche) oder $a^2 b^2$ („Länge hoch 4“) hätte darin nichts verloren!

Für noch höhere natürliche Potenzen, also für $(a + b)^n$ mit $n = 5, 6, 7, \dots$ wird das Ausmultiplizieren recht schnell sehr mühsam! Zum Glück steht eine andere Methode zur Verfügung, die nun im Folgenden vorgestellt wird.

2 Das Pascalsche Dreieck

Interessanterweise steckt hinter den Vorfaktoren der ausmultiplizierten Potenzen einer Summe eine relativ einfache Struktur, die ganz allgemein, d.h. für *beliebige* natürliche Zahlen n als Exponenten, angegeben werden kann. Dazu betrachten wir zunächst ein Zahlenschema, das in Form eines Tannenbaums von der Spitze aus nach unten wächst, das sogenannte **Pascalsche Dreieck**². Es beginnt so:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
 \end{array} \tag{2.1}$$

Am Rand steht immer 1, und jede Zahl im Inneren ist die Summe der beiden schräg links und rechts darüber stehenden Zahlen. Das Schema kann beliebig weit fortgesetzt werden. (Schreiben Sie die nächste Zeile an!) Die Zahlen, die in den Zeilen auftreten, sind nun erstaunlicherweise gerade die Vorfaktoren, die in den ausmultiplizierten Formen der Potenzen $(a + b)^n$ auftreten! Wir beweisen diesen Sachverhalt hier nicht, sondern bitten Sie, ihn zu glauben! Für kleine n können wir ihn mit Hilfe der bisher angeschriebenen Beziehungen unmittelbar überprüfen: Die oberste Zeile, in der nur 1 steht, gehört zu $n = 0$, also zur Potenz

$$(a + b)^0 = 1, \tag{2.2}$$

die nächste, mit der Zahlenfolge 1 1, gehört zu $n = 1$, also zur Potenz

$$(a + b)^1 = a + b, \tag{2.3}$$

was wir auch als $1 \cdot a + 1 \cdot b$ lesen können. Die nächste Zeile, in der die Zahlen 1 2 1 stehen, gehört zu $n = 2$, also zur binomischen Formel (1.1). Die Vorfaktoren von a^2 und b^2 sind beide 1 (was natürlich nicht eigens angeschrieben werden muss), und der Term $2ab$ hat 2 als Vorfaktor. Eine Zeile darunter findet sich die Zahlenfolge 1 3 3 1, und das sind gerade die Vorfaktoren von (1.2). In der darauffolgenden Zeile stehen die Vorfaktoren von (1.3). Aus der nächsten (der letzten hier dargestellten) Zeile können wir die Vorfaktoren von $(a + b)^5$ ablesen, ohne alle Klammern dieser fünften Potenz eigens ausmultiplizieren zu müssen! Um

² Nach Blaise Pascal (1623 – 1662).

den gesamten Ausdruck für $(a + b)^5$ zu erhalten, schreiben wir zunächst diejenigen Produkte von Potenzen von a und b an, für die die Summe der Exponenten gleich 5 ist, wobei wir, ausgehend von a^5 (was wir auch als $a^5 b^0$ lesen können) schrittweise den Exponenten von a um 1 vermindern und jenen von b um 1 erhöhen, bis wir bei b^5 (also $a^0 b^5$) angelangt sind. Die Vorfaktoren entnehmen wir dem Pascalschen Dreieck:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5. \quad (2.4)$$

Diese Methode kann ganz allgemein angewandt werden, um die ausmultiplizierte Form beliebiger höherer Potenzen $(a + b)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ auf relativ mühelose Weise zu erhalten.

3 Binomialkoeffizienten

Die Zahlen im Pascalschen Dreieck werden **Binomialkoeffizienten** genannt³. Wenn wir die Zeilen im Pascalschen Dreieck mit 0 beginnend nummerieren, dann entspricht die Zeilennummer n der Potenz $(a + b)^n$. Innerhalb jeder Zeile werden die Zahlen des Pascalschen Dreiecks ebenfalls mit 0 beginnend durchnummeriert. Ganz links steht dann immer die „nullte“ Zahl, und ganz rechts die n -te, beide sind gleich 1. Die k -te Zahl in der n -ten Zeile wird dann in der Form

$$\binom{n}{k} \quad (3.1)$$

(ausgesprochen „ n über k “) angeschrieben. Durch diese Symbole ausgedrückt, sieht der Beginn des Pascalschen Dreiecks so aus:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \binom{1}{0} & & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & & & & & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & & & & & & \\
 \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & & & & & & \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & & & & & &
 \end{array} \quad (3.2)$$

Durch Vergleich dieser allgemeinen Form mit den konkreten Zahlenwerten in (2.1) lesen wir beispielsweise

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1, \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \text{und} \quad \binom{5}{2} = 10 \quad (3.3)$$

³ *Koeffizient* ist ein anderer Name für Vorfaktor. Das Wort *Binomialkoeffizient* bezeichnet jene Vorfaktoren, die entstehen, wenn Potenzen eines „Binoms“, d.h. einer Summe $a + b$, ausmultipliziert werden.

ab.

Es gibt zahlreiche Identitäten, die von den Binomialkoeffizienten handeln. Insbesondere ist es zu ihrer Berechnung für größere n nicht nötig, das Pascalsche Dreieck bis zur betreffenden Zeile aufzubauen. Eine einfache Formel zur Berechnung der Binomialkoeffizienten (die wir hier ebenfalls nicht beweisen) lautet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots 2 \cdot 1}. \quad (3.4)$$

Erschrecken Sie jetzt bitte nicht! Die Vorschrift, die durch diese Formel ausgedrückt wird, ist im Grunde einfach: Um etwa den Binomialkoeffizienten $\binom{9}{4}$ zu berechnen, machen Sie einen Bruchstrich und schreiben zuerst das Produkt $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ in den Nenner (d.h. angefangen von 4 bestimmen Sie jeden nachfolgenden Faktor durch Verminderung um 1, bis Sie bei 1 ankommen). Danach schreiben sie ein entsprechendes Produkt (also 9 mal 8 mal 7 usw.) in den Zähler, aber nur so lange, bis gleich viele Faktoren im Zähler stehen wie im Nenner. Der so entstehende Bruch gibt den gewünschten Binomialkoeffizienten an:

$$\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126. \quad (3.5)$$

Wird ein Produkt der Form $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, was gleich 24 ist, als $4!$ (ausgesprochen als „4 **Faktorielle**“ oder „4 **Fakultät**“) bezeichnet, allgemein also für $k \neq 0$

$$k! = k(k-1)(k-2)\dots 2 \cdot 1 \quad (3.6)$$

geschrieben, und wird zusätzlich

$$0! = 1 \quad (3.7)$$

festgelegt, so kann die Formel für die Binomialkoeffizienten in der kompakten Form

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (3.8)$$

ausgedrückt werden⁴. Also beispielsweise

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{362880}{24 \cdot 120} = 126. \quad (3.9)$$

Hier führen die Produkte im Zähler und im Nenner zwar auf größere Zahlen als in (3.4), aber diese Form erweist sich oft als nützlich, um Beziehungen zwischen den Binomialkoeffizienten zu finden. Insgesamt stehen also – mit dem Pascalschen Dreieck sowie mit den Formeln (3.4) und (3.8) – mehrere Möglichkeiten zur Verfügung, Binomialkoeffizienten zu berechnen. Naturgemäß können Computerprogramme diese Aufgabe sehr schnell erledigen.

⁴ Diese Form folgt aus (3.4), indem der Bruch mit $(n-k)!$ erweitert wird. Im Zähler entsteht dann gerade $n!$.

Eine besondere Eigenschaft der Binomialkoeffizienten ist aus der Symmetrie des Pascalschen Dreiecks (2.1) ersichtlich: In der n -ten Zeile ist der Binomialkoeffizient für $k = 0$ gleich jenem für $k = n$, jener für $k = 1$ ist gleich jenem für $k = n - 1$, usw. Allgemein gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad (3.10)$$

beispielsweise

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10. \quad (3.11)$$

4 Der Binomische Lehrsatz

Nun erinnern wir uns daran, dass die Binomialkoeffizienten im Zusammenhang mit den Potenzen $(a+b)^n$ auftreten. Die ausmultiplizierte Form von $(a+b)^n$ ist eine Summe von $n+1$ Termen, beginnend mit a^n (was wir auch als $a^n b^0$ lesen können), danach ein Term vom Typ Vorfaktor $\cdot a^{n-1} b$, danach ein Term vom Typ Vorfaktor $\cdot a^{n-2} b^2$, usw., bis wir beim letzten Term b^n angekommen sind. Die Vorfaktoren sind die entsprechenden Binomialkoeffizienten. Fügen wir sie ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} (a+b)^n = & \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \\ & + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Wegen

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad (4.2)$$

sind die Vorfaktoren von a^n und b^n beide gleich 1. (Sie entsprechen den Einsern am Rand des Pascalschen Dreiecks.) Die in (4.1) auftretenden Exponenten von a und b addieren sich in jedem der Summanden zu n .

Die allgemeine Formel (4.1) ist der **binomische Lehrsatz**. Er kann unter Verwendung der *Summenschreibweise* auch kürzer durch die Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (4.3)$$

ausgedrückt werden. Damit ist gemeint, dass im Ausdruck $\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ zuerst $k = 0$ gesetzt wird, dann $k = 1$, dann $k = 2$, usw. bis $k = n$, und alle diese Terme werden addiert. Das Symbol \sum (ein griechisches *Sigma*) bezeichnet die Bildung dieser Summe, das Symbol $\sum_{k=0}^n$ wird ausgesprochen als „Summe von k gleich 0 bis n “. Auch in der Form (4.3) ist gut erkennbar, dass sich die Exponenten von a und b in jedem Summanden zu n addieren ($n - k + k = n$).

5 Beziehungen zwischen den Binomialkoeffizienten

Neben der Identität (3.10), die die Symmetrie des Pascalschen Dreiecks (2.1) ausdrückt, gibt es zahlreiche weitere Beziehungen zwischen den Binomialkoeffizienten, von denen wir nur wenige erwähnen. Die Beziehung, die das Bildungsgesetz des Pascalschen Dreiecks ausdrückt, lautet

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \quad (5.1)$$

Sie besagt einfach, dass jede Zahl im Inneren des Pascalschen Dreiecks die Summe der schräg links und rechts darüber stehenden Zahlen ist. Wird vereinbart, dass $\binom{n}{k} = 0$ ist, wenn $k < 0$ oder $k > n$ ist (d.h. wenn die Platznummer k „außerhalb“ des Pascalschen Dreiecks gewählt wird), so gilt die Beziehung (5.1) für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$.

Eine weitere Beziehung ergibt sich, indem in der Formel (4.3) $a = b = 1$ gesetzt wird. Die linke Seite reduziert sich auf 2^n , die rechte auf $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$. Daher gilt

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad (5.2)$$

eine Identität, die insbesondere in der Wahrscheinlichkeitsrechnung nützlich ist. Sie besagt, dass die Summe aller Binomialkoeffizienten mit einem gegebenen n (die Summe aller Zahlen in der n -ten Zeile des Pascalschen Dreiecks, wobei die Nummerierung der Zeilen bei 0 beginnt) gleich 2^n ist.

Wird in der Formel (4.3) $a = 1$ und $b = -1$ gesetzt, so ergibt sich mit

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (5.3)$$

die Tatsache, dass die „alternierende Summe“ der Binomialkoeffizienten verschwindet⁵.

Falls Sie an weiteren Identitäten für die Binomialkoeffizienten interessiert sind (oder sie benötigen), so konsultieren Sie die Seite <http://de.wikipedia.org/wiki/Binomialkoeffizient>!

⁵Die Bezeichnung „alternierend“ bezieht sich darauf, dass die Vorzeichen wechseln: Für gerades k ist $(-1)^k = 1$, für ungerades k ist $(-1)^k = -1$.

6 Eine kombinatorische Anwendung der Binomialkoeffizienten

Die Binomialkoeffizienten sind uns beim Ausmultiplizieren der Potenzen einer Summe begegnet. Sie besitzen aber auch zahlreiche andere Anwendungen und treten insbesondere in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der Kombinatorik (der „Lehre vom Abzählen“) auf. Um ein Beispiel anzuführen: Stellen Sie sich eine Menge A mit n Elementen vor! Nun geben Sie eine natürliche Zahl $k \leq n$ vor. Wie viele Teilmengen von A gibt es, die k Elemente besitzen?

Die Antwort ist: Genau $\binom{n}{k}$.

Um das zu illustrieren, wählen wir $n = 5$ und $k = 2$. Eine Menge mit 5 Elementen ist etwa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sie besitzt genau $\binom{5}{2} = 10$ Teilmengen mit 2 Elementen, nämlich $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$ und $\{4, 5\}$.

Da der Beweis, dass eine n -elementige Menge genau $\binom{n}{k}$ k -elementige Teilmengen besitzt, sehr interessant ist, führen wir ihn hier durch:

Beweis: Wir wählen ein n und ein $k \leq n$ und stellen uns vor, den Term $(a + b)^n$ Klammer für Klammer auszumultiplizieren:

$$(a + b)(a + b)(a + b) \dots (a + b) = ? \quad (6.1)$$

Nach der allgemeinen Regel des Ausmultiplizierens von Klammern müssen wir aus jeder Klammer in diesem Ausdruck einen Summanden wählen (also das a oder das b), alle ausgewählten a 's und b 's multiplizieren, diesen Vorgang auf alle möglichen Arten, a 's und b 's aus den Klammern zu wählen, durchführen und zuletzt alle Produkte, die wir auf diese Weise erhalten, addieren. Wählen wir aus k der Klammern das b und aus den verbleibenden $n - k$ Klammern das a , so erhalten wir das Produkt $a^{n-k} b^k$. Es tritt so oft auf, wie wir aus k der Klammern das b wählen können. Das entspricht aber genau der Anzahl aller Möglichkeiten, aus einer n -elementigen Menge (vertreten durch die n Klammern in (6.1)) k Elemente auszuwählen, also der Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge. Und nach dem binomischen Lehrsatz (4.3) geschieht das genau $\binom{n}{k}$ mal, denn das ist der Vorfaktor von $a^{n-k} b^k$ in der ausmultiplizierten Form von $(a + b)^n$. Womit die Behauptung bewiesen ist!

Der Beweis illustriert, dass sich in der Mathematik oft unvermutete Zusammenhänge ergeben. Wer hätte gedacht, dass sich die Frage nach der Zahl der k -elementigen Teilmengen durch die Analyse, wie die Potenz einer Summe gebildet wird, beantworten lässt? Er offenbart eine enge und sehr schöne Verbindung zwischen der Termrechnung (dem Ausmultiplizieren von Klammern) und dem Abzählen von Auswahlmöglichkeiten. Er legt auch eine alternative Formulierung des betrachteten Sachverhalts nahe: $\binom{n}{k}$ ist ganz allgemein die Zahl der Möglichkeiten, aus n Objekten k (verschiedene) Objekte auszuwählen. Man nennt jede solche Auswahl eine *Kombination ohne Wiederholung*.

Mit (5.2) ergibt sich übrigens die Folgerung, dass eine Menge mit n Elementen genau 2^n Teilmengen besitzt (wobei die leere Menge und die Menge selbst mitgezählt sind). Denn wir

haben ja soeben herausgefunden, dass eine n -elementige Menge genau $\binom{n}{k}$ k -elementige Teilmengen besitzt. Addieren wir alle diese Anzahlen, so ergibt sich gerade die Summe (5.2), also 2^n . (Dabei entspricht der Summand für $k = 0$ der leeren Menge und der Summand $k = n$ der Menge selbst. Wegen (4.2) tragen beide 1 zur Summe bei.)

7 Grafische Darstellung der Binomialkoeffizienten

Für ein gegebenes n wachsen die Binomialkoeffizienten zunächst mit steigendem k an und fallen dann, in einer symmetrischen Weise, wieder ab. Abbildung 1 zeigt die Werte der Binomialkoeffizienten für $n = 20$. Auf der ersten Achse ist k aufgetragen, auf der zweiten der zugehörige Binomialkoeffizient $\binom{20}{k}$.

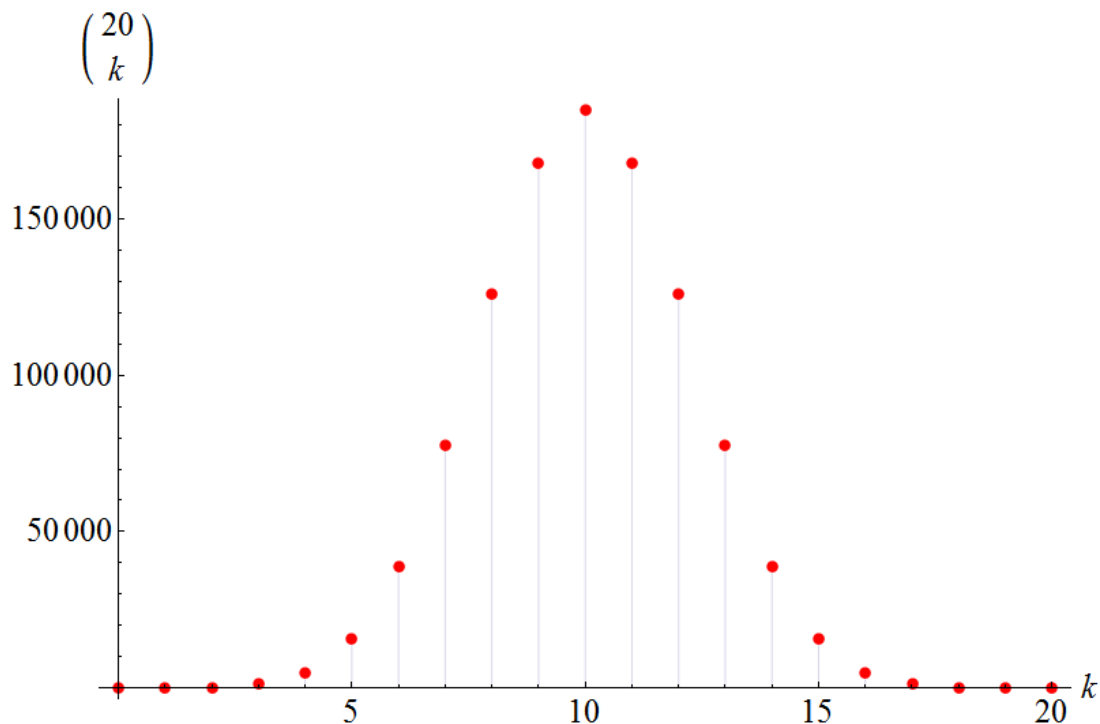


Abbildung 1: Plot der Binomialkoeffizienten für $n = 20$, d.h. der Vorfaktoren in der ausmultiplizierten Form der Potenz $(a + b)^{20}$.

Dieses Verhalten hängt eng mit der sogenannten *Binomialverteilung* zusammen, die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik eine wichtige Rolle spielt.

8 Verallgemeinerung

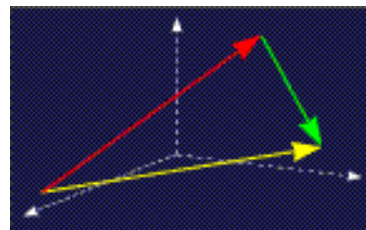
Formel (3.4) kann benutzt werden, um die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ auch für beliebige *reelle* Zahlen n zu definieren. Wichtig an Formel (3.4) ist ja nur, dass k eine natürliche Zahl ist, da Zähler und Nenner jeweils k Faktoren haben (eine Aussage, die nur für natürliche k Sinn macht). Der Zähler kann auch dann hingeschrieben werden, wenn n keine natürliche Zahl ist.

Mit den so verallgemeinerten Binomialkoeffizienten lassen sich auch Identitäten für Potenzen $(a+b)^n$ mit nicht-natürlichen Exponenten n angeben, also etwa für $\sqrt{a+b}$, was ja das Gleiche ist wie $(a+b)^{1/2}$, oder für $\frac{1}{a+b}$, was das Gleiche ist wie $(a+b)^{-1}$. Allerdings lassen sich derartige Potenzen nicht als endliche Summen, sondern nur als „Reihen“ („unendliche Summen“) schreiben. Das Thema Reihen geht zwar über den Horizont dieses Skriptums hinaus, aber für den Fall, dass Sie eine solche *binomische Reihe* sehen möchten, hier ist eine (für $\sqrt{a+b}$ mit $a=1$):

$$\begin{aligned}\sqrt{1+b} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} b^k = \\ &= \binom{1/2}{0} + \binom{1/2}{1} b + \binom{1/2}{2} b^2 + \binom{1/2}{3} b^3 + \dots = \quad (8.1) \\ &= 1 + \frac{1}{2} b - \frac{1}{8} b^2 + \frac{1}{16} b^3 + \dots\end{aligned}$$

Je mehr Summanden berücksichtigt werden, umso genauer ist das Ergebnis. Aber Achtung: Diese Sache klappt nur, wenn $-1 < b < 1$ ist!

Dieses Skriptum wurde erstellt im Mai 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2021 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Was ist eine Gleichung?

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

In diesem Skriptum besprechen wir, was Gleichungen sind. Dabei steht nicht im Vordergrund, wie man sie löst, sondern wie man über sie denken sollte.

1 Zahlen in Terme einsetzen

Bevor wir zum Thema Gleichungen kommen, bereiten wir das Terrain auf und erinnern uns daran, wozu ein *Term* dient. Betrachten wir als Beispiel den einfachen Term

$$4x + 7. \quad (1.1)$$

Das Symbol x , die *Variable*, ist ein Platzhalter für eine Zahl, auf die wir uns zunächst nicht festlegen. Wir können aber jederzeit anstelle von x eine beliebige Zahl einsetzen. Wird für x etwa die Zahl 3 gesetzt, so nimmt der Term (1.1) den Wert

$$4 \cdot 3 + 7 = 12 + 7 = 19 \quad (1.2)$$

an. Wird für x die Zahl -2 gesetzt, so nimmt er den Wert

$$4 \cdot (-2) + 7 = -8 + 7 = -1 \quad (1.3)$$

an. Das ist also die grundlegende Aufgabe unseres Terms: einen konkreten Zahlenwert anzunehmen, wenn ein Wert für die Variable vorgegeben ist.

2 Gleichungen

Nun drehen wir den Spieß um und fragen, ob es möglich ist, die Variable x so zu wählen, dass der Wert des Terms (1.1) gleich 15 ist. Und, falls ja, für welchen Wert x das der Fall ist. Das bedeutet, wir fragen, ob es eine Zahl x gibt mit der Eigenschaft

$$4x + 7 = 15. \quad (2.1)$$

Das ist eine **Gleichung**. Das Gleichheitszeichen ist hier als „Wunsch“ zu verstehen, im Unterschied zum Gleichheitszeichen in einer Identität, die ja für *beliebige* Werte der Variable immer wahr ist. In diesem Sinn ist die Gleichung (2.1) gleichbedeutend mit der Aufgabe

„Gewünscht wird eine Zahl mit der folgenden Eigenschaft: Multipliziert man sie mit 4 und subtrahiert vom Ergebnis 7, so ergibt sich 15. Gibt es eine solche Zahl? Kann man sie angeben?“

Das ist also die Frage, die unsere Gleichung ausdrückt. Eine **Lösung** der Gleichung ist ein Wert der Variable x , für den (2.1) eine wahre Aussage ist („der (2.1) erfüllt“).

Zunächst haben wir keine Gewähr, dass es überhaupt eine Lösung gibt. Vielleicht gibt es eine, vielleicht auch nicht. Vielleicht gibt es auch *mehrere* Lösungen. Um den Rahmen abzustecken, in dem die Frage, die in Form der Gleichung gestellt ist, sauber behandelt werden kann, legen wir fest, die Menge *aller* Lösungen als **Lösungsmenge** zu bezeichnen. Gibt es keine Lösung, so ist die Lösungsmenge leer. Gibt es eine einzige Lösung (in der Mathematik sagt man dann, dass es „genau eine“ Lösung gibt), so hat die Lösungsmenge (genau) ein Element. Gibt es mehrere Lösungen, so hat die Lösungsmenge dementsprechend mehrere Elemente. Die Aufgabe, eine Gleichung zu lösen, bedeutet, alle Lösungen, d.h. die Lösungsmenge, zu finden. Die Lösungsmenge wird meist mit dem Buchstaben L bezeichnet.

Ein anderes, etwas komplizierteres Beispiel einer Gleichung ist

$$x^2 + 3x - 7 = x + 2. \quad (2.2)$$

Hier haben wir zwei Terme, einen auf der linken Seite (d.h. links vom Gleichheitszeichen) und einen auf der rechten (rechts vom Gleichheitszeichen). Für jeden Zahlenwert, den wir der Variable x geben, nimmt die linke Seite einen konkreten Wert an, und es nimmt die rechte Seite einen konkreten Wert an. Im Allgemeinen werden diese beiden Werte verschieden sein. Die Frage, die diese Gleichung ausdrückt, lautet: Ist es möglich, die Variable x so zu wählen, dass beide Seiten von (2.2) den *gleichen* Wert annehmen, d.h. dass (2.2) eine wahre Aussage ist? Und, falls ja, um welchen Wert von x (bzw. – falls es mehrere solche Möglichkeiten gibt – um welche Werte von x) handelt es sich? Jeder derartige Wert von x ist eine Lösung der Gleichung, und die Gesamtheit aller Lösungen ist die Lösungsmenge.

Generell ist eine Gleichung vom Typ

$$\text{Term}_1 = \text{Term}_2. \quad (2.3)$$

Die beiden Terme können einfach oder kompliziert sein, und dementsprechend ist es leicht oder schwierig, die Lösungsmenge zu finden.

Die in einer Gleichung auftretende Variable muss nicht unbedingt x heißen. Man könnte die Gleichung (2.2) genauso gut in der Form

$$u^2 + 3u - 7 = u + 2 \quad (2.4)$$

anschreiben. Mathematisch ändert sich dadurch nichts.

Manchmal werden Sie in Ihrer mathematischen Ausbildung Gleichungen begegnen, in denen außer der Variable noch andere Symbole vorkommen. Ein Beispiel dafür ist

$$x^2 + a x = 5. \quad (2.5)$$

Hier ist a ein Platzhalter für eine Zahl, auf deren Wert man sich nicht festlegen möchte, die man sich aber als fix festgehalten vorstellt, und die – im Unterschied zur Variable x – als *Konstante* bezeichnet wird. Genau genommen haben wir es hier mit *vielen* Gleichungen zu tun: Für jeden Zahlenwert von a stellt (2.5) eine andere Gleichung (mit Variable x) dar! Man kann auch sagen, dass (2.5) eine ganze „Klasse“ oder einen „Typ“ von Gleichungen darstellt. Für jeden Wert von a kann sich eine andere Lösungsmenge ergeben.

3 Grundmenge

Manchmal interessiert man sich nur für jene Lösungen einer Gleichung, die eine bestimmte Zusatzbedingung erfüllen. Stellt die Variable etwa eine *Anzahl* von Dingen dar, so sind nur Lösungen relevant, die natürliche Zahlen sind. Stellt die Variable einen *Abstand* dar, so wird man von ihr verlangen, dass sie > 0 oder ≥ 0 ist. Allgemein kann man eine **Grundmenge** festlegen, in der die Lösungen, die von Interesse sind, liegen müssen. Eine Lösung ist dann ein Zahlenwert der Variable, für den die Gleichung eine wahre Aussage darstellt, *und* der ein Element der Grundmenge ist. Die Grundmenge wird meist mit dem Buchstaben G bezeichnet. Man sagt dann auch, dass die betreffende Gleichung „über der Grundmenge G “ zu verstehen ist. Ein Beispiel, in der vielfach üblichen Kurzschreibweise¹:

$$u^2 + 3u - 7 = u + 2 \quad G = \mathbb{R}^+ \quad (3.1)$$

Als Lösung gilt nun jede positive reelle Zahl u , für die (3.1) eine wahre Aussage ist („die (3.1) erfüllt“). Die Menge *aller* dieser Zahlen ist die Lösungsmenge.

Ist für eine Gleichung keine Grundmenge angegeben, so ist üblicherweise gemeint, dass alle reellen Zahlen zugelassen sind, d.h. dass $G = \mathbb{R}$ ist.

4 Ein konkretes Anwendungsbeispiel

Gleichungen treten in vielfältigen Zusammenhängen und in praktisch allen Anwendungsgebieten der Mathematik auf. Sehen wir uns ein praktisches Beispiel an: Der Anhalteweg beim Autofahren (d.h. die – in Meter gemessene – Strecke, die das Fahrzeug vom Zeitpunkt des Erkennens einer Situation, die ein Bremsen erfordert, bis zum Stillstand zurücklegt) wird mit der Faustformel

$$\text{Anhalteweg} = \frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10} \quad (4.1)$$

berechnet², wobei v die in km/h angegebene Geschwindigkeit (zum Zeitpunkt des Erkennens eines Hindernisses) ist. Nun stehen in einem Straßenabschnitt umfangreiche Straßenbauarbeiten bevor. Aufgrund der örtlichen Gegebenheiten empfiehlt die Baufirma der zuständigen

¹ Zur Erinnerung: Mit dem Symbol \mathbb{R}^+ wird die Menge aller positiven reellen Zahlen bezeichnet.

² Der lineare Term $\frac{3v}{10}$ gibt den Reaktionsweg an, der quadratische Term $\frac{v^2}{100}$ den Bremsweg.

Behörde, in dem betreffenden Straßenabschnitt eine Geschwindigkeitsbeschränkung zu verhängen, sodass der typische Anhalteweg 40 m nicht übersteigt. Der Experte der Behörde legt seiner Berechnung die Formel (4.1) zugrunde und stellt die Frage, bei welcher Geschwindigkeit sich aus ihr ein Anhalteweg von 40 m ergibt. Diese Geschwindigkeit v muss dann die Gleichung

$$\frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10} = 40 \quad (4.2)$$

erfüllen. Als Grundmenge wird dabei die Menge der positiven reellen Zahlen zugrunde gelegt (da eine negative Lösung keine Bedeutung für die Fragestellung hätte). Hier haben wir eine Gleichung, von deren Lösung die Entscheidung einer Behörde abhängt! Eine geeignete Methode, diese (quadratische) Gleichung zu lösen, wird in einem anderen Skriptum besprochen, aber wir verraten dennoch, was dabei herauskommt: Es gibt zwei Zahlen, die (4.2) erfüllen, nämlich -80 und 50 . Die negative liegt nicht in der Grundmenge, ist daher nicht von Belang, und daher ergibt sich als einzige Lösung $v = 50$. Die Entscheidung der Behörde lautet somit: Beschränkung der Höchstgeschwindigkeit auf 50 km/h.

5 Gleichungen lösen

Je nachdem, von welchem Typ die in einer Gleichung auftretenden Terme sind, gibt es spezielle, *systematisch anzuwendende Lösungsmethoden*, auf die wir hier aber nicht näher eingehen. Einige von ihnen werden in anderen Skripten besprochen. In manchen Fällen ist aber keine ausgefeilte Methode erforderlich, sondern lediglich ein elementares Wissen über Zahlen und Zahlenoperationen, und da diese einfachen Fälle das Verständnis erleichtern, wollen wir uns einige ansehen:

- Betrachten wir als erstes Beispiel die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0. \quad (5.1)$$

Sie besitzt (im Rahmen der reellen Zahlen, d.h. über der Grundmenge $G = \mathbb{R}$) keine Lösung³, und zwar aus dem einfachen Grund, dass x^2 für keine reelle Zahl negativ sein kann und $x^2 + 1$ daher nie kleiner als 1 ist. $x^2 + 1$ kann für keine reelle Zahl gleich 0 sein. Die Lösungsmenge von (5.1) ist leer, $L = \{\}$.

- Nun nehmen wir uns die ganz zu Beginn betrachtete Gleichung

$$4x + 7 = 15 \quad (5.2)$$

vor. Sie stellt eine harmlose Denksportaufgabe dar: Wenn die Summe $4x + 7$ gleich 15 sein soll, muss $4x$ gleich 8 sein, denn die Frage „wieviel $+ 7 = 15$?“ hat nur die Antwort 8. Wenn aber das Vierfache von x gleich 8 ist, muss x ein Viertel von 8 sein, also 2. Und damit ist die (einzige) Lösung gefunden! Wir können sie in der Form $x = 2$ anschreiben oder die Lösungsmenge in der Form $L = \{2\}$ angeben. Die Argumentation, die zu ihr

³ Die reellen Zahlen als Grundmenge werden hier deshalb betont, weil es einen erweiterten Zahlbegriff gibt, die *komplexen* Zahlen, in deren Rahmen die Gleichung (5.1) sehr wohl Lösungen besitzt (und zwar gleich zwei).

geführt hat, ist ein Beispiel einer logischen Schlussfolgerung: Falls für irgendeine Zahl x die Aussage $4x + 7 = 15$ wahr ist, so muss $x = 2$ sein. Wir können das auch in der Form

$$4x + 7 = 15 \Rightarrow x = 2 \quad (5.3)$$

ausdrücken. Das Symbol \Rightarrow bedeutet „daraus folgt“ und wird auch so ausgesprochen. Da $x = 2$ eine Lösung unserer Gleichung ist, gilt auch die umgekehrte Schlussfolgerung

$$x = 2 \Rightarrow 4x + 7 = 15. \quad (5.4)$$

Wer's nicht glaubt, rechnet einfach nach: $4 \cdot 2 + 7 = 8 + 7 = 15$. Die beiden Schlussfolgerungen (5.3) und (5.4) können wir gemeinsam in der Form

$$4x + 7 = 15 \Leftrightarrow x = 2 \quad (5.5)$$

ausdrücken. Das Symbol \Leftrightarrow bedeutet „genau dann, wenn“ und wird auch so ausgesprochen. Wir nennen die beiden Aussagen „ $4x + 7 = 15$ “ und „ $x = 2$ “ zueinander *äquivalent*. (5.5) zeigt am klarsten, dass die Gleichung $4x + 7 = 15$ genau eine Lösung hat, nämlich 2.

- Unser nächstes Beispiel ist die Gleichung

$$x^2 = 9. \quad (5.6)$$

Man könnte jetzt versucht sein zu sagen: Wenn das Quadrat von x gleich 9 ist, ist x gleich der Wurzel aus 9, also $x = \sqrt{9} = 3$. Dieses Argument hat einen wahren Kern, ist aber genau genommen falsch! Warum? Weil $x = -3$ auch eine Lösung ist, denn $(-3)^2 = 3^2 = 9$. Die Gleichung (5.6) hat also zumindest zwei Lösungen. Dass sie *genau* zwei Lösungen hat, kann man mit einem wunderschönen Argument einsehen: (5.6) sagt genau das Gleiche aus wie

$$x^2 - 9 = 0, \quad (5.7)$$

denn dass x^2 gleich 9 sein soll, kann man auch in der Form ausdrücken, dass die Differenz $x^2 - 9$ gleich 0 ist. Nun folgt aus einer der binomischen Formeln, dass für beliebige reelle x

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3) \quad (5.8)$$

gilt. Wenn nun aber $x^2 - 9 = 0$ sein soll, muss $(x + 3)(x - 3) = 0$ sein. Für jedes x ist $(x + 3)(x - 3)$ das Produkt zweier Zahlen, und das kann *nur dann* gleich 0 sein, wenn (zumindest) *eine* der beiden Zahlen 0 ist! Also gilt entweder $x + 3 = 0$ (was gleichbedeutend ist mit $x = -3$) oder $x - 3 = 0$ (was gleichbedeutend ist mit $x = 3$). Hier haben wir wieder eine logische Schlussfolgerung, die aber diesmal so aussieht:

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = -3 \text{ oder } x = 3. \quad (5.9)$$

Umgekehrt gilt sowohl für $x = -3$ als auch für $x = 3$, dass $x^2 = 9$ ist, daher:

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \text{ oder } x = 3. \quad (5.10)$$

Unsere Gleichung (5.6) hat also genau zwei Lösungen, nämlich -3 und 3 . Ihre Lösungsmenge ist $L = \{-3, 3\}$.

- Ein letztes Beispiel:

$$8z^3 + 2z^2 - 12z - 5 = 0. \quad (5.11)$$

Die Variable heißt jetzt z , aber das ist nicht weiter schlimm. Was schwerer wiegt, ist die komplizierte Form des Terms auf der linken Seite. Er ist ein Polynom vom Grad 3. Wir machen jetzt nicht den Versuch, die Lösungen dieser Gleichung zu finden, aber wenn Sie ein bisschen über Polynome wissen, werden Sie sich vielleicht daran erinnern, dass ein Polynom, dessen Grad eine ungerade Zahl ist, für irgendeinen Wert der Variable (so schwierig es auch sein mag, diesen zu berechnen) gleich 0 ist⁴. Das bedeutet, dass die Gleichung (zumindest) eine Lösung besitzt! Womit wir uns hier begnügen müssen⁵.

Jetzt sollte klar geworden sein, *was* eine Gleichung ist. In den meisten Fällen, in denen eine Gleichung auftritt, ist man an deren Lösungen interessiert. Wie erwähnt, stehen zahlreiche Methoden zur Verfügung, um diese (exakt oder näherungsweise) zu finden. In anderen Fällen reicht es zu wissen, dass eine Gleichung eine Lösung besitzt, und manchmal ist man zufrieden herauszubekommen, dass eine Gleichung *keine* Lösung besitzt (beispielsweise wenn sie den möglichen Zusammenstoß der Erde mit einem Asteroiden beschreibt, der ihr gefährlich nahe kommt).

6 Probe

Um die Lösung(en) einer Gleichung zu finden, ist es – außer bei sehr einfachen Typen – nötig, ein bisschen zu rechnen. Dabei können natürlich Fehler passieren. So schwierig es sein mag, eine Gleichung zu lösen, so einfach ist der umgekehrte Prozess – zu überprüfen, ob eine gegebene Zahl eine Lösung ist. Dafür müssen wir sie ja bloß in die Gleichung einsetzen und nachprüfen, ob die linke und die rechte Seite den gleichen Wert annehmen. Eine solche Rechnung heißt **Probe**.

Nehmen wir beispielsweise an, wir haben es mit der Gleichung

$$(x + 2)^2 + x = x^2 + 3x + 8 \quad (6.1)$$

zu tun, und eine Lösungsmethode führt zum Ergebnis, dass die Zahl 2 eine Lösung ist. Zur Probe geben wir der Variable x den Wert 2 und berechnen die linke und die rechte Seite der Gleichung *getrennt*. Man nennt die linke Seite am besten LHS (für „left hand side“) und die rechte Seite RHS (für „right hand side“):

$$\text{LHS} = (2 + 2)^2 + 2 = 4^2 + 2 = 16 + 2 = 18 \quad (6.2)$$

$$\text{RHS} = 2^2 + 3 \cdot 2 + 8 = 4 + 6 + 8 = 18 \quad (6.3)$$

Beide Seiten nehmen für $x = 2$ den gleichen Wert an (nämlich 18), womit die Probe gelungen ist!⁶ Die Zahl 2 ist tatsächlich eine Lösung der Gleichung (6.1).

⁴ Ist z *sehr* groß, so ist die linke Seite von (5.11) positiv. Ist $z < 0$ und $|z|$ *sehr* groß, so ist sie negativ. Wird z entlang der Zahlengeraden von links nach rechts bewegt, so schlägt das Vorzeichen irgendwo um – und dort ist die linke Seite von (5.11) gleich 0.

⁵ Mit einer grafischen Methode, die später im Stoff kommt, kann man herausfinden, dass die Gleichung (5.11) drei Lösungen hat. Ihre Werte sind näherungsweise -1.09778 , -0.441568 und 1.28934 .

⁶ Wichtig ist, dass für jedes x , das *keine* Lösung der Gleichung ist, LHS *nicht* gleich RHS ist.

Wichtig bei einer Probe ist, dass die linke und die rechte Seite der Gleichung wirklich *von-einander getrennt* berechnet werden, denn bei ihr geht es *nicht* darum, die Gleichung erneut zu lösen, sondern sich von einer vermuteten Lösung zu vergewissern, dass sie tatsächlich eine Lösung ist. Eine Probe ist gewissermaßen das, was wir im ersten Abschnitt dieses Skriptums gemacht haben: Zahlen in Terme einsetzen!

Die Probe ist auch deshalb von Bedeutung, weil manche Lösungsmethoden nicht auf Lösungen, sondern auf *Lösungskandidaten* führen, die Lösungen sein können oder auch nicht. In diesen Fällen ist die Probe nicht nur eine nachträgliche Übung für Gewissenhafte, sondern ein unumgänglicher Bestandteil der Methode selbst.

7 Gleichungssysteme

Bisher haben wir *einzelne* Gleichungen betrachtet, in denen jeweils *eine* Variable auftritt. Das Konzept der Gleichung kann verallgemeinert werden zu Gleichungen mit *mehreren* Variablen und zu Gleichungssystemen, die, wie ihr Name sagt, aus *mehreren* Gleichungen bestehen. Wir illustrieren diese Verallgemeinerung nur mit einem einzigen Beispiel. Versuchen Sie, die folgende Denksportaufgabe zu lösen:

„Gesucht sind zwei Zahlen, deren Summe 5 ist und deren Produkt 6 ist.“

Bezeichnen wir die gesuchten Zahlen mit x und y , so müssen sie die beiden Bedingungen

$$x + y = 5 \quad (7.1)$$

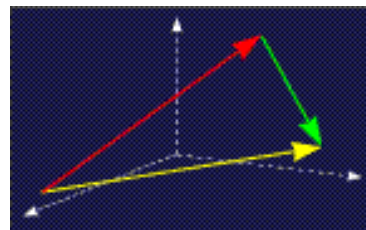
$$x y = 6 \quad (7.2)$$

erfüllen. Das ist ein System von zwei Gleichungen in den zwei Variablen x und y . Eine Lösung ist dann gefunden, wenn Werte für *beide* Variablen, also für x und y , angegeben werden, die *beide* Bedingungen (7.1) und (7.2) erfüllen. Dieses Gleichungssystem besitzt zwei Lösungen. Können Sie sie (ohne etwas aufzuschreiben, also rein durch Jonglieren mit Zahlen in Ihrem Kopf) herausfinden?

Das sind die einzigen Lösungen dieses Gleichungssystems.
Eine andere Lösung ist gegeben durch $x = 3$ und $y = 2$.
Eine Lösung ist gegeben durch $x = 2$ und $y = 3$.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Mai 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“

(<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2021 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Lineare Gleichungen und Äquivalenzumformungen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

In diesem Skriptum werden zwei Themen behandelt: Lineare Gleichungen stellen den einfachsten Gleichungstyp dar, und Äquivalenzumformungen nehmen unter den Möglichkeiten, eine Gleichung umzuformen, eine besondere Stellung ein (und sind auch beim Lösen von Gleichungen anderen Typs wichtig).

1 Eine einfache Gleichung zu Beginn

Um die Gleichung

$$4x + 7 = 15 \tag{1.1}$$

zu lösen, kann man mit ein bisschen „Hausverstand“ vorgehen: Wenn die Summe $4x + 7$ gleich 15 sein soll, muss $4x$ gleich 8 sein, denn die Frage „wieviel $+7 = 15$?“ hat nur die Antwort 8. Wenn aber das Vierfache von x gleich 8 ist, muss x ein Viertel von 8 sein, also 2. Und damit ist die (einzige) Lösung gefunden. Wir können sie in der Form $x = 2$ anschreiben oder die Lösungsmenge in der Form $L = \{2\}$ angeben.

Im Zuge dieser Argumentation sind einige Rechenoperationen durchgeführt worden, die man in systematischer Weise anschreiben und gleichzeitig in knapper Weise „protokollieren“ kann. Dazu gehen wir von einem einfachen, aber wichtigen Sachverhalt aus: Sind zwei Zahlen a und b gleich, gilt also

$$a = b, \tag{1.2}$$

und führt man mit a und b die gleichen Rechenoperationen aus, so sind auch die Ergebnisse gleich. Beispielsweise gilt dann

$$a + 5 = b + 5 \tag{1.3}$$

oder, ganz allgemein,

$$a + c = b + c \tag{1.4}$$

für jede beliebige Zahl c . Analog folgt aus $a = b$ auch

$$4a = 4b \quad (1.5)$$

oder, ganz allgemein,

$$ka = kb \quad (1.6)$$

für jede beliebige Zahl k . Das nutzen wir aus, um **Gleichungen umzuformen**. Um (1.1) zu lösen, nehmen wir zunächst an, x wäre die Lösung (obwohl wir sie zu Beginn noch nicht kennen). Dann ist das Gleichheitszeichen in (1.1) ganz wortwörtlich so zu verstehen, dass die Zahl auf der linken Seite *gleich* jener auf der rechten Seite ist. Wenn wir nun mit den beiden Seiten der Gleichung die gleiche Operation durchführen, bekommen wir wieder zwei gleiche Zahlen. Wir beginnen damit, von beiden Seiten der Gleichung 7 zu subtrahieren, und erhalten

$$4x = 8. \quad (1.7)$$

Um den Schritt von (1.1) zu (1.7) zu dokumentieren, wird rechts von der gegebenen Gleichung ein senkrechter Strich gemacht, nach welchem die Operation, die durchgeführt werden soll, angeschrieben („protokolliert“) wird. Darunter wird die betreffende Operation dann ausgeführt, was eine *neue Gleichung* ergibt. Das sieht dann so aus:

$$\begin{array}{rcl} 4x + 7 = 15 & | & -7 \\ 4x = 8 & & \end{array} \quad (1.8)$$

Im nächsten Schritt werden beide Seiten der so erhaltenen (einfacheren) Gleichung durch 4 dividiert (oder mit $\frac{1}{4}$ multipliziert, was das Gleiche ist). Insgesamt sieht die Rechnung (unser „Protokoll“) dann so aus:

$$\begin{array}{rcl} 4x + 7 = 15 & | & -7 \\ 4x = 8 & | & :4 \\ x = 2 & & \end{array} \quad (1.9)$$

Die letzte Zeile gibt x an – womit die Gleichung gelöst ist! Das „Protokoll“ (1.9) stellt eine Abfolge von Gleichungen dar, die Schritt für Schritt immer einfacher werden, bis uns die letzte ganz einfach sagt, welchen Wert x hat.

2 Äquivalenzumformungen

Jeder im Rahmen des Verlaufs (1.9) gemachte Schritt ist eine logische *Schlussfolgerung*. Jede der im „Protokoll“ (1.9) aufscheinenden Gleichungen ist eine *Folge* der vorigen, darüber stehenden Gleichung. Wir können die gesamte Argumentation auch so ausdrücken:

$$4x + 7 = 15 \quad \Rightarrow \quad 4x = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 2. \quad (2.1)$$

Das Symbol \Rightarrow bedeutet „daraus folgt“. Noch ausführlicher ausgedrückt: Falls für eine Zahl x die Beziehung $4x + 7 = 15$ gilt, so folgt (für dieselbe Zahl x), dass $4x = 8$ gilt, und daraus folgt (ebenfalls für dieselbe Zahl x), dass $x = 2$ gilt.

Haben wir damit aber wirklich hieb- und stichfest bewiesen, dass $x = 2$ die (einzige) Lösung der Gleichung $4x + 7 = 15$ ist, d.h. dass deren Lösungsmenge $L = \{2\}$ ist? Vielleicht sind

sie jetzt überrascht, aber wir haben es *nicht*. Es wurde ja ganz zu Beginn mit der Annahme $4x + 7 = 15$ vorausgesetzt, dass es überhaupt eine Lösung gibt! Genau genommen konnten wir das gar nicht wissen. Also haben wir eigentlich nur gezeigt: *Falls* es eine Lösung gibt, so ist diese gleich 2. Was wir noch nicht gezeigt haben, ist, dass die Zahl 2 unsere Gleichung erfüllt.

Diese Überlegung sollte Ihnen nicht wie Haarspalterei vorkommen, denn es werden kompliziertere Gleichungen auf Sie zukommen, von denen Sie zunächst keine Ahnung haben, ob sie Lösungen besitzen. Sehen wir uns ein Beispiel an, bei dem die Methode, mit beiden Seiten der Gleichung dasselbe zu machen, versagt: Wir betrachten die Gleichung $\sqrt{x} + 3 = 0$. Angenommen x ist eine Lösung, dann formen wir um¹:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{x} + 3 = 0 & -3 \\ \hline \sqrt{x} = -3 & \text{quadrieren} \\ x = 9 & \end{array} \quad (2.2)$$

Haben wir damit also die (einzige) Lösung der Gleichung $\sqrt{x} + 3 = 0$ gefunden? Wir machen mit $x = 9$ die Probe²:

$$\text{LHS} = \sqrt{9} + 3 = 3 + 3 = 6 \quad (2.3)$$

$$\text{RHS} = 0 \quad (2.4)$$

Hoppla! 6 ist nicht gleich 0! Die Zahl 9 hat die Probe nicht bestanden – sie ist *nicht* Lösung der Gleichung! Die Gleichung besitzt überhaupt keine Lösung. Dass die Lösung 9 wäre, wenn die Gleichung eine Lösung besitzen würde, hilft uns nicht. Dabei haben wir doch brav immer mit den beiden Seiten der Gleichung die gleiche Operation durchgeführt. Was ist schiefgegangen? Wir haben zwar gezeigt, dass

$$\sqrt{x} + 3 = 0 \Rightarrow x = 9, \quad (2.5)$$

aber leider gilt die Umkehrung nicht: Aus $x = 9$ folgt *nicht* $\sqrt{x} + 3 = 0$.

Als Ausweg aus dieser Situation bieten sich nun zwei Wege an, die Methode „mache das Gleiche mit beiden Seiten einer Gleichung“ zu retten:

- Die erste Möglichkeit: Wir wenden auf die beiden Seiten einer Gleichung die gleichen Operationen an, bis wir eine Aussage erhalten, die uns direkt über den Wert von x Auskunft gibt. Das entspricht einer Reihe von Schlussfolgerungen, die insgesamt besagt

$$\text{Gleichung ist erfüllt} \Rightarrow \text{konkreter Wert für } x. \quad (2.6)$$

¹ An dieser Stelle sollte man genau genommen die Grundmenge auf die nichtnegativen reellen Zahlen einschränken, da die Wurzel aus einer negativen Zahl (im Rahmen der reellen Zahlen) nicht existiert. Es wird aber hier ohnehin kein negatives x auftreten, sodass wir uns erlauben, diese Bemerkung in eine Fußnote zu verbannen.

² LHS („left hand side“) steht für die linke Seite der Gleichung, RHS („right hand side“) steht für ihre rechte Seite.

Der konkrete Wert für x , der am Ende herauskommt, darf nun nicht als *Lösung* verstanden werden, er ist ein *Lösungskandidat*. Danach machen wir die **Probe**, um herauszufinden, ob der Lösungskandidat nun eine Lösung ist oder nicht. Ist er keine Lösung, so besitzt die Gleichung keine Lösung. Es kann auch (bei manchen Gleichungstypen) passieren, dass wir am Ende *mehrere* Lösungskandidaten herausbekommen³, also

$$\text{Gleichung ist erfüllt} \Rightarrow \text{einige mögliche konkrete Werte für } x. \quad (2.7)$$

In diesem Fall wird mit jedem der Lösungskandidaten die Probe gemacht, um herauszufinden, welche davon Lösungen sind und welche nicht.

- Die zweite Möglichkeit: Wir gehen nach der Methode „mache das Gleiche mit beiden Seiten einer Gleichung“ vor, lassen dabei aber nur jene Operationen zu, die sich **umkehren** lassen! Einen solchen Umformungsschritt nennen wir **Äquivalenzumformung**. Werden nur Äquivalenzumformungen angewandt, so lässt sich die gesamte Kette von Schlussfolgerungen rückgängig machen, sodass wir, wenn am Ende ein konkreter Wert für x herauskommt, gezeigt haben:

$$\text{Gleichung ist erfüllt} \Leftrightarrow \text{konkreter Wert für } x. \quad (2.8)$$

Das Symbol \Leftrightarrow bedeutet „genau dann, wenn“. Erkennen Sie den Unterschied zu (2.6)? Die Richtung \Rightarrow gibt uns einen Hinweis, welche Zahl die Lösung sein *könnte*, und die Richtung \Leftarrow sagt uns, dass diese Zahl tatsächlich eine Lösung ist! Das bedeutet: Formen wir eine Gleichung mit einer solchen Operation um, so bekommen wir eine neue Gleichung, die nicht nur eine *Folge der ersten* ist, sondern aus der auch *die erste folgt*. Eine Zahl x erfüllt dann entweder beide Gleichungen oder keine von ihnen. Die beiden Gleichungen sind gleichwertig in dem Sinn, dass sie die gleiche Lösungsmenge besitzen. Wir nennen sie zueinander **äquivalent**⁴ (was auch die Bezeichnung „Äquivalenzumformung“ erklärt).

Wir sehen uns nun die zweite Methode genauer an: Welche Umformungen einer Gleichung sind Äquivalenzumformungen?

- Zunächst dürfen wir die beiden Seiten einer Gleichung vertauschen, denn $a = b$ gilt genau dann, wenn $b = a$ ist. Klarerweise kann das Vertauschen der beiden Seiten einer Gleichung durch eine weitere Vertauschung rückgängig gemacht werden. In der mathematischen Formelsprache ausgedrückt, gilt für Zahlen a, b stets

$$a = b \Leftrightarrow b = a. \quad (2.9)$$

(Um auszudrücken, dass zwei Dinge gleich sind, kommt es nicht auf die Reihenfolge an, in der sie genannt werden.)

- Außerdem darf jede Seite einer Gleichung mit Hilfe von Rechenregeln umgeformt werden, sofern die betreffende Umformung durch eine weitere Umformung rückgängig gemacht

³ Ergibt sich etwa im Zuge der Umformung einer Gleichung $x^2 = 9$, so wissen wir, dass x entweder -3 oder 3 ist.

⁴ Das Wort „äquivalent“ kommt aus dem Lateinischen und bedeutet nichts anderes als „gleichwertig“.

werden kann. Ist beispielsweise die linke Seite einer Gleichung $x(x+1)$, so kann sie durch $x^2 + x$ ersetzt werden, ohne dass sich die Lösungsmenge der Gleichung dadurch ändert.

In vielen Fällen werden wir mit **zwei** weiteren **Typen von Äquivalenzumformungen** auskommen:

- Wird zu beiden Seiten einer Gleichung ein beliebiger Term T addiert, so kann dies rückgängig gemacht werden, indem von beiden Seiten der neuen Gleichung T subtrahiert wird. Ein Spezialfall ist die Addition einer beliebigen Zahl zu beiden Seiten einer Gleichung.
- Werden beide Seiten einer Gleichung mit einer Zahl $k \neq 0$ multipliziert, so kann dies rückgängig gemacht werden, indem beide Seiten der neuen Gleichung durch k dividiert werden⁵.

Damit sind automatisch auch das Subtrahieren eines Terms von beiden Seiten einer Gleichung (Beispiel: Addition von -5 oder $-5x$) und das Dividieren beider Seiten einer Gleichung durch eine Zahl $\neq 0$ (Beispiel: Multiplikation mit $\frac{1}{3}$) Äquivalenzumformungen.

Wenn wir uns nun das „Protokoll“ (1.9) noch einmal ansehen, erkennen wir, dass dort nur Äquivalenzumformungen angewandt wurden. Daher wurde nicht nur (2.1) gezeigt, sondern sogar

$$4x + 7 = 15 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2. \quad (2.10)$$

(Erkennen Sie den Unterschied?) Aus diesem Grund gibt die letzte Gleichung $x = 2$ direkt die (einzige) Lösung der ersten Gleichung $4x + 7 = 15$ an.

Jetzt können wir auch verstehen, was in (2.2) schiefgegangen ist: Das Quadrieren beider Seiten einer Gleichung ist *keine* Äquivalenzumformung! Das einfachste Beispiel: Ist $x = 1$, so folgt durch Quadrieren beider Seiten $x^2 = 1$, aber dieser Schritt kann nicht rückgängig gemacht werden: Ist $x^2 = 1$, so ist $x = -1$ oder $x = 1$. Ist von x nur bekannt, dass $x^2 = 1$ ist, so kann daraus *nicht* geschlossen werden, dass $x = 1$ ist, denn es könnte ja auch $x = -1$ sein! Durch das Quadrieren beider Seiten einer Gleichung kann man sich Lösungskandidaten einhandeln, die keine Lösungen sind. Das bedeutet nicht, dass das Quadrieren beim Lösen einer Gleichung verboten wäre – wenn wir es tun, müssen wir uns nur bewusst sein, dass die betreffende Schlussfolgerung nicht umgekehrt werden kann.

Wenn es möglich ist, eine Gleichung durch Anwendung von Äquivalenzumformungen zu lösen, so sollte man diesen Weg beschreiten, da er in der Regel der einfachere ist. Ist das nicht möglich, so kann dennoch nach der Methode „mache das Gleiche mit beiden Seiten einer Gleichung“ vorgegangen werden, es muss aber danach die Probe gemacht werden.

⁵ Eine weitere Äquivalenzumformung besteht darin, beide Seiten einer Gleichung mit dem gleichen Term zu multiplizieren, wobei aber sichergestellt sein muss, dass dieser Term für alle zulässigen Werte der Variablen $\neq 0$ ist. Wir werden solche Äquivalenzumformungen aber in diesem Skriptum nicht benötigen.

3 Lineare Gleichungen

Eine lineare Gleichung in der Variablen x ist eine Gleichung, bei der auf beiden Seiten Terme der Struktur $ax + b$ stehen, wobei a und b reelle Zahlen sind. Ein Beispiel für eine lineare Gleichung ist (1.1), d.h. jene Gleichung, die durch das „Protokoll“ (1.9) gelöst wurde. Lineare Gleichungen können stets mit Hilfe von Äquivalenzumformungen gelöst werden.

Eine andere lineare Gleichung ist

$$12x - 7 = 9x - 5. \quad (3.1)$$

Um sie zu lösen, können wir beispielsweise so vorgehen:

$$\begin{array}{rcl} 12x - 7 = 9x - 5 & | & -9x \\ 3x - 7 = -5 & | & +7 \\ 3x = 2 & | & :3 \\ x = \frac{2}{3} \end{array} \quad (3.2)$$

Lassen Sie dieses „Protokoll“ auf sich wirken, um zu verstehen, welche Strategie hier eingeschlagen wurde: Alle Ausdrücke, die x als Faktor enthalten, wurden nach links, die Zahlen, die ohne x auftreten, wurden nach rechts „geschaufelt“. Da nur Äquivalenzumformungen angewandt wurden, schließen wir: Die (einzige) Lösung der Gleichung (3.1) ist $\frac{2}{3}$ (die Lösungsmenge ist $L = \{\frac{2}{3}\}$).

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$7x + 2 = 9x - 4. \quad (3.3)$$

Welche Strategie soll hier eingeschlagen werden? Eine Möglichkeit ist diese:

$$\begin{array}{rcl} 7x + 2 = 9x - 4 & | & -7x \\ 2 = 2x - 4 & | & +4 \\ 6 = 2x & | & :2 \\ 3 = x \end{array} \quad (3.4)$$

Dass x in der letzten Zeile auf der rechten Seite steht, macht keinerlei Probleme, da die Aussage $3 = x$ das Gleiche bedeutet wie $x = 3$. Die (einzige) Lösung der Gleichung (3.3) ist 3 (die Lösungsmenge ist $L = \{3\}$).

Wenn Sie die Anwendung von Äquivalenzumformungen üben sollen, werden Ihnen auch Gleichungsaufgaben gestellt wie

$$2(3x + 1)^2 + 3 = 18x^2 + 2x. \quad (3.5)$$

Lassen Sie sich von der Komplexität der beiden Terme, die hier auftreten, nicht entmutigen, sondern multiplizieren Sie das Quadrat auf der linken Seite aus, und dann sehen Sie weiter! In

diesem konkreten Fall lassen sich erhebliche Vereinfachungen anbringen:

$$\begin{array}{rcl|l}
 2(3x+1)^2 + 3 = 18x^2 + 2x & | & \text{Quadrat auf der linken Seite ausmultiplizieren} \\
 2(9x^2 + 6x + 1) + 3 = 18x^2 + 2x & | & \text{Klammer auf der linken Seite ausmultiplizieren} \\
 18x^2 + 12x + 2 + 3 = 18x^2 + 2x & | & \text{linke Seite vereinfachen} \\
 18x^2 + 12x + 5 = 18x^2 + 2x & | & -18x^2 \\
 12x + 5 = 2x & | & -2x - 5 \\
 10x = -5 & | & : 10 \\
 x = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2} & &
 \end{array} \tag{3.6}$$

Die „protokollarischen“ Anmerkungen zu den ersten drei Schritten müssen nicht immer angeschrieben werden (obwohl es lehrreich ist, in Worten zusammenzufassen, was man tun wird, um zur nächsten Gleichung zu gelangen). Wenn Ihnen das Termrechnen leicht fällt, können Sie die ersten drei Schritte auch zu einem oder zu zwei Schritten zusammenfassen. Im fünften Schritt wurden die Operationen „es wird $2x$ subtrahiert“ und „es wird 5 subtrahiert“ zu einem zusammengefasst (man hätte hier sogar den vierten und den fünften Schritt zusammenfassen können). Und im letzten Schritt wurde die auftretende Bruchzahl gleich gekürzt, ohne eine weitere Gleichung aufzuschreiben. Insgesamt folgt: Es gibt nur eine Lösung, und zwar $-\frac{1}{2}$. Gleichung (3.5) ist zwar nicht als lineare Gleichung gegeben, aber, wie das „Protokoll“ (3.6) zeigt, reduziert sie sich nach der Subtraktion von $18x^2$ auf eine solche.

Die Art und Weise, wie hier Gleichungen untereinander geschrieben werden, ist charakteristisch für das *Gleichungslösen*. Wenn es nicht um das Lösen einer Gleichung geht, sondern lediglich um das Umformen eines Terms, so müssen Sie das *nicht* tun, sondern können Ihre Umformungen in einer Zeile (so lange sie reicht) hintereinander anschreiben.

4 Die „allgemeine“ lineare Gleichung

Eine lineare Gleichung kann durch Anwendung einer Äquivalenzumformung stets auf die Form

$$ax + b = 0 \tag{4.1}$$

gebracht werden. (Dazu subtrahiert man einfach die rechte Seite der gegebenen Gleichung von beiden Seiten, wodurch sich eine Gleichung ergibt, deren rechte Seite gleich 0 ist.) Da (4.1) ein schönes Beispiel für eine Gleichung ist, in der Konstanten vorkommen, deren Wert nicht festgelegt ist, wollen wir zum Abschluss noch untersuchen, wie die Lösungsmenge von den Werten dieser Konstanten abhängt. Dazu subtrahieren wir b von beiden Seiten der Gleichung und erhalten die (äquivalente) Gleichung

$$ax = -b. \tag{4.2}$$

Der nächste Schritt bestünde darin, beide Seiten durch a zu dividieren, aber das ist nur dann möglich, wenn $a \neq 0$ ist. Daher unterscheiden wir die zwei Fälle $a \neq 0$ und $a = 0$:

- Fall $a \neq 0$:
Wir dividieren beide Seiten von (4.2) durch a und erhalten als (einzige) Lösung $x = -\frac{b}{a}$.

- Fall $a = 0$:

In diesem Fall lautet die Gleichung $0 = b$. Hier kommt die Variable x nicht mehr vor, aber wir fassen diese Aussage dennoch als „Gleichung für x “ auf. Nun ist wieder eine Fallunterscheidung angebracht:

- Ist $b \neq 0$, so sagt die Gleichung $b = 0$ aus, dass b gleichzeitig 0 und $\neq 0$ sein soll – ein glatter Widerspruch, eine zweifellos immer falsche Aussage, gleichgültig, wie x (das ja gar nicht vorkommt) gewählt wird. Daher ist die Lösungsmenge leer.
- Ist $b = 0$, so lautet die Gleichung $0 = 0$. Das ist zweifellos immer eine wahre Aussage, gleichgültig, wie x (das ja gar nicht vorkommt) gewählt wird. Daher ist die Lösungsmenge ganz \mathbb{R} .

Die letzten Betrachtungen mögen wieder ein bisschen wie Haarspalterei aussehen, aber da auch andere Gleichungstypen (wie beispielsweise die quadratischen Gleichungen) Konstanten enthalten, von deren Werten die Lösungsmenge abhängt, ist es eine gute Übung, (4.1) einmal *ganz allgemein* gelöst zu haben.

Besonders der Fall $a = 0$ und $b \neq 0$ ist in logischer Hinsicht interessant: Erzielen Sie mit einer logischen Schlussfolgerung (egal, ob es sich um eine Äquivalenzumformung handelt oder nicht) einen Widerspruch, dann kann die betreffende Gleichung keine Lösung besitzen! Das passiert beispielsweise bei der Gleichung

$$3x + 5 = 3x + 2. \quad (4.3)$$

Nach Subtraktion von $3x$ von beiden Seiten erhalten wir

$$5 = 2. \quad (4.4)$$

Das bedeutet: *Gäbe es eine Lösung*, so müsste $5 = 2$ sein. Daher gibt es keine Lösung. Verstanden?

5 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $8x + 11 = 2x - 1$
Lösung:

Die (einzige) Lösung ist -2 .

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $6x + 5 = 2x - 3$
Lösung:

Die (einzige) Lösung ist $-\frac{7}{8}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $-3x + 5 = 5x - 7$

Lösung:

Die (einzige) Lösung ist $\frac{2}{3}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $2(x + 3)^2 = (x - 1)(x - 2) + x^2 + 1$

Lösung:

Die (einzige) Lösung ist -1 .

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $3x^2 + 12x + 5 = 3(x + 2)^2 + 1$

Lösung:

Die Gleichung besitzt keine Lösung. Die Lösungsmenge ist leer.

- Ein bisschen schwieriger, aber mit den hier besprochenen Methoden ebenfalls zu lösen:

$$\frac{1}{5}x + \frac{2}{3} = \frac{3x + 10}{2}$$

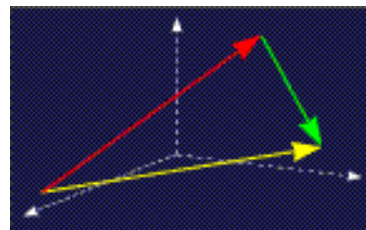
(Hinweis: Multiplizieren Sie beide Seiten dieser Gleichung mit einer geeigneten Zahl, um zuerst einmal die Brüche wegzubekommen!)

Lösung:

Die (einzige) Lösung ist $-\frac{3}{10}$.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Mai 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“

(<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2021 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Quadratische Gleichungen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

In diesem Skriptum werden quadratische Gleichungen und einige mit ihnen zusammenhängende Themen behandelt: die Formen und Typen, in denen sie auftreten; wie sie gelöst werden; wie sie dabei helfen, quadratische Polynome zu faktorisieren; der Satz von Vieta, der einen schönen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten und den Lösungen einer quadratischen Gleichung aufzeigt; und zur Abrundung ein Beispiel einer Gleichung vierten Grades, die auf eine quadratische Gleichung zurückgeführt werden kann.

1 Formen und Typen quadratischer Gleichungen

Eine quadratische Gleichung in der Variable x ist eine Gleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen in die Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.1)$$

bringen lässt, wobei die Koeffizienten a , b , und c festgehaltene reelle Zahlen¹ sind und zudem $a \neq 0$ ist². Auf der linken Seite steht ein Polynom zweiten Grades (ein quadratisches Polynom) in der Variable x . Dessen Koeffizienten (Vorfaktoren) sind a ($\neq 0$), b und c . So kann beispielsweise die Gleichung

$$3x^2 + 2x - 7 = x^2 - 4x + 1 \quad (1.2)$$

durch Subtraktion der rechten Seite von beiden Seiten (eine Äquivalenzumformung!) in

$$2x^2 + 6x - 8 = 0 \quad (1.3)$$

¹ Wir beschränken uns in diesem Skriptum auf quadratische Gleichungen im Rahmen der *reellen Zahlen*. Man kann a , b und c auch aus der erweiterten Zahlenmenge der *komplexen Zahlen* wählen – das werden wir in diesem Skriptum aber nicht tun. Auch als Grundmenge der hier betrachteten Gleichungen wird, sofern nichts anderes dazugesagt ist, die Menge der reellen Zahlen gewählt.

² Ist $a = 0$, so handelt es sich um eine lineare Gleichung.

umgewandelt werden. Wenn Sie sich nicht ganz sicher sind, wie (1.3) aus (1.2) entsteht, gehen Sie das folgende „Protokoll“ Schritt für Schritt durch:

$$\begin{array}{rcl}
 3x^2 + 2x - 7 = x^2 - 4x + 1 & | & -x^2 \\
 2x^2 + 2x - 7 = -4x + 1 & | & +4x \\
 2x^2 + 6x - 7 = 1 & | & -1 \\
 2x^2 + 6x - 8 = 0 & &
 \end{array} \quad (1.4)$$

Die neue, vereinfachte Gleichung (1.3) ist zu (1.2) äquivalent, und sie ist nun von der Form (1.1) mit $a = 2$, $b = 6$ und $c = -8$. Zur Erinnerung, was eine *Gleichung* ist: (1.3) stellt die Frage dar, ob es eine oder mehrere reelle Zahlen x gibt, für die $2x^2 + 6x - 8 = 0$ gilt, und, falls ja, um welche Zahl(en) es sich dabei handelt.

Die Koeffizienten einer quadratischen Gleichung können, wie gesagt, beliebige reelle Zahlen sein (mit der einzigen Einschränkung, dass $a \neq 0$ ist). Um den Umgang mit quadratischen Gleichungen zu lernen, werden oft (wie auch in diesem Skriptum) vorwiegend Beispiele herangezogen, bei denen die Koeffizienten ganzzahlig sind. Das soll Ihnen helfen, sich auf die wesentlichen Aspekte zu konzentrieren, muss aber in praktischen Anwendungen nicht unbedingt der Fall sein. Weiters werden wir die Variable meist mit dem Symbol x bezeichnen, was keineswegs verpflichtend ist³.

Werden beide Seiten einer quadratischen Gleichung der Form (1.1) durch den Koeffizienten des führenden Glieds, d.h. durch a , dividiert (was eine Äquivalenzumformung ist, da $a \neq 0$ ist), so nimmt sie die Form

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1.6)$$

an, wobei nun die Koeffizienten p und q reelle Zahlen sind⁴. Der Koeffizient von x^2 ist gleich 1. Quadratische Gleichungen werden oft in dieser Form angeschrieben – sie wird **Normalform** der quadratischen Gleichung genannt⁵, da sie (unabhängig davon, wie die ursprüngliche Gleichung ausgesehen hat) *eindeutig* ist⁶. Werden beispielsweise beide Seiten von (1.3) durch 2 dividiert, so ergibt sich

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \quad (1.7)$$

als ihre Normalform. Die Gleichungen (1.2), (1.3) und (1.7) sind zueinander äquivalent, da sie mit Hilfe von Äquivalenzumformungen ineinander verwandelt werden können. Sie haben alle die gleiche Lösungsmenge.

Haben wir es mit der Gleichung

$$3x^2 + 4x + 7 = 0 \quad (1.8)$$

³ Um diese beiden Punkte zu illustrieren:

$$\pi^3 \omega^2 - \frac{2\omega}{7} + \frac{23\pi\sqrt{2}}{24} = 0 \quad (1.5)$$

ist eine quadratische Gleichung in der Variable ω („Omega“) mit den (nicht-ganzzahligen) Koeffizienten $a = \pi^3$, $b = -\frac{2}{7}$ und $c = \frac{23\pi\sqrt{2}}{24}$.

⁴ Es gilt dann $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$.

⁵ Man nennt sie auch die pq -Form, während (1.1) als abc -Form bezeichnet werden kann.

⁶ In diesem Sinn lässt sich *jede* quadratische Gleichung – bis auf Äquivalenzumformungen, die ja die Lösungsmenge nicht verändern – durch zwei Zahlen p und q charakterisieren.

zu tun (sie ist vom Typ (1.1) mit $a = 3$, $b = 4$ und $c = 7$), so kann sie (indem beide Seiten durch 3 dividiert werden) in die Normalform

$$x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{7}{3} = 0 \quad (1.9)$$

gebracht werden (also auf die Form (1.6) mit $p = \frac{4}{3}$ und $q = \frac{7}{3}$). Das zeigt einen möglichen Nachteil der Normalform auf: Während die Koeffizienten in (1.8) ganze Zahlen sind, treten in (1.9) Bruchzahlen auf. Welche dieser beiden Formen als die einfachere betrachtet werden soll und sich besser zum Weiterrechnen eignet, ist in gewisser Weise Geschmackssache (und im konkreten Fall Ihnen überlassen). *Allgemeinen* Überlegungen wird meist die Normalform zugrunde gelegt, da es hier nur *zwei* frei zu wählende Koeffizienten p und q gibt, während es in der Form (1.1) mit a , b und c *drei* sind.

Ein besonders einfacher Typ quadratischer Gleichungen ist dadurch charakterisiert, dass der Koeffizient der ersten Potenz von x gleich 0 ist, d.h. dass $b = 0$ in (1.1) bzw. $p = 0$ in (1.6) ist. Ein Beispiel:

$$2x^2 - 5 = 0. \quad (1.10)$$

Ein anderer einfacher Typ ist dadurch charakterisiert, dass das konstante Glied verschwindet, d.h. dass $c = 0$ in (1.1) bzw. $q = 0$ in (1.6) ist. Ein Beispiel:

$$4x^2 + 3x = 0. \quad (1.11)$$

Bevor wir quadratische Gleichungen ganz allgemein betrachten (und lösen), sehen wir uns zum Aufwärmen diese beiden einfachen Typen näher an.

2 Quadratische Gleichungen vom Typ $ax^2 + c = 0$

Eine quadratische Gleichung, in der der Koeffizient der ersten Potenz der Variable x verschwindet, ist leicht zu lösen. Betrachten wir als Beispiel die Gleichung

$$x^2 - 9 = 0. \quad (2.1)$$

Da wir 9 als 3^2 schreiben können, folgt mit Hilfe der dritten binomischen Formel $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$. Gleichung (2.1) besagt daher nichts anderes als

$$(x + 3)(x - 3) = 0. \quad (2.2)$$

Ist x eine Lösung, so bedeutet das, dass das Produkt der beiden Zahlen $x + 3$ und $x - 3$ gleich 0 ist. Nun kann das Produkt zweier Zahlen nur dann 0 sein, wenn (zumindest) eine von ihnen gleich 0 ist. Daher gilt entweder $x + 3 = 0$ (d.h. $x = -3$) oder $x - 3 = 0$ (d.h. $x = 3$). Die Probe ergibt, dass sowohl -3 als auch 3 die Gleichung erfüllen, da $(-3)^2 = 3^2 = 9$ gilt. Die Gleichung (2.1) besitzt daher (genau) zwei Lösungen, -3 und 3 , die wir durch die Schreibweise ± 3 (ausgesprochen „plus-minus 3“) zusammenfassen können. Die Lösungsmenge ist $L = \{-3, 3\}$.

Wir können Gleichung (2.1) auch in der Form

$$x^2 = 9 \quad (2.3)$$

anschreiben. Ist dann x nicht gleich der Wurzel aus 9? Wie das Argument, das zur Lösungsmenge geführt hat, zeigt, kann man hier nicht einfach $x = \sqrt{9} = 3$ schließen, sondern muss auch die negative Lösung, d.h. die Möglichkeit, dass $x = -\sqrt{9} = -3$ ist, berücksichtigen.

Diese letzte Beobachtung ist sehr wichtig! Ganz allgemein gilt: Ist d eine positive Zahl, so folgt aus $x^2 = d$, dass entweder $x = \sqrt{d}$ oder $x = -\sqrt{d}$. Es gilt auch die Umkehrung: Sowohl das Quadrat von \sqrt{d} als auch jenes von $-\sqrt{d}$ ist gleich d . Formal angeschrieben gilt also für jedes $d > 0$:

$$x^2 = d \Leftrightarrow x = -\sqrt{d} \text{ oder } x = \sqrt{d}. \quad (2.4)$$

Merken Sie sich das bitte! Einer solchen Situation werden wir auch bei der Behandlung der allgemeinen quadratischen Gleichung begegnen.

Ein anderes Beispiel des Typs $ax^2 + c = 0$ ist die Gleichung

$$x^2 + 9 = 0. \quad (2.5)$$

Für sie tritt ein anderer Lösungsfall ein: Da $x^2 \geq 0$ für jedes reelle x , kann $x^2 + 9$ nicht 0 sein. Daher besitzt die Gleichung (2.5) keine Lösung. Die Lösungsmenge ist leer: $L = \{\}$.

Als drittes Beispiel des Typs $ax^2 + c = 0$ betrachten wir die Gleichung

$$x^2 = 0. \quad (2.6)$$

Ist $x^2 = 0$, so muss $x = 0$ sein. Diese Gleichung besitzt daher nur eine einzige Lösung, nämlich 0. Die Lösungsmenge ist $L = \{0\}$.

Die drei Beispiele (2.1), (2.5) und (2.6) stecken ab, welche Lösungsmengen uns bei Gleichungen der Form $ax^2 + c = 0$ begegnen können: Es kann zwei, eine oder gar keine Lösung geben.

In den bisherigen Beispielen war zwar $a = 1$, aber auch wenn $a \neq 1$ ist, können wir eine solche Gleichung leicht lösen. Haben wir etwa die Gleichung

$$2x^2 - 9 = 0 \quad (2.7)$$

vor uns, so dividieren wir beide Seiten durch 2 und erhalten

$$x^2 - \frac{9}{2} = 0. \quad (2.8)$$

Daher gibt es zwei Lösungen⁷: $x = \pm\sqrt{\frac{9}{2}} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Die Lösungsmenge ist $L = \{-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\}$. Die Lösungen sind nun irrationale Zahlen. Wir geben sie am besten in der

⁷ Im letzten Schritt wird „der Nenner rational gemacht“. Da $(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ ist, können wir $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ schreiben. Merken Sie sich diesen Trick!

symbolisch-exakten Form an. Sollten Sie (etwa im Rahmen einer praktischen Anwendung) Zahlenwerte in Dezimaldarstellung benötigen, so berechnen Sie (etwa mit dem Taschenrechner) numerische *Näherungswerte* mit einer der Anwendung angemessenen Genauigkeit, beispielsweise $\frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2.12$. Sie können dann die Lösungen *näherungsweise* in der Form $x \approx \pm 2.12$ angeben.

Wir fassen unsere bisherigen Erkenntnisse zusammen: Für eine Gleichung der Form $ax^2 + c = 0$ (mit $a \neq 0$, was immer vorausgesetzt ist) tritt stets einer der folgenden Lösungsfälle ein:

- Ist $c \neq 0$ und haben a und c verschiedene Vorzeichen, so gibt es (genau) zwei Lösungen, nämlich $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$.
- Ist $c = 0$, so gibt es (genau) eine Lösung, nämlich $x = 0$.
- Ist $c \neq 0$ und haben a und c das gleiche Vorzeichen, so gibt es keine Lösung.

3 Quadratische Gleichungen vom Typ $ax^2 + bx = 0$

Eine Gleichung vom Typ $ax^2 + bx = 0$ (mit $a \neq 0$) kann durch Herausheben eines Faktors x auf der linken Seite in der Form

$$x(ax + b) = 0 \quad (3.1)$$

angeschrieben werden. Ist x eine Lösung, so bedeutet das, dass das Produkt der beiden Zahlen x und $ax + b$ gleich 0 ist. Wieder verwenden wir die Tatsache, dass das Produkt zweier Zahlen nur dann 0 ist, wenn (zumindest) eine von ihnen gleich 0 ist. Daher gilt entweder $x = 0$ oder $ax + b = 0$ (d.h. $x = -\frac{b}{a}$). Haben Gleichungen dieses Typs daher stets zwei Lösungen? Nicht immer! Aufgepasst:

- Ist $b \neq 0$, so gibt es tatsächlich zwei Lösungen (nämlich 0 und $-\frac{b}{a}$).
- Ist aber $b = 0$, so „fallen die beiden Lösungen zusammen“, d.h. es gibt dann nur eine einzige Lösung, nämlich 0.

Hier ein Beispiel: Um die Gleichung $7x^2 + 3x = 0$ zu lösen, schreiben wir sie in der Form

$$x(7x + 3) = 0 \quad (3.2)$$

an, woraus unmittelbar folgt, dass entweder $x = 0$ oder $7x + 3 = 0$ (also $x = -\frac{3}{7}$) gilt. Die beiden Lösungen sind daher 0 und $-\frac{3}{7}$. Die Lösungsmenge ist $L = \{-\frac{3}{7}, 0\}$.

4 Allgemeine quadratische Gleichungen und die „kleine Lösungsformel“

Nachdem wir uns nun anhand zweier einfacher Typen quadratischer Gleichungen über die auftretenden Lösungsfälle orientiert haben, kommen wir zur allgemeinen Form (1.1) bzw. (1.6) zurück. Wie können solche Gleichungen gelöst werden? Betrachten wir zunächst das Beispiel (1.7)

$$x^2 + 3x - 4 = 0. \quad (4.1)$$

Können wir hier in irgendeinem Sinn „die Wurzel ziehen“? Dazu müssten wir die linke Seite oder einen Teil der linken Seite als Quadrat schreiben. Hier kommen uns die binomischen Formeln zu Hilfe. Machen wir einen Versuch:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9. \quad (4.2)$$

Dieser Term beginnt mit $x^2 + 6x$, aber wir hätten gern einen Term, der mit $x^2 + 3x$ beginnt. Also zweiter Versuch:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 + 3x + \frac{9}{4}. \quad (4.3)$$

Bingo! Diese Identität weist uns den Weg: Wir addieren zunächst 4 zu beiden Seiten von (4.1), um die 4 auf die rechte Seite zu bekommen:

$$x^2 + 3x = 4. \quad (4.4)$$

Um nun auf der linken Seite einen Summanden $\frac{9}{4}$ zu bekommen, addieren wir⁸ auf beiden Seiten $\frac{9}{4}$ und erhalten

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 4 + \frac{9}{4} \quad (4.5)$$

oder, mit vereinfachter rechter Seite,

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}. \quad (4.6)$$

Die linke Seite können wir nun mit (4.3) als Quadrat schreiben:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}. \quad (4.7)$$

Diese Gleichung, die äquivalent zu (4.1) ist, besagt, dass das Quadrat von $x + \frac{3}{2}$ gleich $\frac{25}{4}$ ist. Nun erinnern wir uns an die früher gemachte Beobachtung (2.4), und es wird klar, warum sie für quadratische Gleichungen ganz allgemein wichtig ist. Denn mit ihrer Hilfe folgt, dass $x + \frac{3}{2}$ entweder gleich der Wurzel aus $\frac{25}{4}$, also $\frac{5}{2}$, oder minus der Wurzel aus $\frac{25}{4}$, also $-\frac{5}{2}$ ist. Wir schreiben das in der Form

$$x + \frac{3}{2} = \pm \frac{5}{2} \quad (4.8)$$

an, wobei das doppelte Vorzeichen als „entweder + oder –“ zu lesen ist. Subtrahieren wir auf beiden Seiten $\frac{3}{2}$, so erhalten wir mit

$$x = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \quad (4.9)$$

zwei Lösungen, nämlich

$$x_1 = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{8}{2} = -4 \quad (4.10)$$

⁸ Diese Methode heißt „Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat“, da $x^2 + 3x$ um $\frac{9}{4}$ auf das vollständige Quadrat $(x + \frac{3}{2})^2$ ergänzt wird.

und

$$x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{2}{2} = 1. \quad (4.11)$$

Insgesamt haben wir also gezeigt: Ist x eine Lösung von (4.1), so ist entweder $x = -4$ oder $x = 1$. Wenn Sie die Argumentation noch einmal Schritt für Schritt genau durchgehen, so erkennen Sie, dass sich alle Schritte rückgängig machen lassen. Daher haben wir die (beiden) Lösungen gefunden. Die Lösungsmenge ist $L = \{-4, 1\}$.

Dieses Verfahren kann auch auf die **allgemeine Normalform** (1.6) der quadratischen Gleichung angewandt werden, wobei sich aber beim "Wurzelziehen" auch andere Lösungsfälle ergeben können. Wir beginnen die Argumentation für den allgemeinen Fall ganz analog zum vorigen Beispiel und schreiben zunächst die binomische Formel

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \quad (4.12)$$

an. Dieser Ausdruck beginnt genau mit dem Term $x^2 + px$, der auch in der allgemeinen Normalform (1.6) aufscheint! Wenn wir also (1.6) durch Subtraktion von q in die Form

$$x^2 + px = -q \quad (4.13)$$

bringen, auf beiden Seiten $\frac{p^2}{4}$ addieren und (4.12) verwenden, erhalten wir die zu (1.6) äquivalente Gleichung

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q. \quad (4.14)$$

Bisher ist alles ganz analog zum zuvor diskutierten Beispiel (4.1) verlaufen. Hier jedoch müssen wir **drei Lösungsfälle** unterscheiden: Die rechte Seite, $\frac{p^2}{4} - q$, die sogenannte **Diskriminante** der Gleichung, kann positiv, 0 oder negativ sein:

- Fall $\frac{p^2}{4} - q > 0$:
In diesem Fall können wir die „Wurzel ziehen“, müssen aber – siehe wieder (2.4)! – auch die negative Lösung berücksichtigen. Es gilt dann

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad (4.15)$$

wobei das doppelte Vorzeichen als „entweder + oder –“ gelesen werden muss. Daher gibt es zwei Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad (4.16)$$

wobei x_1 mit einem der beiden Vorzeichen und x_2 mit dem anderen berechnet wird.

- Fall $\frac{p^2}{4} - q = 0$:
In diesem Fall reduziert sich unsere Gleichung auf $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0$, woraus folgt $x + \frac{p}{2} = 0$. Daher gibt es nur eine Lösung,

$$x = -\frac{p}{2}. \quad (4.17)$$

- Fall $\frac{p^2}{4} - q < 0$:

In diesem Fall impliziert unsere Gleichung, dass das Quadrat von $x + \frac{p}{2}$ negativ sein müsste. Da ein Quadrat (im Rahmen der reellen Zahlen) aber nicht negativ sein kann, gibt es keine Lösung.

Damit haben wir nicht nur die drei möglichen Lösungsfälle gefunden, sondern mit (4.16), der sogenannten **kleinen Lösungsformel**, einen handlichen Ausdruck für die zwei Lösungen, die im Fall positiver Diskriminante existieren.

In der Praxis wird nicht zuerst das Vorzeichen der Diskriminante bestimmt, sondern (pragmatisch) sogleich p und q in die kleine Lösungsformel (4.16) eingesetzt. Die Diskriminante ist dann die Zahl, die unter dem Wurzelzeichen steht. Ist sie positiv, so gibt es zwei Lösungen. Ist sie 0, so fallen die beiden Lösungen zusammen, und es gibt nur eine Lösung. Ist sie negativ, so gibt es keine Lösung.

Wir exerzieren das anhand einiger Beispiele durch:

- Wir betrachten die bereits oben ausführlich behandelte Gleichung (4.1)

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \quad (4.18)$$

und lösen sie nun durch Einsetzen in die kleine Lösungsformel. Dazu lesen wir $p = 3$ und $q = -4$ ab und berechnen

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3^2}{4} + 4} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}. \quad (4.19)$$

Es gibt also zwei Lösungen, $x_1 = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{8}{2} = -4$ und $x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$. Die Lösungsmenge ist $L = \{-4, 1\}$. Dieses Ergebnis haben wir bereits früher durch Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat erhalten. Der gesamte Lösungsweg, der sich zuvor von (4.1) bis (4.9) erstreckt hat, wird unter Benutzung der kleinen Lösungsformel in (4.19) nun in einer einzigen Zeile vollzogen!

- Um zu verdeutlichen, dass die Lösungen quadratischer Gleichungen nicht immer „schöne“ ganze Zahlen sind, betrachten wir die Gleichung

$$x^2 + 3x - 1 = 0. \quad (4.20)$$

Mit $p = 3$ und $q = -1$ ergeben sich die zwei Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 1} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}, \quad (4.21)$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass $\sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ ist.

- Unser drittes Beispiel ist die Gleichung

$$x^2 + 6x + 9 = 0. \quad (4.22)$$

Wir lesen $p = 6$ und $q = 9$ ab und schreiben mit diesen Werten die kleine Lösungsformel an⁹:

$$x_{1,2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{6^2}{4} - 9} = -3 \pm \sqrt{\frac{36}{4} - 9} = -3 \pm \sqrt{9 - 9} = -3 \pm 0 = -3. \quad (4.23)$$

Sehen Sie, was passiert ist? Unter dem Wurzelsymbol hat sich 0 ergeben (d.h. die Diskriminante ist gleich 0), und daher gibt es nur die Lösung $x = -3$. Die Lösungsmenge ist $L = \{-3\}$. Wenn einem auffällt, dass die linke Seite von (4.22) nach der ersten binomischen Formel nichts anderes als $(x + 3)^2$ ist, dann ergibt sich diese Lösung auf einfachere Weise: $(x + 3)^2 = 0$ besagt das Gleiche wie $x + 3 = 0$, also $x = -3$.

- Unser viertes Beispiel ist die Gleichung

$$x^2 - 3x + 4 = 0. \quad (4.24)$$

Wir lesen $p = -3$ und $q = 4$ ab und schreiben mit diesen Werten die kleine Lösungsformel an:

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3^2}{4} - 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}}. \quad (4.25)$$

Jetzt können wir aufhören, denn unter dem Wurzelsymbol steht eine negative Zahl (d.h. die Diskriminante ist negativ). Daher besitzt diese Gleichung keine reelle Lösung. Die Lösungsmenge ist leer: $L = \{\}$.

5 Die „große Lösungsformel“

Ist eine quadratische Gleichung nicht in Normalform (1.6), sondern in der Form (1.1) mit $a \neq 1$ gegeben, so gibt es zwei Möglichkeiten:

- Erste Möglichkeit: Die Gleichung wird durch Division beider Seiten durch a in die Normalform gebracht, und es wird die kleine Lösungsformel (4.16) angewandt.
- Zweite Möglichkeit: Es wird die sogenannte **große Lösungsformel**

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5.1)$$

benutzt. Sie ergibt sich aus der kleinen Lösungsformel (4.16), indem $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}} = \\ &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

⁹ Dass die Schreibweise $x_{1,2}$ hier eigentlich nicht gerechtfertigt ist, da es ja nur *eine* Lösung gibt (was wir aber erst *danach* bemerken), nehmen wir bei dieser schnellen Lösungsmethode in Kauf.

Als Diskriminante, die über die Anzahl der Lösungen entscheidet, dient nun die Kombination $b^2 - 4ac$. (Bei genauer Betrachtung dieser Rechnung wird Ihnen vielleicht aufgefallen sein, dass in der zweiten Zeile im Nenner die Wurzel aus $4a^2$ gezogen wurde. Je nach dem Vorzeichen von a ist $\sqrt{4a^2}$ entweder $2a$ oder $-2a$. Wir haben dafür einfach $2a$ geschrieben, da vor dem betreffenden Bruch ohnehin das Doppelvorzeichen \pm steht.)

Sollen wir nun beispielsweise die Gleichung

$$3x^2 - 2x - 7 = 0 \quad (5.3)$$

lösen, so ist die Benutzung der großen Lösungsformel eine Option: Mit $a = 3$, $b = -2$ und $c = -7$ berechnen wir

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{88}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{22}}{3}, \quad (5.4)$$

wobei zur Vereinfachung benutzt wurde, dass $\sqrt{88} = \sqrt{4 \cdot 22} = 2\sqrt{22}$ gilt.

Die beiden Lösungsformeln (von denen Sie zumindest eine **auswendig kennen** sollten) können auf *alle* quadratischen Gleichungen angewandt werden. Ihre Anwendung auf Gleichungen vom Typ $ax^2 + c = 0$ und $ax^2 + bx = 0$, die wir bereits besprochen haben, bedeutet allerdings, mit Kanonen auf Spatzen zu schießen.

6 Ein praktisches Beispiel

Als praktisches Anwendungsbeispiel einer quadratischen Gleichung gehen wir von der Faustformel für den – in Meter gemessenen – Anhalteweg beim Autofahren

$$\text{Anhalteweg} = \frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10} \quad (6.1)$$

aus. Dabei ist v die in km/h angegebene Geschwindigkeit beim Erkennen eines Hindernisses. Bei welcher Geschwindigkeit ist der Anhalteweg gleich 40 m? Die Geschwindigkeit, für die das der Fall ist, muss die Gleichung

$$\frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10} = 40 \quad (6.2)$$

erfüllen – das ist unser Beispiel einer in der Praxis auftretenden quadratischen Gleichung! Die Variable heißt jetzt v , was uns aber nicht stören sollte. Als Grundmenge legen wir die Menge \mathbb{R}^+ aller positiven reellen Zahlen fest (da eine negative Lösung keine Bedeutung für die Fragestellung hätte). Um die Gleichung (6.2) zu lösen, schreiben wir sie zunächst gemäß dem folgenden „Protokoll“ in die Normalform um:

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10} &= 40 & | \cdot 100 \\ v^2 + 30v &= 4000 & | -4000 \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$v^2 + 30v - 4000 = 0$$

Da nur Äquivalenzumformungen verwendet wurden, hat die letzte Gleichung die gleiche Lösungsmenge wie (6.2). Nun können wir die kleine Lösungsformel (mit $p = 30$ und $q = -4000$) anwenden:

$$v_{1,2} = -\frac{30}{2} \pm \sqrt{\frac{30^2}{4} + 4000} = -15 \pm \sqrt{225 + 4000} = -15 \pm \sqrt{4225} = -15 \pm 65. \quad (6.4)$$

Damit ergeben sich $v_1 = -15 - 65 = -80$ und $v_2 = -15 + 65 = 50$. Da v_1 nicht in der Grundmenge liegt, bleibt v_2 als einzige Lösung des Problems übrig: Damit der Anhalteweg 40 m ist, muss die Geschwindigkeit 50 km/h betragen. Soll etwa durch eine Geschwindigkeitsbeschränkung erreicht werden, dass der mit der Faustformel berechnete Anhalteweg 40 m nicht übersteigt, so muss die zulässige Höchstgeschwindigkeit mit 50 km/h festgesetzt werden.

7 Faktorisierung quadratischer Polynome

Im Zuge verschiedenster Berechnungen kann es nützlich sein zu wissen, ob (und wie) sich ein Polynom zweiten Grades (ein quadratisches Polynom) als Produkt von Linearfaktoren (d.h. als Produkt von Polynomen ersten Grades) schreiben lässt. Um ein Beispiel für eine solche Situation anzuführen, stellen wir uns vor, in einer Anwendung tritt die Notwendigkeit auf, den Bruchterm

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} \quad (7.1)$$

zu vereinfachen. Auf den ersten Blick ist nicht ersichtlich, ob man hier kürzen kann. Nun lässt sich der Zähler aber als Produkt zweier Linearfaktoren schreiben:

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1). \quad (7.2)$$

(Rechnen Sie nach!) Damit können wir tatsächlich vereinfachen:

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \frac{(x + 4)(x - 1)}{x - 1} = x + 4, \quad (7.3)$$

was für alle $x \neq 1$ gilt¹⁰. Damit ist die Nützlichkeit der Faktorisierung quadratischer Polynome illustriert. Aber welche Bewandnis hat es mit der Identität (7.2)? Wie können wir eine solche Faktorisierung finden? Wir machen zunächst eine Beobachtung: Der Zähler des Bruchterms in (7.1) ist genau das Polynom, das in der quadratischen Gleichung (4.1) bzw. (4.18), die wir bereits (mit zwei verschiedenen Methoden) gelöst haben, auftritt. Die Lösungen dieser Gleichung sind -4 und 1 , und diese beiden Zahlen treten (mit dem umgekehrten Vorzeichen) in den Linearfaktoren in (7.2) auf!

Hierbei handelt es sich um einen allgemeingültigen Zusammenhang. Er lautet:

- Besitzt die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ zwei Lösungen x_1 und x_2 , so gilt

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2). \quad (7.4)$$

¹⁰ Für $x = 1$ reduziert sich der Bruchterm auf $\frac{0}{0}$, ist also nicht definiert.

- Besitzt die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ nur eine Lösung x_1 , so gilt¹¹

$$x^2 + px + q = (x - x_1)^2. \quad (7.5)$$

- Besitzt die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ keine Lösung, so lässt sich das Polynom $x^2 + px + q$ nicht als Produkt von Linearfaktoren schreiben¹².

Diese Aussagen können durch eine Rechnung und ein kleines Argument bewiesen werden:

Beweis: In den ersten beiden Fällen sind die Lösungen durch die kleine Lösungsformel gegeben, wobei die Diskriminante $\frac{p^2}{4} - q$ im ersten Fall positiv, im zweiten Fall gleich 0 ist. Wir fassen beide Fälle zusammen: Mit

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad (7.6)$$

berechnen wir

$$(x - x_1)(x - x_2) = \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) \left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right). \quad (7.7)$$

Mit Hilfe der dritten binomischen Formel¹³ formen wir dies zu

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) \quad (7.8)$$

um, multiplizieren das Quadrat aus und erhalten

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = x^2 + px + q. \quad (7.9)$$

Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + px + q$ gilt. Gibt es nur eine Lösung, so ist $x_2 = x_1$ und daher $(x - x_1)(x - x_2) = (x - x_1)^2$.

Zuletzt betrachten wir den Fall, dass die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ keine Lösung besitzt. Wäre es möglich, $x^2 + px + q$ als Produkt von Linearfaktoren zu schreiben, d.h. als Produkt der Form $(x - \text{Zahl}_1)(x - \text{Zahl}_2)$, so wäre es für $x = \text{Zahl}_1$ und für $x = \text{Zahl}_2$ gleich 0, was der Annahme widerspricht, dass es *keine* Zahl x gibt, für die $x^2 + px + q = 0$ gilt. Daher kann es in diesem Fall keine Faktorisierung geben.

¹¹ Dieser zweite Fall ist gewissermaßen ein Spezialfall des ersten, wenn die beiden Lösungen zusammenfallen.

¹² Diese Aussage gilt nur im Rahmen der reellen Zahlen, auf die wir uns in diesem Skriptum beschränken. Im Rahmen der erweiterten Zahlenmenge der *komplexen Zahlen* besitzt jede quadratische Gleichung zumindest eine Lösung, sodass dieser dritte Fall dann nicht auftritt.

¹³ Wir denken uns die dritte binomische Formel in der Form $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ angeschrieben (mit Großbuchstaben, da die Symbole a und b in diesem Skriptum bereits für andere Zwecke reserviert sind) und setzen $A = x + \frac{p}{2}$ und $B = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Zur Überprüfung unserer Überlegungen bemerken wir, dass die Faktorisierungen (7.4) und (7.5) sofort auf die Lösungen der zugehörigen quadratischen Gleichung führen: Ist $(x-x_1)(x-x_2) = 0$, so gilt entweder $x-x_1 = 0$ (also $x = x_1$) oder $x-x_2 = 0$ (also $x = x_2$). Ist $(x-x_1)^2 = 0$, so folgt $x-x_1 = 0$ (also $x = x_1$). Es passt also alles wunderbar zusammen!

Damit ist **das Problem der Faktorisierung quadratischer Polynome allgemein gelöst!** Unsere Argumente waren zwar auf quadratische Gleichungen zugeschnitten, die in Normalform (1.6) vorliegen, aber wie wir bereits wissen, kann jede in der Form (1.1) gegebene quadratische Gleichung in Normalform gebracht werden, indem beide Seiten durch a dividiert werden.

Betrachten wir noch ein konkretes Beispiel: Um herauszufinden, ob das Polynom

$$x^2 - 5x + 3 \quad (7.10)$$

faktorisiert werden kann und, falls ja, wie die Faktoren aussehen, lösen wir die Gleichung

$$x^2 - 5x + 3 = 0. \quad (7.11)$$

Die Lösungen sind (rechnen Sie selbst nach!) $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$. Daher gilt

$$x^2 - 5x + 3 = \left(x - \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right) \left(x - \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right). \quad (7.12)$$

In diesem Beispiel sind die Koeffizienten der Linearfaktoren keine ganzen Zahlen, was uns aber in grundsätzlicher Hinsicht nicht stören muss.

Der Zusammenhang zwischen Faktorisierung und quadratischen Gleichungen erlaubt es uns, quadratische Gleichungen mit *vorgegebenen* Lösungen sofort anzuschreiben. Soll eine quadratische Gleichung etwa die Lösungen 2 und 3 besitzen, so multiplizieren wir $(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$. Die gesuchte quadratische Gleichung lautet daher (in Normalform) $x^2 - 5x + 6 = 0$. (Auf diese Weise werden ohne große Mühe Übungsaufgaben zum Lösen quadratischer Gleichungen entworfen, bei denen sichergestellt ist, dass die Lösungen „schöne“ ganze Zahlen sind!)

8 Satz von Vieta

Eine mit der Faktorisierung eng zusammenhängende Beziehung zwischen den Lösungen x_1 und x_2 einer quadratischen Gleichung und den Koeffizienten p und q ihrer Normalform ist der sogenannte **Satz von Vieta**¹⁴. Er besagt, dass

$$x_1 + x_2 = -p \quad (8.1)$$

und

$$x_1 x_2 = q. \quad (8.2)$$

¹⁴ Auch „Wurzelsatz von Vieta“ genannt.

Beweis: Der Satz kann auf zwei Arten bewiesen werden. Die kürzere und elegantere Version verwendet die Faktorisierung (7.4) und besteht nur aus der Rechnung

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2. \quad (8.3)$$

Durch Vergleich mit der Form $x^2 + px + q$ ergeben sich sofort (8.1) und (8.2).

Man kann aber auch die kleine Lösungsformel für x_1 und x_2 benutzen, um (8.1) und (8.2) explizit nachzurechnen. Beweis von (8.1):

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p. \quad (8.4)$$

Beweis von (8.2):

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \right) \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \right) = \\ &= \frac{p^4}{4} - \left(\frac{p^4}{4} - q \right) = q, \end{aligned} \quad (8.5)$$

wobei hier wieder die dritte binomische Formel benutzt wurde.

Mit Hilfe der beiden Formeln (8.1) und (8.2) können aus den Lösungen einer quadratischen Gleichung sofort die Koeffizienten p und q ermittelt werden. Der Satz gilt auch für den Fall, dass es nur eine Lösung gibt, d.h. dass die Lösungen zusammenfallen. Es ist dann $x_2 = x_1$ zu setzen.

Umgekehrt ergibt sich mit dem Satz von Vieta eine nette Deutung einer quadratischen Gleichung als eine Art *Denksportaufgabe*. Beispielsweise lautet er für die Gleichung (4.1) bzw. (4.18), mit $p = 3$ und $q = -4$,

$$x_1 + x_2 = -3 \quad (8.6)$$

$$x_1 x_2 = -4. \quad (8.7)$$

Die Lösungen zu finden ist gleichbedeutend mit der Aufgabe „Sag mir zwei Zahlen, deren Summe -3 ist und deren Produkt -4 ist!“. Mit ein bisschen Probieren geht das in diesem einfachen Fall auch im Kopf: Die gesuchten Zahlen sind -4 und 1 , genau die bereits auf andere Art gefundenen Lösungen!

Damit kann auch für andere quadratische Gleichungen durch Kopfrechnen versucht werden, ganzzahlige Lösungen zu finden (die es natürlich nicht immer geben muss), und umgekehrt fällt – wenn die Lösungen bekannt sind – die Probe leicht, da man die Lösungen nur addieren und multiplizieren muss.

9 Gleichungen, die auf quadratische Gleichungen zurückgeführt werden können

Manche Gleichungen, die auf den ersten Blick kompliziert aussehen, lassen sich auf quadratische Gleichungen zurückführen. Ein Beispiel ist die Gleichung

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0. \quad (9.1)$$

Eine Gleichung vierten Grades! Wenn Sie sie genau ansehen, werden Sie bemerken, dass nur gerade Potenzen von x auftreten. Wenn wir die Abkürzung

$$y = x^2 \quad (9.2)$$

vereinbaren, nimmt sie die Form

$$y^2 + 3y - 4 = 0 \quad (9.3)$$

an. Eine alte Bekannte – siehe (1.7), (4.1) und (4.18)! Dass die Variable jetzt y heißt, stecken wir locker weg. Sie besitzt, wie bereits mehrfach berechnet, zwei Lösungen, nämlich -4 und 1 . Das bedeutet jetzt (mit dem richtigen Variablennamen angeschrieben): $y = -4$ und $y = 1$. Nun bedenken wir, dass y gemäß (9.2) nur die abgekürzte Schreibweise für x^2 ist. Es gibt also zwei Möglichkeiten, dass x die ursprüngliche Gleichung (9.1) erfüllt: $x^2 = -4$ und $x^2 = 1$. Das sind jetzt *zwei* quadratische Gleichungen, und *jede* Lösung (zumindest) *einer* dieser beiden Gleichungen ist eine Lösung von (9.1). Sehen wir uns die beiden Gleichungen an:

- Die Gleichung $x^2 = -4$ besitzt klarerweise keine (reelle) Lösung.
- Die Gleichung $x^2 = 1$ besitzt die zwei Lösungen $x = \pm 1$.

Damit ist (9.1) gelöst: Die Lösungsmenge ist $L = \{-1, 1\}$.

10 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $3x^2 - 5 = 0$
Lösung:

$$\text{Die Lösungsmenge ist } L = \left\{ -\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}} \right\}.$$

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $x^2 - 2x = 0$
Lösung:

$$\text{Die Lösungsmenge ist } L = \{0, 2\}.$$

- Lösen Sie die folgende Gleichung durch Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = \{-2, 3\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung durch Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat:

$$z^2 - 4z + 4 = 0$$

Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = \{2\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $x^2 - 2x - 8 = 0$

Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = \{-2, 4\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $3u^2 - 7u - 6 = 0$

Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = \{-\frac{2}{3}, 3\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = \{\frac{1}{2}\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $w^2 + 5w - 3 = 0$

Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = \{-\frac{5+\sqrt{37}}{2}, -\frac{5-\sqrt{37}}{2}\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $s^2 + 5s + 7 = 0$

Lösung:

Die Lösungsmenge ist leer: $L = \{\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $4x^2 + x - 1 = 0$

Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = \{-\frac{1-\sqrt{17}}{8}, -\frac{1+\sqrt{17}}{8}\}$.

- Bei welcher Geschwindigkeit ergibt sich nach der Faustformel (6.1) ein Anhalteweg von 88 m?

Lösung:

Bei einer Geschwindigkeit von 80 km/h.

- Bei welcher Geschwindigkeit ergibt sich nach der Faustformel (6.1) ein Anhalteweg von 100 m? Runden Sie das Ergebnis sinnvoll!

Lösung:

Bei einer Geschwindigkeit von 86.1 km/h.

- Finden Sie heraus, ob das Polynom $x^2 + x - 20$ als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann, und, falls ja, finden Sie diese Faktoren!

Lösung:

$$(x - 4)(x + 5) = x^2 - x - 20$$

- Finden Sie heraus, ob das Polynom $x^2 + x + 20$ als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann, und, falls ja, finden Sie diese Faktoren!

Lösung:

Das Polynom lässt sich nicht faktorisieren.

- Finden Sie heraus, ob das Polynom $x^2 + x + \frac{1}{4}$ als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann, und, falls ja, finden Sie diese Faktoren!

Lösung:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

- Finden Sie heraus, ob das Polynom $x^2 - x - 7$ als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann, und, falls ja, finden Sie diese Faktoren!

Lösung:

$$\left(x - \frac{1 + \sqrt{29}}{2}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{29}}{2}\right) = x^2 - x - 7$$

- Lösen Sie die Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$ im Kopf unter Zuhilfenahme des Satzes von Vieta!

Lösung:

Die Summe der Lösungen muss 3 sein, ihr Produkt 2.
Die Lösungen sind 1 und 2.

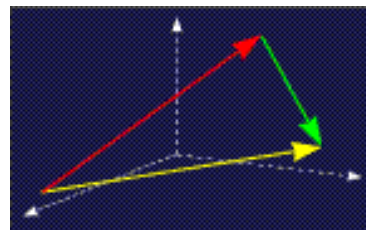
- Lösen Sie die folgende Gleichung: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

Lösung:

$$L = \{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\}$$

Dieses Skriptum wurde erstellt im Mai 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“

(<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Bruchgleichungen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

In diesem Skriptum werden Bruchgleichungen behandelt. Da es bei einer Bruchgleichung darauf ankommt, zunächst ihre Definitionsmenge zu erkennen, beginnen wir mit diesem Thema und sehen uns danach an, wie Bruchgleichungen gelöst werden können.

1 Definitionsmenge einer Bruchgleichung

Als **Bruchgleichung** wird eine Gleichung bezeichnet, in der Bruchterme vorkommen. Der Begriff ist ein bisschen unscharf, wenn nicht genau dazu gesagt wird, welche Typen von Termen in den Zählern und Nennern der auftretenden Brüche stehen. Wir wollen uns hier auf den Fall beschränken, dass es sich um *Polynome* handelt.

Ein Beispiel für eine Bruchgleichung dieses Typs (in der Variable x) ist

$$\frac{2x+3}{x+1} = \frac{2x}{x-5}. \quad (1.1)$$

Sie stellt die Frage dar, ob es eine oder mehrere reelle Zahlen x gibt, für die die Aussage (1.1) wahr ist, und, falls ja, um welche Zahl(en) es sich dabei handelt.

Als *Grundmenge* aller in diesem Skriptum behandelten Gleichungen wählen wir die Menge der reellen Zahlen: $G = \mathbb{R}$. Das bedeutet, dass wir jede reelle Zahl, die die betreffende Gleichung erfüllt, als Lösung akzeptieren. Bei Bruchgleichungen tritt nun ein Phänomen auf, dem wir in den Skripten zu linearen und quadratischen Gleichungen noch nicht begegnet sind: Da der Nenner eines Bruchs nicht gleich 0 sein darf (andernfalls würde es sich ja um eine Division durch 0 handeln), müssen einige der zunächst möglichen Elemente der Grundmenge (d.h. einige Werte für x) von vornherein *ausgeschlossen werden*. Im Fall der Gleichung (1.1) handelt es sich um die Werte $x = -1$ (für diesen Wert wäre der Nenner der linken Seite gleich 0) und $x = 5$ (für diesen Wert wäre der Nenner der rechten Seite gleich 0). Diese beiden Werte

schließen wir aus, indem wir als **Definitionsmenge** der Gleichung (1.1) die Menge aller reellen Zahlen, für die *keiner* der auftretenden Nenner 0 ist, festlegen. Wir schreiben diese Menge so an:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}. \quad (1.2)$$

Das Symbol \setminus ist das mengentheoretische „ohne“¹. Stattdessen können wir auch genauso gut $D = G \setminus \{-1, 5\}$ schreiben, da die Grundmenge G ja gleich \mathbb{R} ist. Eine dritte Möglichkeit, D anzuschreiben, ist diese:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ und } x \neq 5\}. \quad (1.3)$$

Auf die Schreibweise kommt es nicht an – wichtig ist nur, dass wir in der Lage sind, von jeder Zahl zu entscheiden, ob sie Element von D ist oder nicht. Bei *jeder* Behandlung einer Bruchgleichung sollten Sie zuerst die Definitionsmenge angeben²! Das ist schlicht und einfach deshalb wichtig, weil sich die betreffende Gleichung erst dann, wenn die Definitionsmenge angegeben ist, in exakter Weise als mathematisches Problem darstellt:

- Für jedes Element $x \in D$ sind sowohl die linke als auch die rechte Seite der Gleichung definiert (und können miteinander verglichen werden).
- Die Lösungsmenge L besteht dann aus allen Elementen der Definitionsmenge D , die die betreffende Gleichung erfüllen (d.h. für die die linke Seite gleich der rechten ist).

2 Bruchgleichungen lösen

Um eine Bruchgleichung zu lösen, ist es in den meisten Fällen eine gute Strategie, zuerst alle Brüche loszuwerden. Betrachten wir als Beispiel die Gleichung (1.1). Wenn wir beide Seiten dieser Gleichung mit $(x+1)(x-5)$ multiplizieren, bekommen wir eine neue Gleichung, in der keine Brüche mehr aufscheinen:

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{x+1} &= \frac{2x}{x-5} & | \cdot (x+1)(x-5) \\ (2x+3)(x-5) &= 2x(x+1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

„Dürfen“ wir das überhaupt? Ja, wir dürfen es, da wir mit beiden Seiten der Gleichung das Gleiche gemacht haben – das ist immer „erlaubt“. In diesem Fall gilt aber noch mehr: Bei jeder Umformung einer Gleichung nehmen wir an, dass x eine Lösung ist (ansonsten wäre das Gleichheitszeichen ja nicht gerechtfertigt). Da wir als Definitionsmenge (1.2) bzw. (1.3) festgelegt haben, ist also bei jeder Umformung vorausgesetzt, dass $x \neq -1$ und $x \neq 5$ ist. In (2.1) haben wir beide Seiten mit einem Term multipliziert, von dem sichergestellt ist, dass er für alle in Betracht kommenden Werte für x von 0 verschieden ist. Daher handelt es sich um eine **Äquivalenzumformung**! Das bedeutet, dass die neue Gleichung – die zweite Zeile in (2.1) – die gleiche Lösungsmenge besitzt wie die ursprüngliche³. Die neue Gleichung kann

¹ Allgemein wird für zwei Mengen A und B definiert: $A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$, wobei das Symbol \notin bedeutet „ist nicht Element von“. Siehe dazu das Skriptum *Mengen und Mengenoperationen*.

² Das gilt nicht nur für Bruchgleichungen, sondern für alle Gleichungen, bei denen die linke und/oder die rechte Seite für gewisse Werte der Variable keinen Sinn machen.

³ Zur Erinnerung: Formen wir eine Gleichung auf eine Weise um, die *keine* Äquivalenzumformung ist, so bekommen wir am Ende einen oder mehrere *Lösungskandidaten* und müssen danach durch die *Probe* entscheiden, ob es sich tatsächlich um (eine oder mehrere) *Lösungen* handelt. Haben wir im Lösungsweg nur Äquivalenzumformungen angewandt, so ist das nicht notwendig (obwohl eine Probe nie schlecht ist, da wir uns ja auch verrechnet haben könnten).

nun mit den bisher bekannten Methoden leicht gelöst werden. Wir können beispielsweise so vorgehen wie im folgenden „Protokoll“ gezeigt:

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{2x+3}{x+1} = \frac{2x}{x-5} & | & \cdot (x+1)(x-5) \\
 (2x+3)(x-5) = 2x(x+1) & | & \text{ausmultiplizieren} \\
 2x^2 - 7x - 15 = 2x^2 + 2x & | & -2x^2 \\
 -7x - 15 = 2x & | & -2x \\
 -9x - 15 = 0 & | & +15 \\
 -9x = 15 & | & \cdot (-1) \\
 9x = -15 & | & : 9 \\
 x = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3} \in D & &
 \end{array} \quad (2.2)$$

In der letzten Zeile wurde vermerkt, dass der erhaltene x -Wert, nämlich $-\frac{5}{3}$, ein Element der Definitionsmenge ist (es gilt ja $-\frac{5}{3} \neq -1$ und $-\frac{5}{3} \neq 5$). Da nur Äquivalenzumformungen durchgeführt wurden, haben wir damit die (einzige) Lösung der Gleichung (1.1) gefunden. Ihre Lösungsmenge ist $L = \{-\frac{5}{3}\}$. Wenn Sie den Lösungsweg noch einmal genau durchgehen, können Sie erkennen, dass wir nach dem dritten Schritt eine lineare Gleichung erhalten haben. (So gesehen war unsere Bruchgleichung nichts anderes als eine als Bruchgleichung „verkleidete“ lineare Gleichung!)

Als Warnung zeigen wir, was passieren kann, wenn die Definitionsmenge nicht beachtet wird. Dazu betrachten wir die Gleichung

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}. \quad (2.3)$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit $x-1$, um die Nenner loszuwerden:

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1} & | & \cdot (x-1) \\
 x = 1 & &
 \end{array} \quad (2.4)$$

Also $x = 1$. Lösung gefunden? Machen wir die Probe⁴:

$$\text{LHS} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \text{undefiniert} \quad (2.5)$$

$$\text{RHS} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \text{undefiniert} \quad (2.6)$$

Also ist $x = 1$ doch keine Lösung! Gleichung (2.3) ist so einfach, dass das Problem sogleich erkannt werden kann: Für $x = 1$ sind beide Nenner gleich 0, aber wenn wir die Nenner einfach „wegmultiplizieren“, bleibt $x = 1$ als „Lösungskandidat“ übrig, der aber eben keine Lösung ist. Diese Panne hätten wir uns ersparen können, wenn wir die Definitionsmenge gleich zu Beginn als $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (oder $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$) festgelegt hätten. Unser „Protokoll“ hätte dann so ausgesehen:

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1} & | & \cdot (x-1) \\
 x = 1 \notin D & &
 \end{array} \quad (2.7)$$

⁴ LHS („left hand side“) steht für die linke Seite der Gleichung, RHS („right hand side“) steht für ihre rechte Seite.

Da hier vermerkt ist, dass 1 kein Element von D ist, folgt sogleich, dass 1 keine Lösung ist, d.h. dass (2.3) keine Lösung besitzt. Die Lösungsmenge ist leer: $L = \{\}$.

Beim Loswerden der Nenner einer Bruchgleichung kann ähnlich vorgegangen werden wie beim Addieren von Brüchen, die zuerst „auf gleichen Nenner“ gebracht werden. Betrachten wir als Beispiel die Gleichung

$$\frac{3x-2}{x+3} = \frac{3x^2}{x^2-9}. \quad (2.8)$$

Zuerst die Definitionsmenge: Der Nenner auf der linken Seite wird 0, wenn $x = -3$ ist. Der Nenner auf der rechten Seite wird 0, wenn $x^2 - 9 = 0$, d.h. wenn $x = -3$ oder $x = 3$ ist. (Erinnern Sie sich an die quadratischen Gleichungen!) Daher $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. Wir könnten nun beide Seiten der Gleichung mit dem Produkt der beiden Nenner, also mit $(x+3)(x^2-9)$ multiplizieren. Wenn uns aber auffällt, dass $x^2-9 = (x+3)(x-3)$ ist, d.h. dass die Gleichung (2.8) auch in der Form

$$\frac{3x-2}{x+3} = \frac{3x^2}{(x+3)(x-3)} \quad (2.9)$$

angeschrieben werden kann, sehen wir, dass es ausreicht, beide Seiten mit $(x+3)(x-3)$ (oder, was damit gleichbedeutend ist, mit x^2-9) zu multiplizieren, um die Nenner loszuwerden. Der gesamte Lösungsweg könnte dann so aussehen:

$$\begin{array}{rcl|l} \frac{3x-2}{x+3} = \frac{3x^2}{x^2-9} & | & \text{Nenner der rechten Seite faktorisieren} \\ \frac{3x-2}{x+3} = \frac{3x^2}{(x+3)(x-3)} & | & \cdot (x+3)(x-3) \\ (3x-2)(x-3) = 3x^2 & | & \text{linke Seite ausmultiplizieren} \\ 3x^2 - 11x + 6 = 3x^2 & | & -3x^2 \\ -11x + 6 = 0 & | & -6 \\ -11x = -6 & | & \cdot (-1) \\ 11x = 6 & | & : 11 \\ x = \frac{6}{11} \in D & & \end{array} \quad (2.10)$$

Damit ist die (einzige) Lösung gefunden. Die Lösungsmenge ist $L = \{\frac{6}{11}\}$.

Die bisherigen Beispiele waren der Einfachheit halber so gewählt, dass sich während des Lösungsvorgangs eine lineare Gleichung ergeben hat. Das ist nicht notwendigerweise der Fall. Treten auf beiden Seiten einer Gleichung Brüche von Polynomen auf, so lässt sie sich durch das „Wegmultiplizieren“ der Nenner immer auf eine Gleichung der Form

$$\text{Polynom in } x = 0 \quad (2.11)$$

reduzieren. Insbesondere können auch quadratische Gleichungen auftreten. Hier ein Beispiel:

$$\frac{3x-2}{x-2} = \frac{x^2}{x^2-4}. \quad (2.12)$$

Die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Gehen Sie nun das folgende „Protokoll“ genau

durch:

$$\begin{array}{lcl}
 \frac{3x-2}{x-2} = \frac{x^2}{x^2-4} & | & \text{Nenner der rechten Seite faktorisieren} \\
 \frac{3x-2}{x-2} = \frac{x^2}{(x+2)(x-2)} & | & \cdot (x+2)(x-2) \\
 (3x-2)(x+2) = x^2 & | & \text{linke Seite ausmultiplizieren} \\
 3x^2 + 4x - 4 = x^2 & | & -x^2 \\
 2x^2 + 4x - 4 = 0 & | & : 2 \\
 x^2 + 2x - 2 = 0 & | & \text{kleine Lösungsformel für quadratische} \\
 & | & \text{Gleichung anwenden} \\
 x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+2} = & & \\
 = -1 \pm \sqrt{3} \in D & &
 \end{array} \quad (2.13)$$

Da sowohl $-1 - \sqrt{3}$ als auch $-1 + \sqrt{3}$ in der Definitionsmenge liegen (wie in der letzten Zeile des „Protokolls“ vermerkt), sind die beiden Lösungen gefunden. Die Lösungsmenge ist $L = \{-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}\}$.

3 Lösungsvarianten

Die Strategie des „Nenner-Wegmultiplizierens“ ist nicht ganz eindeutig, und mit ein bisschen Fingerspitzengefühl kann man sich manchmal die Arbeit verkürzen. Betrachten wir als Beispiel die Gleichung

$$\frac{x^2+2}{x-4} + 3 = 7. \quad (3.1)$$

Hier könnten wir (nachdem die Definitionsmenge als $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ erkannt worden ist) gleich beide Seiten mit $x-4$ multiplizieren:

$$\begin{array}{lcl}
 \frac{x^2+2}{x-4} + 3 = 7 & | & \cdot (x-4) \\
 x^2 + 2 + 3(x-4) = 7(x-4) & | & \text{alles ausmultiplizieren} \\
 \dots = \dots & &
 \end{array} \quad (3.2)$$

Klüger (d.h. arbeitssparender) ist es in diesem Fall, so vorzugehen:

$$\begin{array}{lcl}
 \frac{x^2+2}{x-4} + 3 = 7 & | & -3 \\
 \frac{x^2+2}{x-4} = 4 & | & \cdot (x-4) \\
 x^2 + 2 = 4(x-4) & | & \text{rechte Seite ausmultiplizieren} \\
 \dots = \dots & &
 \end{array} \quad (3.3)$$

Erkennen Sie den Unterschied? Beim Lösungsweg (3.3) muss, obwohl er um eine Zeile länger ist, im Unterschied zur ersten Variante (3.2) eine Klammer weniger ausmultipliziert werden!

Haben wir es mit einer Gleichung wie

$$-\frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-3} = \frac{21}{x^2-9} \quad (3.4)$$

zu tun (die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$), so bemerken wir zunächst, dass es genügt, beide Seiten mit x^2-9 , was ja das Gleiche ist wie $(x+3)(x-3)$, zu multiplizieren. Wir

könnten das gleich zu Beginn tun oder zuerst die linke Seite auf gleichen Nenner bringen und berechnen. Sehen wir uns die beiden Varianten an: Die erste führt auf

$$\begin{array}{rcl}
 -\frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-3} = \frac{21}{x^2-9} & | & \cdot (x^2-9) \\
 -(x-3) + 2(x+3) = 21 & | & \text{linke Seite ausmultiplizieren} \\
 x+9 = 21 & | & -9 \\
 x = 12 \in D & &
 \end{array} \quad (3.5)$$

Die zweite Variante führt auf

$$\begin{array}{rcl}
 -\frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-3} = \frac{21}{x^2-9} & | & \text{linke Seite auf gleichen Nenner bringen} \\
 -\frac{x-3}{(x+3)(x-3)} + \frac{2(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{21}{x^2-9} & | & \text{links die Addition ausführen} \\
 \frac{-(x-3)+2(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{21}{x^2-9} & | & \text{Zähler links ausmultiplizieren} \\
 \frac{x+9}{(x+3)(x-3)} = \frac{21}{x^2-9} & | & \cdot (x^2-9) \\
 x+9 = 21 & | & -9 \\
 x = 12 \in D & &
 \end{array} \quad (3.6)$$

Unter dem Strich ist die erste Variante (3.5) also etwas kürzer.

In manchen (besonders einfachen) Fällen erübrigt es sich überhaupt, die Nenner loszuwerden, da die Lösungsmenge sofort erkannt werden kann. Ein Beispiel ist die Gleichung

$$\frac{3x}{x+7} = \frac{3x}{x+7} + 4. \quad (3.7)$$

Sehen Sie ohne jegliche Rechnung, dass die Lösungsmenge leer ist?

Wäre x eine Lösung, so würde die Gleichung aussagen,
dass eine Zahl „gleich sie selbst + 4 ist“.
Das kann natürlich keine wahre Aussage sein!

Aus all diesen Beispielen lernen wir, dass es von den konkreten, in einer Bruchgleichung vorkommenden Termen abhängt, wie am besten vorgegangen wird. Daher unser Tipp: Sehen Sie sich zunächst die Terme und ihre Struktur an, spielen Sie die Grundzüge der möglichen Lösungsstrategien im Kopf durch, schätzen Sie ab, welche die einfachste sein wird, und diese führen Sie dann durch!

4 Ein schwierigeres Beispiel

Anhand eines schwierigeren Beispiels, das sich aber als machbar herausstellen wird, zeigen wir noch, dass es Fälle von Bruchgleichungen gibt, bei denen eine kombinierte Vorgehensweise, die sich auch anderer Strategien bedient, schneller zum Ziel führt. Die Gleichung, um die es gehen soll, lautet:

$$\left(\frac{x^2-15}{x^2+7} + 1 \right)^2 + \frac{x^2-15}{x^2+7} + 1 = 0. \quad (4.1)$$

Die Definitionsmenge D ist gleich der Grundmenge \mathbb{R} , da der einzige auftretende Nenner, $x^2 + 7$, nie 0 werden kann, welchen Wert auch immer x annimmt. Sehen Sie sich nun den Term auf der linken Seite genau an! Er ist von der Struktur

$$u^2 + u = 0, \quad (4.2)$$

wenn wir die abgekürzte Schreibweise

$$u = \frac{x^2 - 15}{x^2 + 7} + 1 \quad (4.3)$$

verwenden. Also lösen wir zuerst einmal (4.2)! Denken wir uns die linke Seite von (4.2) in der Form $u(u + 1)$ geschrieben, so ergibt sich, dass es genau zwei Lösungen $u = 0$ und $u = -1$ gibt. Ist x also eine Lösung der ursprünglichen Gleichung (4.1), so gilt (4.3) mit $u = 0$ oder $u = -1$. Daher gilt für x

$$\text{entweder} \quad \frac{x^2 - 15}{x^2 + 7} + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x^2 - 15}{x^2 + 7} + 1 = -1. \quad (4.4)$$

Wir erhalten damit *zwei* Gleichungen, und *jede* Lösung (zumindest) *einer* dieser beiden Gleichungen ist eine Lösung von (4.1). Die Definitionsmengen der beiden Gleichungen sind nach wie vor ganz \mathbb{R} . Wir lösen zuerst die erste:

$$\begin{array}{l|l} \frac{x^2-15}{x^2+7} + 1 = 0 & -1 \\ \frac{x^2-15}{x^2+7} = -1 & \cdot (x^2 + 7) \\ x^2 - 15 = -(x^2 + 7) & \text{rechte Seite ausmultiplizieren} \\ x^2 - 15 = -x^2 - 7 & +x^2 + 7 \\ 2x^2 - 8 = 0 & : 2 \\ x^2 - 4 = 0 & \text{quadratische Gleichung, deren Lösungen} \\ & \text{wir sofort hinschreiben können} \\ x_{1,2} = \pm 2 & \end{array} \quad (4.5)$$

Und jetzt die zweite:

$$\begin{array}{l|l} \frac{x^2-15}{x^2+7} + 1 = -1 & -1 \\ \frac{x^2-15}{x^2+7} = -2 & \cdot (x^2 + 7) \\ x^2 - 15 = -2(x^2 + 7) & \text{rechte Seite ausmultiplizieren} \\ x^2 - 15 = -2x^2 - 14 & +2x^2 + 14 \\ 3x^2 - 1 = 0 & : 3 \\ x^2 - \frac{1}{3} = 0 & \text{quadratische Gleichung, deren Lösungen} \\ & \text{wir sofort hinschreiben können} \\ x_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} & \end{array} \quad (4.6)$$

Die Lösungen haben wir jetzt (fortlaufend, da die Symbole x_1 und x_2 bereits mit den zuvor gefundenen Lösungen ± 2 belegt sind) mit x_3 und x_4 nummeriert, und im letzten Schritt wurde der Nenner rational gemacht⁵. Die ursprüngliche Gleichung (4.1) besitzt daher vier Lösungen. Die Lösungsmenge ist $L = \{-2, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 2\}$.

⁵ Mit $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$ können wir ja umformen: $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Es lohnt sich also – gerade bei kompliziert aussehenden Gleichungen –, zuerst die Struktur der auftretenden Terme genau anzuschauen! Hätten wir zuerst das Quadrat auf der linken Seite von (4.1) ausmultipliziert und alles auf gleichen Nenner gebracht, so hätten wir wesentlich mehr rechnen müssen, um dann vor der Gleichung vierten Grades

$$3x^4 - 13x^2 + 4 = 0 \quad (4.7)$$

zu stehen. Mit $v = x^2$ hätte sich diese auf die quadratische Gleichung

$$3v^2 - 13v + 4 = 0 \quad (4.8)$$

mit den Lösungen $v = \frac{1}{3}$ und $v = 4$ reduzieren lassen. Auf diese Weise hätten wir die vier Lösungen $\pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ und $\pm\sqrt{4} = \pm 2$ ebenfalls gefunden, aber eben mit erhöhtem Arbeitsaufwand. (Vollziehen Sie diese längere Lösungsmethode zur Übung selbst im Detail nach!)

5 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Lösen Sie die folgende Gleichung:

$$\frac{6x - 5}{x + 1} = \frac{3(2x + 1)}{x - 1}$$

Lösung:

Die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
Die Lösungsmenge ist $L = \{\frac{1}{10}\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung:

$$\frac{x - 1}{2x + 1} = \frac{2x + 1}{x - 3}$$

Lösung:

Die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 3\}$.
Die Lösungsmenge ist $L = \{\frac{3}{-4-\sqrt{22}}, \frac{3}{-4+\sqrt{22}}\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung:

$$\frac{1}{x-2} = \frac{2}{x^2-2x}$$

Lösung:

Die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.
Die Lösungsmenge ist leer: $L = \{\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung:

$$\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} = \frac{5x+1}{x^2-1}$$

Lösung:

Die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
Die Lösungsmenge ist $L = \{3\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung:

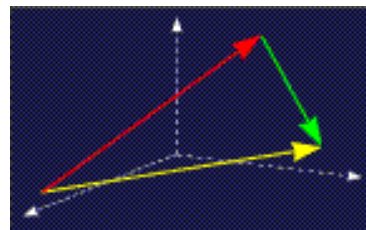
$$\frac{4}{x} + \frac{2}{x-1} = \frac{5x+1}{x^2-1}$$

Lösung:

Die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
Die Lösungsmenge ist $L = \left\{ \frac{2}{-1-\sqrt{17}}, \frac{2}{-1+\sqrt{17}} \right\}$.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Juni 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“

(<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2021 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Betragsgleichungen und die Methode der Fallunterscheidungen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

In diesem Skriptum werden Betragsgleichungen behandelt. Besonders wichtig für diesen Typ Gleichungen ist die Methode der Fallunterscheidung, die ausführlich besprochen wird.

1 Was ist eine Betragsgleichung?

Als **Betragsgleichung** wird eine Gleichung bezeichnet, in der der (Absolut-)Betrag¹ eines oder mehrerer Terme vorkommt. Der Begriff ist ein bisschen unscharf, wenn nicht genau dazu gesagt wird, um welche Arten von Termen es sich dabei handelt. Wir wollen uns hier darauf beschränken, dass (außer den Betragsstrichen) nur *Polynome* (niedrigen Grades) und (in einem Fall) Brüche auftreten.

Ein Beispiel für eine Betragsgleichung dieses Typs (in der Variablen x) ist

$$|x - 5| = 2. \quad (1.1)$$

Sie stellt die Frage dar, ob es eine oder mehrere reelle Zahlen x gibt, für die die Aussage (1.1) wahr ist, und, falls ja, um welche Zahl(en) es sich dabei handelt.

Um eine solche Gleichung lösen zu können, müssen wir uns erinnern, was der Absolutbetrag einer reellen Zahl ist. Den Betrag einer Zahl können wir uns als ihren *Abstand vom Nullpunkt* auf der Zahlengerade vorstellen². Der Betrag von 8 ist gleich 8 (also $|8| = 8$), und der Betrag von -8 ist ebenfalls 8 (also $|-8| = 8$). Der Betrag von 0 ist 0 (also $|0| = 0$). Den Betrag einer negativen Zahl erhalten wir, indem wir „das Minuszeichen weglassen“. So weit, so klar.

¹ Eigentlich sollte man „Absolutbetrag“ sagen, aber wenn klar ist, was gemeint ist, verkürzen wir dieses Wort – wie vielfach üblich – zu „Betrag“.

² Siehe dazu das Skriptum *Absolutbetrag*.

Wie hilft uns das, eine Gleichung wie (1.1) zu lösen? Das Problem ist, dass wir zunächst nicht wissen, ob $x - 5$ eine positive oder eine negative Zahl oder 0 ist. Aber eines wissen wir sicher: Ist x eine Lösung von (1.1), so ist der Betrag von $x - 5$ gleich 2, denn genau das ist ja die Aussage von (1.1). Daher bleibt $x - 5$ nichts anderes übrig, als entweder -2 oder 2 zu sein! Gehen wir diese beiden Möglichkeiten durch:

- Ist $x - 5 = 2$, so folgt $x = 7$. Ist 7 eine Lösung? Machen wir die Probe: Mit $x = 7$ wird die linke Seite von (1.1) zu $|7 - 5| = |2| = 2$, was gleich der rechten Seite ist. Daher: Ja, 7 ist eine Lösung!
- Ist $x - 5 = -2$, so folgt $x = 3$. Ist 3 eine Lösung? Machen wir die Probe: Mit $x = 3$ wird die linke Seite von (1.1) zu $|3 - 5| = |-2| = 2$, was gleich der rechten Seite ist. Daher: Ja, auch 3 ist eine Lösung!

Gleichung (1.1) besitzt also zwei Lösungen. Ihre Lösungsmenge ist $L = \{3, 7\}$. Damit haben wir unsere erste Betragsgleichung gelöst!

2 Die Methode der Fallunterscheidungen

Was wurde bei der gerade durchgeführten Lösungsmethode eigentlich gemacht? Wir haben zwei Möglichkeiten (in der Mathematik nennen wir sie „Fälle“) betrachtet, und jede der beiden Möglichkeiten hat uns zu einer Lösung geführt. Diese Methode kann systematisiert werden, so dass sie auch auf kompliziertere Betragsgleichungen anwendbar ist. Betrachten wir als Beispiel die Gleichung

$$|x - 5| = 2x - 11. \quad (2.1)$$

Jetzt funktioniert die oben angewandte Methode nicht mehr in der gleichen Weise, denn nun kennen wir $|x - 5|$ *nicht* (da die Variable ja auch auf der rechten Seite aufscheint). Es gibt aber etwas anderes, das wir ganz sicher wissen: Ist x eine Lösung von (2.1), so ist $x - 5$ entweder eine positive Zahl oder 0 oder eine negative Zahl! Eine vierte Möglichkeit gibt es nicht. Ist $x - 5$ positiv oder gleich 0, so ist $|x - 5|$ gleich $x - 5$, denn dann muss kein „Minuszeichen weggelassen“ werden. Ist $x - 5$ hingegen negativ, so muss „das Minuszeichen weggelassen“ werden, was bedeutet, dass $|x - 5|$ dann gleich $-(x - 5)$ ist! Erinnern Sie sich an die „mathematisch schöne“ Definition des Betrags³: Für jede reelle Zahl u gilt

$$|u| = \begin{cases} u & \text{wenn } u \geq 0 \\ -u & \text{wenn } u < 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Da das für *jede* reelle Zahl u gilt, gilt es auch für $x - 5$, wobei nun x eine beliebige reelle Zahl ist. Mit anderen Worten: Wir benutzen (2.2), indem wir $u = x - 5$ einsetzen. Es gilt also, die beiden Möglichkeiten („Fälle“) $x - 5 \geq 0$ und $x - 5 < 0$ in Betracht zu ziehen. Die Methode, diese beiden Möglichkeiten hintereinander zu betrachten, nennen wir eine **Fallunterscheidung**. Gehen wir die beiden Fälle im Detail durch:

³ Siehe dazu das Skriptum über den Absolutbetrag. Dort haben wir den Betrag einer reellen Zahl in der Form (2.2) eingeführt, wobei wir den Buchstaben x verwendet haben, wo jetzt u steht. Das hat den Grund, dass wir (2.2) im Folgenden für beliebige Terme (in denen wiederum die Variable x steht) anwenden.

1. Fall $x - 5 \geq 0$

Wir nehmen also zunächst an, x sei eine Zahl, für die $x - 5 \geq 0$ ist, und fragen, ob wir *unter dieser Voraussetzung* (d.h. unter allen Zahlen, die die Bedingung $x - 5 \geq 0$ erfüllen) eine Lösung von (2.1) finden. Ist $x - 5 \geq 0$, so sagt uns (2.2) mit $u = x - 5$, dass $|x - 5| = x - 5$ ist. Die Gleichung (2.1) nimmt in diesem Fall die Form

$$x - 5 = 2x - 11 \quad (2.3)$$

an. Wir lösen sie:

$$\begin{array}{rcl|l} x - 5 = 2x - 11 & | & -x + 11 & \\ 6 = x & | & \text{linke und rechte Seite vertauschen} & \\ x = 6 & & & \end{array} \quad (2.4)$$

Sie besitzt nur eine Lösung, und zwar $x = 6$. Das bedeutet *nicht automatisch*, dass damit eine Lösung von (2.1) gefunden ist, denn es muss ja noch unsere *Voraussetzung* $x - 5 \geq 0$ erfüllt sein! Aber die ist erfüllt, da $6 - 5 \geq 0$ ist. Dieser Fall hat also eine Lösung von (2.1) erbracht, nämlich 6. Wir notieren die Lösungsmenge, die sich hier ergeben hat, in der Form $L_1 = \{6\}$.

2. Fall $x - 5 < 0$

Nun nehmen wir an, x sei eine Zahl, für die $x - 5 < 0$ ist, und fragen, ob wir *unter dieser Voraussetzung* (d.h. unter allen Zahlen, die die Bedingung $x - 5 < 0$ erfüllen) eine Lösung von (2.1) finden. Ist $x - 5 < 0$, so sagt uns (2.2) mit $u = x - 5$, dass $|x - 5| = -(x - 5)$ ist. Die Gleichung (2.1) nimmt in diesem Fall die Form

$$-(x - 5) = 2x - 11 \quad (2.5)$$

an. Wir lösen sie:

$$\begin{array}{rcl|l} -(x - 5) = 2x - 11 & | & \text{linke Seite ausmultiplizieren} & \\ -x + 5 = 2x - 11 & | & +x + 11 & \\ 16 = 3x & | & : 3 & \\ \frac{16}{3} = x & | & \text{linke und rechte Seite vertauschen} & \\ x = \frac{16}{3} & & & \end{array} \quad (2.6)$$

Sie besitzt nur eine Lösung, und zwar $x = \frac{16}{3}$. Auch jetzt bedeutet das *nicht automatisch*, dass damit eine Lösung von (2.1) gefunden ist, denn es muss ja noch unsere *Voraussetzung* $x - 5 < 0$ erfüllt sein! Und die ist nun *nicht* erfüllt, denn $\frac{16}{3} - 5 = \frac{1}{3}$ ist nicht negativ! Daher liefert dieser Fall *keine* Lösung von (2.1). Wir notieren die Lösungsmenge, die sich hier ergeben hat, in der Form $L_2 = \{\}$.

Jetzt setzen wir unsere Ergebnisse zusammen: Unter allen Zahlen x , die $x - 5 \geq 0$ erfüllen, gibt es (genau) eine Lösung von (2.1). Unter allen Zahlen x , die $x - 5 < 0$ erfüllen, gibt es keine Lösung von (2.1). Die Menge *aller* Lösungen von (2.1) ist

daher die **Vereinigungsmenge**⁴ der Lösungsmengen, die in den beiden Fällen aufgetreten sind: $L = L_1 \cup L_2 = \{6\}$. Damit ist (2.1) gelöst.

Das soeben durchgeführte Lösungsverfahren, die Fallunterscheidung, ist in der Mathematik *sehr wichtig*, und daher sollten Sie die ihm zugrunde liegende Logik gut verstehen! Ähnliche Verfahren werden auch in anderen mathematischen Problemen genutzt, beispielsweise beim Lösen von Ungleichungen. Fallunterscheidungen helfen immer dann, wenn es für einen bestimmten Sachverhalt mehrere Möglichkeiten („Fälle“) gibt und wenn die Untersuchung jeder dieser Möglichkeiten *leichter* fällt als eine Untersuchung des Sachverhalts allgemein. Im obigen Beispiel hat die durchgeführte Fallunterscheidung den Vorteil, dass in beiden Fällen (also sowohl im Fall $x - 5 \geq 0$ als auch im Fall $x - 5 < 0$) die *Betragsstriche verschwinden*! Im ersten Fall konnten wir $|x - 5|$ durch $x - 5$ ersetzen, im zweiten durch $-(x - 5)$. Die jeweils danach aufgetretenen Gleichungen konnten wir leicht lösen, mussten aber in jedem Fall noch überprüfen, ob die *Voraussetzung*, die dem jeweiligen Fall zugrunde lag (also $x - 5 \geq 0$ bzw. $x - 5 < 0$), für diese Lösungen auch tatsächlich erfüllt ist.

Zuletzt wurden alle gefundenen Lösungen (im betrachteten Beispiel war es nur eine) zur gesamten Lösungsmenge zusammengefasst. Da es außer den Fällen $x - 5 \geq 0$ und $x - 5 < 0$ keine andere Möglichkeit gibt, ist sichergestellt, dass damit auch wirklich *alle* Lösungen der Gleichung (2.1) gefunden wurden.

Anmerkung: Die Aussage $x - 5 \geq 0$ ist gleichbedeutend mit $x \geq 5$, und die Aussage $x - 5 < 0$ ist gleichbedeutend mit $x < 5$. Wenn Sie wollen, können Sie an jeder Stelle des oben vorgeführten Lösungswegs auch diese einfacheren Formulierungen verwenden. Wir haben das nicht gemacht, da die Umformung von $x - 5 \geq 0$ zu $x \geq 5$ und von $x - 5 < 0$ zu $x < 5$ eigentlich in das Kapitel „Ungleichungen“ fällt, von dem wir hier keine Kenntnisse voraussetzen wollen.

Wenn Sie sich jetzt nicht ganz sicher sind, ob Sie die Logik des Verfahrens gut verstanden haben, lesen Sie diesen Abschnitt noch einmal durch!

3 Fallunterscheidungen – allgemein skizziert

Weil Fallunterscheidungen so wichtig sind, skizzieren wir hier noch einmal ihre allgemeine Struktur, wie sie beim Lösen einer Gleichung⁵ auftritt: Wir stoßen auf einen Sachverhalt (wie den Betrag eines Terms in einer Gleichung) und bemerken, dass sich dieser Sachverhalt unter bestimmten Voraussetzungen einfacher darstellt als in seiner allgemeinen Form. Können wir mehrere derartige Voraussetzungen treffen, die *insgesamt alle Möglichkeiten ausschöpfen* (z.B. dass eine Zahl ≥ 0 oder < 0 ist oder dass eine Zahl > 0 , $= 0$ oder < 0 ist), so können wir eine Fallunterscheidung durchführen. Üblicherweise schließen die einzelnen Fälle einander aus (so kann etwa eine Zahl nicht gleichzeitig ≥ 0 und < 0 sein), aber das ist streng genommen nicht notwendig. Der Übersicht halber nummerieren wir diese Fälle durch. Jeder einzelne Fall

⁴ Die Vereinigungsmenge zweier Mengen A und B ist definiert als $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$. Sie umfasst alle Elemente, die entweder in A oder in B (oder in beiden) liegen.

⁵ Das folgende Schema kann genauso gut beim Lösen von Ungleichungen verwendet werden.

ist durch eine *Bedingung* charakterisiert, die jeweils als *Voraussetzung* für die nachfolgende Berechnung angenommen wird. Für jeden Fall wird das vereinfachte Problem gelöst, wobei von jeder so erhaltenen Lösung aber noch geprüft werden muss, ob sie die getroffene Voraussetzung auch wirklich erfüllt. Ist das der Fall, so ist sie auch eine Lösung des ursprünglichen Problems. Die auf diese Art in den einzelnen Fällen gefundenen Lösungsmengen nummerieren wir durch (also L_1 für den ersten Fall, L_2 für den zweiten usw.). Sind alle Fälle abgearbeitet, so fassen wir alle gefundenen Teil-Lösungsmengen zusammen, indem wir ihre Vereinigungsmenge bilden.

Haben wir es etwa mit einer Unterscheidung von drei Fällen zu tun, so sieht das allgemeine Schema so aus:

1. Fall B_1

B_1 ist die Bedingung, die den ersten Fall charakterisiert. Sie wird nun als *Voraussetzung* angenommen.

- Unter der Voraussetzung B_1 wird das Problem (die Gleichung) vereinfacht.
- Das vereinfachte Problem (die vereinfachte Gleichung) wird gelöst.
- Falls Lösungen des vereinfachten Problems gefunden werden, muss überprüft werden, ob sie die Voraussetzung B_1 erfüllen. Nur die Lösungen, die B_1 erfüllen, sind Lösungen des ursprünglich gestellten Problems.

Wir fassen alle auf diese Weise gefundenen Lösungen des ursprünglichen Problems zur ersten Teil-Lösungsmenge L_1 zusammen.

2. Fall B_2

B_2 ist die Bedingung, die den zweiten Fall charakterisiert. Sie wird nun als *Voraussetzung* angenommen.

- Unter der Voraussetzung B_2 wird das Problem (die Gleichung) vereinfacht.
- Das vereinfachte Problem (die vereinfachte Gleichung) wird gelöst.
- Falls Lösungen des vereinfachten Problems gefunden werden, muss überprüft werden, ob sie die Voraussetzung B_2 erfüllen. Nur die Lösungen, die B_2 erfüllen, sind Lösungen des ursprünglich gestellten Problems.

Wir fassen alle auf diese Weise gefundenen Lösungen des ursprünglichen Problems zur zweiten Teil-Lösungsmenge L_2 zusammen.

3. Fall B_3

B_3 ist die Bedingung, die den dritten Fall charakterisiert. Sie wird nun als *Voraussetzung* angenommen.

- Unter der Voraussetzung B_3 wird das Problem (die Gleichung) vereinfacht.
- Das vereinfachte Problem (die vereinfachte Gleichung) wird gelöst.
- Falls Lösungen des vereinfachten Problems gefunden werden, muss überprüft werden, ob sie die Voraussetzung B_3 erfüllen. Nur die Lösungen, die B_3 erfüllen, sind Lösungen des ursprünglich gestellten Problems.

Wir fassen alle auf diese Weise gefundenen Lösungen des ursprünglichen Problems zur dritten Teil-Lösungsmenge L_3 zusammen.

Zuletzt fassen wir alle gefundenen Lösungen zur Gesamt-Lösungsmenge zusammen: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$.

Welche Fälle betrachtet werden, ergibt sich aus der konkreten Form des gestellten Problems, also etwa aus den in einer Betragsgleichung vorkommenden Termen. Haben wir es beispielsweise mit der Gleichung

$$|2x - 5| + x = x^2 - 7 \quad (3.1)$$

zu tun, so „stören“ uns vor allem die Betragsstriche. Um sie loszuwerden, können wir die Fälle

1. Fall $2x - 5 \geq 0$
2. Fall $2x - 5 < 0$

betrachten. Für jeden dieser zwei Fälle reduziert sich (3.1) auf eine (ganz gewöhnliche) quadratische Gleichung.

Geht es um die Gleichung

$$3|2x - 5| + x = |3x^2 - 7|, \quad (3.2)$$

so kann $2x - 5$ entweder ≥ 0 oder < 0 sein, und es kann $3x^2 - 7$ entweder ≥ 0 oder < 0 sein. Wenn wir also die vier Fälle

1. Fall $2x - 5 \geq 0$ und $3x^2 - 7 \geq 0$
2. Fall $2x - 5 \geq 0$ und $3x^2 - 7 < 0$
3. Fall $2x - 5 < 0$ und $3x^2 - 7 \geq 0$
4. Fall $2x - 5 < 0$ und $3x^2 - 7 < 0$

betrachten (eine fünfte Möglichkeit gibt es nicht!), so verschwinden in jedem einzelnen Fall die Betragsstriche! Für jeden dieser vier Fälle reduziert sich (3.2) auf eine (ganz gewöhnliche) quadratische Gleichung. (Der zweite Fall kann übrigens nie eintreten! Überlegen Sie, warum!)

Anmerkung: Wenn Sie ein bisschen über Ungleichungen wissen, können Sie die Bedingung $2x - 5 \geq 0$ in $x \geq \frac{5}{2}$ und die Bedingung $2x - 5 < 0$ in $x < \frac{5}{2}$ übersetzen. Auch die Bedingungen $3x^2 - 7 \geq 0$ und $3x^2 - 7 < 0$ können in ähnlicher Form dargestellt werden, aber all das haben wir oben nicht gemacht, da wir hier keine Kenntnisse über Ungleichungen voraussetzen wollen.

Am Ende dieses allgemeinen Abschnitts wollen wir noch erwähnen, dass bei der Auswahl der konkreten Fälle, die bei einer Fallunterscheidung betrachtet werden, eine gewisse Freiheit besteht. Anstelle der zwei für Gleichung (3.1) angegebenen Fälle könnte man genausogut die drei Fälle

1. Fall $2x - 5 > 0$
2. Fall $2x - 5 = 0$
3. Fall $2x - 5 < 0$

nacheinander betrachten. Das hätte hier keinen Vorteil (da die ersten beiden Fälle bequem zu einem Fall, nämlich $2x - 5 \geq 0$, zusammengefasst werden können), ist aber natürlich auch möglich.

4 Noch ein (einfaches) Beispiel

Wir führen die Methode der Fallunterscheidung noch anhand des einfachen Beispiels

$$3x + 5 = -2|x - 1| \quad (4.1)$$

vor. Diesmal schreiben wir den Lösungsweg in knapperer Form an als zuvor, ähnlich wie Sie es auf dem Papier auch tun sollten. Wir entscheiden uns für die Unterscheidung der Fälle $x - 1 \geq 0$ und $x - 1 < 0$.

1. Fall $x - 1 \geq 0$

In diesem Fall gilt $|x - 1| = x - 1$.

$$\begin{array}{rcl} 3x + 5 & = & -2(x - 1) \quad | \text{ rechte Seite ausmultiplizieren} \\ 3x + 5 & = & -2x + 2 \quad | \quad +2x - 5 \\ 5x & = & -3 \quad | \quad : 5 \\ x & = & -\frac{3}{5} \end{array} \quad (4.2)$$

Überprüfen, ob die Bedingung $x - 1 \geq 0$ erfüllt ist:

- Mit $x = -\frac{3}{5}$ ist $x - 1 = -\frac{3}{5} - 1 = -\frac{8}{5}$, und das ist nicht ≥ 0 .
 $\Rightarrow -\frac{3}{5}$ ist keine Lösung von (4.1)!

Teil-Lösungsmenge für diesen Fall: $L_1 = \{\}$.

2. Fall $x - 1 < 0$

In diesem Fall gilt $|x - 1| = -(x - 1)$.

$$\begin{array}{rcl} 3x + 5 & = & 2(x - 1) \quad | \text{ rechte Seite ausmultiplizieren} \\ 3x + 5 & = & 2x - 2 \quad | \quad -2x - 5 \\ x & = & -7 \end{array} \quad (4.3)$$

Überprüfen, ob die Bedingung $x - 1 < 0$ erfüllt ist:

- Mit $x = -7$ ist $x - 1 = -7 - 1 = -8 < 0$.
 $\Rightarrow -7$ ist Lösung von (4.1)!

Teil-Lösungsmenge für diesen Fall: $L_2 = \{-7\}$.

Gesamt-Lösungsmenge: $L = L_1 \cup L_2 = \{-7\}$.

5 Fallunterscheidung mit vier Fällen

Ein Beispiel einer Betragsgleichung, zu deren Lösung wir vier Fälle unterscheiden, ist

$$|x - 1| - 2|x| = -3. \quad (5.1)$$

Der Lösungsweg, wieder in knapper Form notiert (wobei wir keine ausführlichen „Protokolle“ zur Lösung der auftretenden linearen Gleichungen anschreiben), sieht so aus:

1. **Fall $x - 1 \geq 0$ und $x \geq 0$**

In diesem Fall lautet die Gleichung $x - 1 - 2x = -3$. Ihre (einzige) Lösung ist $x = 2$. Sie erfüllt die Bedingungen $x - 1 \geq 0$ und $x > 0$ und ist daher eine Lösung von (5.1): $L_1 = \{2\}$.

2. **Fall $x - 1 \geq 0$ und $x < 0$**

Dieser Fall tritt nie ein, da keine reelle Zahl x die zwei Bedingungen $x - 1 \geq 0$ (also $x \geq 1$) und $x < 0$ gleichzeitig erfüllt! Aber es ist kein Malheur, wenn man das nicht gleich bemerkt: In diesem Fall lautet die Gleichung $x - 1 + 2x = -3$. Ihre (einzige) Lösung ist $x = -\frac{2}{3}$. Sie erfüllt die Bedingung $x - 1 \geq 0$ nicht und ist daher keine Lösung von (5.1): $L_2 = \{\}$.

3. **Fall $x - 1 < 0$ und $x \geq 0$**

In diesem Fall lautet die Gleichung $-x + 1 - 2x = -3$. Ihre (einzige) Lösung ist $x = \frac{4}{3}$. Sie erfüllt die Bedingung $x - 1 < 0$ nicht und ist daher keine Lösung von (5.1): $L_3 = \{\}$.

4. **Fall $x - 1 < 0$ und $x < 0$**

In diesem Fall lautet die Gleichung $-x + 1 + 2x = -3$. Ihre (einzige) Lösung ist $x = -4$. Sie erfüllt die Bedingungen $x - 1 < 0$ und $x < 0$ und ist daher eine Lösung von (5.1): $L_4 = \{-4\}$.

Daher ist die Gesamt-Lösungsmenge $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 = \{-4, 2\}$.

6 Ein komplexeres Beispiel

Wir wollen nun als letztes Beispiel für die Methode der Fallunterscheidungen die etwas kompliziertere Gleichung

$$\frac{x+1}{|2x-3|} = x+2 \quad (6.1)$$

lösen. In ihr tritt ein Bruch auf, sodass wir zunächst sicherstellen müssen, dass der Nenner auf der linken Seite, $|2x-3|$, immer $\neq 0$ ist. Er ist gleich 0, wenn $2x-3=0$, d.h. wenn $x = \frac{3}{2}$ ist. Daher legen wir als Definitionsmenge⁶ $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$ fest. Für jede reelle Zahl x , die ungleich $\frac{3}{2}$ ist, sind beide Seiten von (6.1) definiert und können miteinander verglichen werden. Wann immer wir in der folgenden Berechnung einen Lösungskandidaten finden, müssen wir überprüfen, ob er ein Element von D ist, d.h. ob er ungleich $\frac{3}{2}$ ist. Nur dann akzeptieren wir ihn als Lösung.

Nun die Fallunterscheidung. Mit Hilfe einer Unterscheidung der zwei Fälle $2x-3 > 0$ und $2x-3 < 0$ können wir uns (getrennt in jedem dieser beiden Fälle) der Betragsstriche entledigen. (Der Fall $2x-3=0$ kann ja, wie zuvor bemerkt, nicht eintreten.) Gehen Sie den folgenden – wieder in knapper Form angeschriebenen – Lösungsweg genau durch und versuchen Sie (am besten auf dem Papier), ihn nachzuvollziehen:

⁶ Zur Definitionsmenge siehe das Skriptum über Bruchgleichungen.

1. Fall $2x - 3 > 0$

In diesem Fall gilt $|2x - 3| = 2x - 3$.

$$\begin{array}{lcl}
 \frac{x+1}{2x-3} = x+2 & | & \cdot (2x-3) \\
 x+1 = (x+2)(2x-3) & | & \text{rechte Seite ausmultiplizieren} \\
 x+1 = 2x^2+x-6 & | & -x-1 \\
 0 = 2x^2-7 & | & : 2 \\
 0 = x^2 - \frac{7}{2} & | & \text{quadratische Gleichung, deren Lösungen} \\
 & & \text{wir sofort hinschreiben können} \\
 x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{7}{2}} \in D & & (6.2)
 \end{array}$$

Überprüfen, ob die Bedingung $2x - 3 > 0$ erfüllt ist:

- Für $x_1 = -\sqrt{\frac{7}{2}}$: $2x_1 - 3 = -2\sqrt{\frac{7}{2}} - 3 \dots$ ist nicht > 0
 $\Rightarrow x_1$ ist keine Lösung von (6.1)!
- Für $x_2 = \sqrt{\frac{7}{2}}$: $2x_2 - 3 = 2\sqrt{\frac{7}{2}} - 3 = \sqrt{14} - 3 \approx 0.74 > 0$
 $\Rightarrow x_2$ ist Lösung von (6.1)!

Teil-Lösungsmenge für diesen Fall: $L_1 = \{\sqrt{\frac{7}{2}}\}$.

(Anmerkung: Um zu überprüfen, ob $\sqrt{14} - 3 > 0$ ist, haben wir uns erlaubt, einen – mit dem Taschenrechner ermittelten – Näherungswert zu benutzen.)

2. Fall $2x - 3 < 0$

In diesem Fall gilt $|2x - 3| = -(2x - 3)$.

$$\begin{array}{lcl}
 -\frac{x+1}{2x-3} = x+2 & | & \cdot (2x-3) \\
 -(x+1) = (x+2)(2x-3) & | & \text{alles ausmultiplizieren} \\
 -x-1 = 2x^2+x-6 & | & +x+1 \\
 0 = 2x^2+2x-5 & | & \text{quadratische Gleichung lösen} \\
 & & \text{(z.B. mit großer Lösungsformel)} \\
 x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{11}}{2} \in D & & (6.3)
 \end{array}$$

Überprüfen, ob die Bedingung $2x - 3 < 0$ erfüllt ist:

- Für $x_3 = \frac{-1-\sqrt{11}}{2}$: $2x_3 - 3 = -1 - \sqrt{11} - 3 = -4 - \sqrt{11} < 0$
 $\Rightarrow x_3$ ist Lösung von (6.1)!
- Für $x_4 = \frac{-1+\sqrt{11}}{2}$: $2x_4 - 3 = -1 + \sqrt{11} - 3 = -4 + \sqrt{11} \approx -0.68 < 0$
 $\Rightarrow x_4$ ist Lösung von (6.1)!

Teil-Lösungsmenge für diesen Fall: $L_2 = \{\frac{-1-\sqrt{11}}{2}, \frac{-1+\sqrt{11}}{2}\}$.

(Anmerkung: Auch hier haben wir uns zur Überprüfung, ob x_4 die Voraussetzung für diesen Fall erfüllt, die Verwendung eines Näherungswerts erlaubt.)

Gesamt-Lösungsmenge: $L = L_1 \cup L_2 = \{\frac{-1-\sqrt{11}}{2}, \frac{-1+\sqrt{11}}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\}$.

Nachbemerkung: An zwei Stellen dieses Lösungswegs haben wir bei der Überprüfung, ob die gefundenen Lösungskandidaten die Voraussetzung für den jeweiligen Fall erfüllen, auf

Näherungswerte zurückgegriffen, wie wir sie leicht mit dem Taschenrechner ermitteln können. Das können wir tun, weil wir dem Taschenrechner vertrauen. Es wäre aber auch ohne gegangen:

- Um zu überprüfen, welches Vorzeichen $\sqrt{14} - 3$ hat, überlegen wir: Da 14 größer als 9 ist, ist $\sqrt{14}$ größer als $\sqrt{9}$ (also 3). Folglich ist $\sqrt{14} > 3$. Daher ist $\sqrt{14} - 3 > 0$.
- Um zu überprüfen, dass $-4 + \sqrt{11} < 0$ ist, überlegen wir: Da 16 größer als 11 ist, ist $\sqrt{16}$ (also 4) größer als $\sqrt{11}$. Folglich ist $\sqrt{11} < 4$. In $-4 + \sqrt{11} = \sqrt{11} - 4$ wird also die größere Zahl von der kleineren abgezogen, und daher gilt $-4 + \sqrt{11} < 0$.

Wie Sie anhand dieses Beispiels erkennen können, muss man bei der Methode der Fallunterscheidungen an viele Dinge denken und den Überblick bewahren. Es handelt sich nicht um *eine Rechnung*, sondern um mehrere Argumentationsschritte und Berechnungen, die in einem bestimmten logischen Verhältnis zueinander stehen:

- Die zu betrachtenden Fälle bestimmen.
- Jeden einzelnen Fall behandeln. Dabei
 - die (vereinfachte) Gleichung lösen,
 - checken, ob die Lösungskandidaten Elemente der Definitionsmenge sind,
 - checken, ob die Lösungskandidaten die Voraussetzung für den jeweiligen Fall erfüllen,
 - und alle Lösungskandidaten, die diese beiden Prüfungen bestanden haben, zu einer Teil-Lösungsmenge zusammenfassen.
- Am Ende alle Teil-Lösungsmengen zu einer Gesamt-Lösungsmenge zusammenfassen.

Es ist also entscheidend, dass Sie die einer Fallunterscheidung zugrunde liegende Argumentationsstruktur kennen und *verstehen*!

7 Betrag als Abstand auf der Zahlengeraden

Manche (einfachen) Betragsgleichungen können wir ganz ohne Fallunterscheidungen lösen. Dazu müssen wir uns erinnern, dass der Betrag einer reellen Zahl als „Abstand von 0 (vom Nullpunkt) auf der Zahlengeraden“ gedeutet werden kann. Für zwei reelle Zahlen a und b kann $|a - b|$ als „Abstand zwischen a und b auf der Zahlengeraden“ gedeutet werden⁷.

Nehmen wir als Beispiel die bereits oben gelöste Gleichung (1.1)

$$|x - 5| = 2. \quad (7.1)$$

Ihre Aussage kann geometrisch in dieser Form gedeutet werden: „Der Abstand zwischen x und 5 auf der Zahlengeraden ist gleich 2“. Welche Zahlen haben von 5 den Abstand 2? Das sind natürlich die Zahlen 3 und 7. Wir können uns das unmittelbar vorstellen – die Rechnungen, die wir dabei in unserem Kopf ausführen (ohne, dass uns das bewusst werden muss) sind $5 - 2 = 3$ und $5 + 2 = 7$. So betrachtet können wir die Lösungen auch in der Form 5 ± 2

⁷ Siehe dazu das Skriptum über den Absolutbetrag.

anschreiben. Damit ist die Gleichung gelöst (und die Lösungsmenge stimmt natürlich mit der früher gefundenen überein)!

Als zweites Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$|3x^2 - 7| = 4. \quad (7.2)$$

Sie besagt: „Der Abstand zwischen $3x^2$ und 7 auf der Zahlengeraden ist gleich 4“. Ist x eine Lösung, so müssen wir, um auf der Zahlengeraden zu $3x^2$ zu gelangen, von 7 aus entweder 4 nach links oder 4 nach rechts gehen. Das bedeutet, dass $3x^2$ entweder gleich $7 - 4$ (also 3) oder gleich $7 + 4$ (also 11) ist. Wir erhalten daher die zwei Gleichungen $3x^2 = 3$ und $3x^2 = 11$, und jede Lösung (zumindest) einer dieser Gleichungen ist eine Lösung von (7.2). Sehen wir sie uns beide an:

- Die Lösungen der Gleichung $3x^2 = 3$ sind $x = \pm 1$.
- Die Lösungen der Gleichung $3x^2 = 11$ sind $x = \pm \sqrt{\frac{11}{3}}$.

Gleichung (7.2) besitzt also vier Lösungen. Die Lösungsmenge ist $L = \{-\sqrt{\frac{11}{3}}, -1, 1, \sqrt{\frac{11}{3}}\}$.

Bei Gleichungen wie (2.1) ist diese „geometrische“ Methode ebenfalls anwendbar, die Argumentation ist aber etwas aufwändiger. Sie sieht so aus: Gleichung (2.1), also

$$|x - 5| = 2x - 11, \quad (7.3)$$

besagt, dass der Abstand auf der Zahlengeraden zwischen x und 5 gleich $2x - 11$ ist. Das kann aber nur klappen, wenn $2x - 11$ einen „Abstand“ darstellen kann, d.h. wenn $2x - 11 \geq 0$ ist. Ist das der Fall und ist x eine Lösung, so müssen wir, um auf der Zahlengeraden zu x zu gelangen, von 5 aus entweder $2x - 11$ nach links oder $2x - 11$ nach rechts gehen. Das bedeutet, dass x entweder gleich $5 - (2x - 11)$ (also $16 - 2x$) oder gleich $5 + (2x - 11)$ (also $2x - 6$) ist. Wir erhalten daher die zwei Gleichungen $x = 16 - 2x$ und $x = 2x - 6$, und jede Lösung (zumindest) einer dieser Gleichungen ist eine Lösung von (7.3). Sehen wir sie uns beide an:

- Die Gleichung $x = 16 - 2x$ besitzt genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{16}{3}$.
- Die Gleichung $x = 2x - 6$ besitzt genau eine Lösung, nämlich $x = 6$.

Die Bedingung $2x - 11 \geq 0$ ist für die erste nicht erfüllt (da $2 \cdot \frac{16}{3} - 11 = -\frac{1}{3} < 0$), für die zweite aber schon (da $2 \cdot 6 - 11 = 1 \geq 0$). Daher besitzt (7.3) nur eine einzige Lösung, nämlich 6, in Übereinstimmung mit der bereits früher ermittelten Lösungsmenge. Wenn Sie genau hinschauen, wird Ihnen auffallen, dass wir hier dieselben Gleichungen wie bei der Methode der Fallunterscheidungen erhalten haben (nur etwas anders angeschrieben und in einem leicht unterschiedlichen logischen Kontext).

Je komplizierter eine Betragsgleichung ist, umso schwieriger ist die „geometrische“ Argumentation. Treten in einer Betragsgleichung zwei Beträge auf, wie beispielsweise in (3.2) oder (5.1), so ist diese Methode nur mehr mit großer Mühe anwendbar. Die Methode der Fallunterscheidungen ist unter dem Strich mächtiger, und da sie überdies auch bei anderen mathematischen Problemen (wie der Behandlung von Ungleichungen) zum Einsatz kommt, haben wir ihr in diesem Skriptum ein entsprechend großes Gewicht verliehen.

8 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $|2x - 1| = 3$
Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = \{-1, 2\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $|2x - 1| = 3x + 1$
Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = \{0\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $|x + 1| = x^2 - 1$
Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = \{-1, 2\}$.

- Lösen Sie die Gleichungen (3.1) und (3.2) mit den im Text angegebenen Methoden!
Lösung:

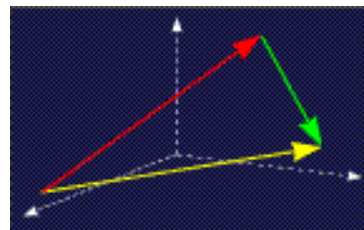
Die Lösungsmenge von (3.1) ist $L = \{-4, \frac{2}{3+\sqrt{17}}\}$.
Die Lösungsmenge von (3.2) ist $L = \{-\frac{3}{11}, 2\}$.

- Lösen Sie die Gleichung $|x^2 - 1| = 3$ mit der „geometrischen“ Methode (Betrag als Abstand auf der Zahlengeraden)!
Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = \{-2, 2\}$.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Juni 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“

(<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Wurzelgleichungen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

In diesem Skriptum werden Wurzelgleichungen behandelt. Besonders wichtig für diesen Typ Gleichungen ist es, die Probe zu machen.

1 Wurzelgleichungen und die Probe

Eine **Wurzelgleichung** ist eine Gleichung, in der die Wurzel aus einem oder mehreren Termen vorkommt, möglicherweise auch in ineinandergeschachtelter Form. Der Begriff ist ein bisschen unscharf, wenn nicht genau dazu gesagt wird, um welche Arten von Termen es sich dabei handelt. Wir wollen uns hier darauf beschränken, dass außer dem Wurzelsymbol nur *Polynome* (niedrigen Grades) auftreten.

Ein Beispiel für eine einfache Wurzelgleichung ist

$$x - 1 = \sqrt{x + 1}. \quad (1.1)$$

Sie stellt die Frage dar, ob es eine oder mehrere reelle Zahlen x gibt, für die die Aussage (1.1) wahr ist, und, falls ja, um welche Zahl(en) es sich dabei handelt. Wie können wir sie lösen? Erinnern wir uns: Wir dürfen mit beiden Seiten einer Gleichung das Gleiche machen. Also besteht die erste Wahl darin, beide Seiten von (1.1) zu quadrieren, um das Wurzelsymbol loszuwerden. So ergibt sich das folgende „Protokoll“:

$x - 1 = \sqrt{x + 1}$	beide Seiten quadrieren	
$(x - 1)^2 = x + 1$	linke Seite ausmultiplizieren	
$x^2 - 2x + 1 = x + 1$	$-x - 1$	
$x^2 - 3x = 0$	auf der linken Seite x herausheben	
$x(x - 3) = 0$	quadratische Gleichung, deren Lösungen	(1.2)
	wir sofort hinschreiben können	
$x_1 = 0$		
$x_2 = 3$		

Sind die Lösungen von (1.1) also 0 und 3? Machen wir die Probe. Zuerst¹ mit $x = 0$:

$$\text{LHS} = 0 - 1 = -1 \quad (1.3)$$

$$\text{RHS} = \sqrt{0 + 1} = \sqrt{1} = 1 \quad (1.4)$$

Hoppla! $x = 0$ erfüllt (1.1) nicht! Nun die Probe mit $x = 3$:

$$\text{LHS} = 3 - 1 = 2 \quad (1.5)$$

$$\text{RHS} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2 \quad (1.6)$$

Hier stimmt alles: $x = 3$ ist Lösung von (1.1). Offenbar besitzt (1.1) nur eine Lösung. Ihre Lösungsmenge ist $L = \{3\}$.

Was ist passiert? Die Antwort ist einfach: Das Quadrieren beider Seiten einer Gleichung ist *keine Äquivalenzumformung*. Das bedeutet, dass die „quadrierte“ Gleichung eine andere Lösungsmenge haben kann als die ursprüngliche. Durch das Quadrieren kann man sich Lösungskandidaten einhandeln, die keine Lösungen sind. Ein einfaches Beispiel, das das illustriert, ist die Gleichung

$$x = 1. \quad (1.7)$$

Sie besitzt (natürlich) nur die Lösung 1. Quadrieren wir beide Seiten, so erhalten wir die Gleichung

$$x^2 = 1, \quad (1.8)$$

und diese besitzt zwei Lösungen, nämlich -1 und 1 . Da wir aber nicht auf das Quadrieren beider Seiten von (1.1) verzichten wollen, bleibt nur ein Ausweg: Wir *müssen* die Probe machen, um die echten Lösungen von jenen zu unterscheiden, die wir uns durch das Quadrieren eingehandelt haben. Daher lautet die **wichtigste Regel beim Lösen von Wurzelgleichungen**: Werden beide Seiten einer Wurzelgleichung quadriert, um die Wurzelsymbole loszuwerden, so ergeben sich zunächst nur *Lösungskandidaten*. Von jedem dieser Lösungskandidaten muss mit Hilfe der Probe entschieden werden, ob er eine Lösung ist oder nicht.

Wenn wir die Gleichung (1.1) betrachten, so fällt uns noch etwas anderes auf: Die rechte Seite ist nicht für alle reellen x definiert. Im Rahmen der reellen Zahlen kann aus einer negativen Zahl nicht die Wurzel gezogen werden, und daher ist von vornherein zu verlangen, dass $x + 1 \geq 0$ ist. Die mathematisch saubere Art, das zu verlangen, besteht darin, die Definitionsmenge² $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \geq 0\}$ festzulegen. Nun kommt die gute Nachricht: In der Praxis können wir es uns sparen, bei einer Wurzelgleichung, die durch Quadrieren beider Seiten gelöst wird, die Definitionsmenge anzuschreiben, da wir sowieso von jedem Lösungskandidaten mit Hilfe der Probe entscheiden müssen, ob er eine Lösung ist! Käme da ein Lösungskandidat daher, für den eine unter einem Wurzelsymbol stehende Zahl negativ wäre, würde das bei der Probe sogleich auffallen. Das ist die **zweite Regel beim Lösen von Wurzelgleichungen**: Die Angabe der Definitionsmenge ist mathematisch gut und schön, aber entbehrlich, wenn ohnehin in jedem Fall die Probe gemacht wird (und wir werden es im Folgenden auch nicht tun).

Ausgerüstet mit diesen beiden Regeln sehen wir uns nun einige Typen von Wurzelgleichungen an.

¹ LHS („left hand side“) steht für die linke Seite der Gleichung, RHS („right hand side“) steht für ihre rechte Seite.

² Zur Definitionsmenge siehe das Skriptum über Bruchgleichungen.

2 Wurzelgleichungen mit nur einer Wurzel

Tritt nur eine einzige Wurzel in einer Wurzelgleichung auf, so lautet die Strategie: Die Wurzel wird (durch Addieren gleicher Terme auf beiden Seiten) auf eine Seite der Gleichung gebracht, alles andere auf die andere Seite, und danach wird quadriert. Gleichung (1.1) ist bereits in der gewünschten Form. Sehen wir uns als zweites Beispiel die Wurzelgleichung

$$2x + \sqrt{x^2 + 9} = 4x + 3 \quad (2.1)$$

an! Das folgende „Protokoll“ zeigt die Ermittlung der Lösungskandidaten:

$$\begin{array}{l|l}
 2x + \sqrt{x^2 + 9} = 4x + 3 & -2x \\
 \sqrt{x^2 + 9} = 2x + 3 & \text{beide Seiten quadrieren} \\
 x^2 + 9 = (2x + 3)^2 & \text{rechte Seite ausmultiplizieren} \\
 x^2 + 9 = 4x^2 + 12x + 9 & -x^2 - 9 \\
 0 = 3x^2 + 12x & : 3 \\
 0 = x^2 + 4x & \text{auf der rechten Seite } x \text{ herausheben} \\
 0 = x(x + 4) & \text{quadratische Gleichung, deren Lösungen} \\
 & \text{wir sofort hinschreiben können} \\
 x_1 = -4 & \\
 x_2 = 0 &
 \end{array} \quad (2.2)$$

Nun die Probe für $x = x_1 = -4$:

$$\text{LHS} = 2 \cdot (-4) + \sqrt{(-4)^2 + 9} = -8 + \sqrt{25} = -8 + 5 = -3 \quad (2.3)$$

$$\text{RHS} = 4 \cdot (-4) + 3 = -13 \quad (2.4)$$

Daher ist -4 keine Lösung von (2.1). Und die Probe für $x = x_2 = 0$:

$$\text{LHS} = 2 \cdot 0 + \sqrt{0^2 + 9} = \sqrt{9} = 3 \quad (2.5)$$

$$\text{RHS} = 4 \cdot 0 + 3 = 3 \quad (2.6)$$

Daher ist 0 eine Lösung von (2.1). Die Lösungsmenge von (2.1) ist $L = \{0\}$.

3 Wurzelgleichungen mit zwei Wurzeln

Wurzelgleichungen, in denen zwei Wurzeln auftreten, sind eine Spur herausfordernder. Betrachten wir als Beispiel die Gleichung

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 3. \quad (3.1)$$

Was tun in diesem Fall? Wir könnten einfach beide Seiten quadrieren. Probieren wir es aus: Wir erhalten

$$x + 2 + 2\sqrt{x+2}\sqrt{x-1} + x - 1 = 9, \quad (3.2)$$

wobei wir die linke Seite durch Anwendung der ersten binomischen Formel berechnet haben. Bedenken wir nun, dass $\sqrt{x+2}\sqrt{x-1} = \sqrt{(x+2)(x-1)}$ ist, und vereinfachen die linke Seite, so erhalten wir die Gleichung

$$2x + 1 + 2\sqrt{(x+2)(x-1)} = 9. \quad (3.3)$$

Nun haben wir nur mehr eine einzige Wurzel und verfahren wie im vorigen Abschnitt besprochen. Machen Sie das zur Übung selbst! Die Lösung ist:

$$\text{Die Lösungsmenge ist } L = \{2\}.$$

Damit zeichnet sich die Idee einer allgemeinen Lösungsmethode ab, die auch bei komplizierteren Wurzelgleichungen oft zum Ziel führt: **Quadrieren, um die Zahl der auftretenden Wurzeln zu reduzieren!** Dabei gibt es in der Regel mehrere Möglichkeiten, wie das bewerkstelligt werden kann. So könnten wir beispielsweise (3.1) zu

$$\sqrt{x+2} = 3 - \sqrt{x-1} \quad (3.4)$$

umformen und nun beide Seiten quadrieren. Dann erhalten wir mit

$$x+2 = 9 - 6\sqrt{x-1} + x-1 \quad (3.5)$$

eine Gleichung, die ebenso wie (3.3) nur mehr eine einzige Wurzel enthält, aber leichter zu lösen ist, da die auftretenden Terme einfacher sind. Lösen Sie (3.1) zur Übung auch auf diese Weise!

Bevor Sie eine Wurzelgleichung in Angriff nehmen, lohnt es sich, die möglichen Strategien im Kopf durchzugehen und gegeneinander abzuwägen.

4 Ineinandergeschachtelte Wurzeln

Haben wir es mit einer Gleichung wie

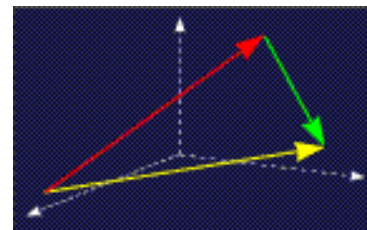
$$\sqrt{-3x-1-\sqrt{4x+5}} = 1 \quad (4.1)$$

zu tun, so reicht zweimaliges Quadrieren, um beide Wurzeln loszuwerden. Versuchen Sie es selbst! Die Lösung ist:

$$\text{Die Lösungsmenge ist } L = \{-1\}.$$

Dieses Skriptum wurde erstellt im Juni 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“

(<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2021 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

Dieses Skriptum behandelt Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen. Das dafür nötige Vorwissen wird zuvor kurz skizziert.

1 Potenzen und Logarithmen

In diesem Skriptum müssen wir voraussetzen, dass Sie mit Potenzen und Logarithmen vertraut sind¹. Für den Fall, dass Ihre Erinnerungen an diese Dinge schwach sind, geben wir zu Beginn eine Einführung, in der alles enthalten ist, was wir zum Lösen von Exponentialgleichungen und logarithmischen Gleichungen benötigen.

Mit jeder reellen Zahl $a > 0$ und jeder reellen Zahl x können wir die *Potenz* a^x bilden. Dabei nennen wir a die *Basis* und x den *Exponenten* (oder die *Hochzahl*). Da sich für $a = 1$ keine interessanten Potenzen ergeben, wollen wir im Folgenden für alle auftretenden Basen annehmen, dass sie $\neq 1$ sind.

Nun nehmen wir in Gedanken ein a (positiv und $\neq 1$) und ein x (beliebig) und bilden die Potenz

$$u = a^x. \quad (1.1)$$

Und jetzt stellen wir uns vor, wir hätten x vergessen, wüssten aber noch die Werte von a und u . Können wir x ermitteln? Die Antwort ist erfreulicherweise ja, denn gleich zu Beginn unserer Überlegungen kommt uns eine wichtige mathematische Tatsache zu Hilfe: Sind a und u zwei positive reelle Zahlen (und $a \neq 1$), so gibt es nur eine einzige reelle Zahl x , für die $a^x = u$ ist. Das Problem, x aus a und u zu bestimmen, besitzt also eine eindeutige Lösung. Wir können sie zwar nicht immer mit Hilfe der Grundrechnungsarten berechnen, aber ein Taschenrechner oder ein mathematisches Computerprogramm gibt (beliebig genaue) Näherungswerte aus. Daher

¹ Siehe dazu die Skripten *Potenzen und Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Graphen*.

benötigen wir zunächst eine Bezeichnung für diese Operation – und das ist der *Logarithmus*. Wir schreiben²

$$x = \log_a u \quad \text{oder} \quad x = \log_a(u) \quad (1.2)$$

und nennen das „den Logarithmus von u zur Basis a “. Eine Zahl u zu *logarithmieren* bedeutet, den Exponenten x in der Darstellung $u = a^x$ für eine gegebene Basis a zu berechnen. Mit der symbolischen Schreibweise (1.2) verhält es sich ähnlich wie mit dem Wurzelsymbol beim Wurzelziehen: Es gibt genau eine positive Zahl, deren Quadrat 2 ist, und diese Zahl nennen wir die Quadratwurzel (oder kurz Wurzel) aus 2 und schreiben sie in der Form $\sqrt{2}$ an. Wir können wunderbar mit ihr rechnen, ganz ohne Dezimaldarstellung. In gleicher Weise gilt: Wird die näherungsweise Dezimaldarstellung eines Logarithmus benötigt, der sich „händisch“ nicht berechnen lässt, so benutzen wir einfach den Taschenrechner oder ein mathematisches Computerprogramm. Im allgemeinen Fall notieren wir Rechenergebnisse aber lieber in exakter symbolischer Form als in näherungsweiser Dezimaldarstellung.

Betrachten wir ein Beispiel:

$$\log_2 8 = 3. \quad (1.3)$$

Warum? Weil $8 = 2^3$ ist! Ein anderes Beispiel: Was ist $\log_{10}(1 \text{ Million})$?

$$\log_{10}(1 \text{ Million}) = 6, \text{ da } 1 \text{ Million} = 10^6.$$

Weiters gilt für jede Basis a , dass

$$\log_a a = 1 \quad \text{und} \quad \log_a 1 = 0. \quad (1.4)$$

Schlüsse wie diese sollten Ihnen keine allzu großen Schwierigkeiten bereiten!

Aus der Eigenschaft des Logarithmus, den Exponenten einer Potenz anzugeben, folgen zwei wichtige **Rechengesetze**. Das erste lautet

$$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v. \quad (1.5)$$

In Worten: Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen (bezüglich der gleichen Basis). Diese Regel folgt einfach aus der Identität $a^x a^y = a^{x+y}$, wenn die Abkürzungen $u = a^x$ und $v = a^y$ verwendet werden. Das zweite Rechengesetz lautet:

$$\log_a(u^z) = z \log_a u, \quad (1.6)$$

wobei z eine beliebige reelle Zahl ist. In Worten ausgedrückt: Beim Logarithmieren einer Potenz darf der Exponent „vor den Logarithmus gestellt“ werden. Diese Regel folgt aus der Identität $(a^x)^z = a^{xz}$, wenn die Abkürzung $u = a^x$ verwendet wird. Für natürliche z folgt sie unmittelbar aus (1.5). So gilt etwa für $z = 2$

$$\log_a(u^2) = \log_a(u \cdot u) = \log_a u + \log_a u = 2 \log_a u. \quad (1.7)$$

² Die Klammer kann weggelassen werden, wenn klar ist, wovon der Logarithmus gebildet wird. In $\log_3(6^2)$ sollte sie geschrieben werden, da bei der Schreibweise $\log_3 6^2$ eine Verwechslung mit $(\log_3 6)^2$ droht. Ansonsten ist es Geschmackssache, ob die Klammer geschrieben wird.

Aus den Rechengesetzen (1.5) und (1.6) folgen einige weitere, von denen die wichtigsten

$$\log_a \left(\frac{u}{v} \right) = \log_a u - \log_a v \quad (1.8)$$

und

$$\log_a \left(\frac{1}{u^z} \right) = -z \log_a u \quad (1.9)$$

lauten. Sie sollten alle diese Regeln gut kennen und in konkreten Situationen anwenden können. Insbesondere kann man mit ihnen Ausdrücke, die Logarithmen (von Zahlen oder von Termen) enthalten, erheblich vereinfachen. So ist beispielsweise

$$\log_3 81 = \log_3(3^4) = 4 \log_3 3 = 4 \quad (1.10)$$

und

$$\log_5 \left(\frac{1}{125} \right) = -\log_5 125 = -\log_5(5^3) = -3 \log_5 5 = -3 \quad (1.11)$$

sowie (für $x > 1$)

$$\log_{10}(x^2 - 1) - \log_{10}(x - 1) = \log_{10} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = \log_{10}(x + 1). \quad (1.12)$$

Ein Blick auf Ihren wissenschaftlichen Taschenrechner zeigt (höchstwahrscheinlich), dass er eine Taste besitzt, die mit „lg“ oder „log“ beschriftet ist und möglicherweise auch eine Taste, auf der „ln“ steht. In seltenen Fällen gibt es auch eine Taste „ld“. Diese Tasten stehen für Logarithmen zu besonderen Basen:

$$\begin{aligned} \lg &= \log_{10} && \text{Logarithmus zur Basis 10} \\ &&& \text{(dekadischer Logarithmus oder Zehnerlogarithmus)} \\ \ln &= \log_e && \text{Logarithmus zur Basis } e \text{ (natürlicher Logarithmus)} \\ \text{ld} &= \log_2 && \text{Logarithmus zur Basis 2 (} \textit{logarithmus dualis} \text{)} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Steht auf einer Taste einfach „log“, so ist damit meist der Zehnerlogarithmus gemeint. In manchen mathematischen Computerprogrammen hingegen wird mit dem Befehl „log“ oder „Log“ der natürliche Logarithmus³ bezeichnet. (Letzteres ist etwa in *Mathematica* der Fall.) Sie werden auf Ihrem Taschenrechner wahrscheinlich keine Taste für \log_3 finden, aber das macht nichts, denn Logarithmen zu verschiedenen Basen können einfach ineinander umgerechnet werden:

$$\log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}, \quad (1.14)$$

wobei b eine beliebige andere Basis ist. Die Logarithmen zu zwei verschiedenen Basen, $\log_a u$ und $\log_b u$, unterscheiden sich also nur durch einen multiplikativen Umrechnungsfaktor. Wollen Sie also etwa mit Ihrem Taschenrechner einen Näherungswert von $\log_2 5$ ermitteln, so

³Über die Zahl e (die sogenannte *Eulersche Zahl*, die Basis des natürlichen Logarithmus) wollen wir in diesem Skriptum nichts sagen, außer dass sie eine in der Mathematik äußerst wichtige irrationale Zahl ist, deren Dezimaldarstellung mit $e = 2.718281828\dots$ beginnt. (Für genauere Informationen siehe das Skriptum *Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Graphen*.) Ihr Taschenrechner besitzt wahrscheinlich eine Taste zur Berechnung von Potenzen der Form e^x .

berechnen Sie mit den entsprechenden Tasten einfach

$$\log_2 5 = \frac{\lg 5}{\lg 2} \quad \text{oder} \quad \frac{\ln 5}{\ln 2}. \quad (1.15)$$

Ein Logarithmus kann 0 oder negativ sein (Beispiele: $\log_a 1 = 0$ für jede Basis a , und $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = -1$), aber der Logarithmus kann (im Rahmen der reellen Zahlen, auf den wir uns hier beschränken⁴) nur von positiven Zahlen gebildet werden. $\log_{10}(-1)$ macht genauso wenig Sinn wie $\sqrt{-1}$.

Sowohl die Rechengesetze für den Logarithmus als auch die Umrechnung (1.14) von Logarithmen zu verschiedenen Basen machen es möglich, ein Rechenergebnis, in dem Logarithmen vorkommen, auf verschiedene Weisen anzugeben. So sind beispielsweise die folgenden Zahlen alle gleich:

$$\log_9 25 = 2 \log_9 5 = 2 \frac{\log_3 5}{\log_3 9} = \log_3 5 \quad (1.16)$$

(ein dezimaler Näherungswert dafür ist 1.46497), und das Gleiche gilt für die Zahlen

$$\log_2 15 = \log_2 3 + \log_2 5 = \frac{\ln 15}{\ln 2} = \frac{\lg 3 + \lg 5}{\lg 2} \quad (1.17)$$

(ein Näherungswert ist 3.90689). Diese Mehrdeutigkeit macht es nicht gerade leicht, bei Aufgaben, deren Lösung mitgeliefert wird, zu entscheiden, ob das Ergebnis, das man selbst erhalten hat, mit der angegebenen Lösung übereinstimmt.

Eine letzte Tatsache müssen wir uns noch vor Augen halten: Wir haben bereits erwähnt, dass das Problem, den Exponenten x zu bestimmen, wenn nur die Basis a und die Potenz $u = a^x$ bekannt sind, nur eine einzige Lösung besitzt (nämlich den Logarithmus von u zur Basis a). Daraus folgt, dass es keine zwei Darstellungen von u als Potenz von a mit verschiedenen Exponenten geben kann. Mathematisch sauber ausgedrückt bedeutet das, dass für $a > 0$ mit $a \neq 1$ und für alle reellen x, y stets gilt:

$$a^x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y. \quad (1.18)$$

Zwei Potenzen der gleichen Basis sind genau dann gleich, wenn ihre Exponenten gleich sind.

⁴ Im Rahmen des erweiterten Zahlbegriffs der *komplexen Zahlen*, die aber hier nicht das Thema sind, sieht das alles ganz anders aus.

2 Exponentialgleichungen

In einer **Exponentialgleichung** kommen Potenzen vor, bei denen die Variable (die wir x nennen) im Exponenten steht. Beginnen wir mit der einfachen Exponentialgleichung

$$3^x = 8. \quad (2.1)$$

Wir haben zwei Möglichkeiten, sie zu lösen:

1. Möglichkeit: Wir verwenden die Definition des Logarithmus („der Logarithmus stellt den Exponenten dar“) und kennen sofort die (einzige) Lösung: $x = \log_3 8$. Die Lösungsmenge von (2.1) ist $L = \{\log_3 8\}$.
2. Möglichkeit: Wir entscheiden uns für eine Basis, in der wir arbeiten wollen (z.B. für die Basis 10, da es auf dem Taschenrechner eine Taste für den Zehnerlogarithmus gibt) und bilden den Logarithmus beider Seiten von (2.1):

$$\begin{array}{ll|l} 3^x = 8 & & \lg \text{ auf beide Seiten anwenden} \\ \lg(3^x) = \lg 8 & & \text{linke Seite vereinfachen} \\ & & (\text{den Exponenten vor den Logarithmus stellen}) \\ x \lg 3 = \lg 8 & & : \lg 3 \\ x = \frac{\lg 8}{\lg 3} & & \end{array} \quad (2.2)$$

Hier erscheint die Lösung durch den Zehnerlogarithmus ausgedrückt. Die Lösungsmenge von (2.1) ist $L = \{\frac{\lg 8}{\lg 3}\}$. (Statt des Zehnerlogarithmus hätte man sich auch für irgendeine andere Basis entscheiden können. Wäre unsere Wahl auf den natürlichen Logarithmus gefallen, so hätte sich die Lösung in der Form $\frac{\ln 8}{\ln 3}$ ergeben. Hätten wir den Logarithmus zur Basis 3 gewählt, so hätte die Lösung die Form $\log_3 8$ gehabt.)

Die Lösungen stimmen überein, auch wenn sie verschieden aussehen. Hätte man die erste Form der Lösung, $\log_3 8$, mit Hilfe von (1.14) in den Zehnerlogarithmus umgerechnet, so hätte sich genau die zweite Form, $\frac{\lg 8}{\lg 3}$, ergeben. Ein numerischer Näherungswert für die Lösung ist 1.89279. Sie können dieses Ergebnis mit der Potenzfunktion ihres Taschenrechners leicht näherungsweise überprüfen, indem Sie $3^{1.89279}$ berechnen. Das Ergebnis weicht nur wenig von 8 ab. Diese numerische Probe zeigt vielleicht am schönsten, was der Logarithmus ist. $\log_3 8$ ist die Antwort auf die Frage, als welche „Dreierpotenz“ 8 dargestellt werden kann. Genau das ist die Frage, die Gleichung (2.1) ausdrückt: „3 hoch wieviel ist 8?“.

Anmerkung: Die zweite der soeben angewandten Methoden bestand darin, beide Seiten der Gleichung zu logarithmieren. Im Fall von (2.1) ist das möglich, da beide Seiten positiv sind: Für jedes reelle x ist $3^x > 0$, und auch 8 ist positiv. Diese Methode sollte nur bei Gleichungen angewandt werden, bei denen in ähnlicher Weise offensichtlich ist, dass dabei nicht der Logarithmus einer negativen Zahl gebildet werden muss. In diesen Fällen handelt es sich aufgrund der Eindeutigkeit des Logarithmus um eine *Äquivalenzumformung*, d.h. wir bekommen eine vereinfachte Gleichung, die dieselbe Lösungsmenge hat wie die ursprüngliche.

Eine etwas komplizierter aussehende Exponentialgleichung ist

$$5^{2x-7} = 25. \quad (2.3)$$

Hier haben wir sogar drei Lösungsmöglichkeiten (von denen die erste die klügste ist):

1. Möglichkeit: Wir bemerken, dass $25 = 5^2$ ist. Daher lautet (2.3), nur anders angeschrieben,

$$5^{2x-7} = 5^2. \quad (2.4)$$

Mit (1.18) schließen wir, dass (2.4) genau dann erfüllt ist, wenn die Exponenten gleich sind, d.h. wenn $2x - 7 = 2$ gilt. Diese einfache Gleichung können wir leicht lösen:

$$\begin{array}{rcl} 2x - 7 & = & 2 \quad | \quad +7 \\ 2x & = & 9 \quad | \quad :2 \\ x & = & \frac{9}{2} \end{array} \quad (2.5)$$

2. Möglichkeit: Wir verwenden die Definition des Logarithmus und wissen sofort, dass $2x - 7 = \log_5 25$ ist. Diese Gleichung können wir vereinfachen und lösen:

$$\begin{array}{rcl} 2x - 7 & = & \log_5 25 \quad | \quad \text{rechte Seite vereinfachen} \\ & & (\log_5 25 = \log_5(5^2) = 2 \log_5 5 = 2) \\ 2x - 7 & = & 2 \quad | \quad +7 \\ 2x & = & 9 \quad | \quad :2 \\ x & = & \frac{9}{2} \end{array} \quad (2.6)$$

3. Möglichkeit: Wir entscheiden uns dafür, mit dem natürlichen Logarithmus zu arbeiten und logarithmieren beide Seiten von (2.3):

$$\begin{array}{rcl} 5^{2x-7} & = & 25 \quad | \quad \ln \text{ auf beide Seiten anwenden} \\ \ln(5^{2x-7}) & = & \ln 25 \quad | \quad \text{beide Seiten vereinfachen} \\ (2x-7) \ln 5 & = & 2 \ln 5 \quad | \quad : \ln 5 \\ 2x - 7 & = & 2 \quad | \quad +7 \\ 2x & = & 9 \quad | \quad :2 \\ x & = & \frac{9}{2} \end{array} \quad (2.7)$$

Alle drei Ergebnisse erscheinen hier in der gleichen Form. Die Lösungsmenge von (2.3) ist $L = \{\frac{9}{2}\}$.

Als nächstes betrachten wir die Exponentialgleichung

$$2^{3x} = 4^{1-x}. \quad (2.8)$$

Wieder gibt es hier mehrere Lösungsmöglichkeiten. Die einfachste ist diese: Wir bemerken, dass $4 = 2^2$ ist und formen 4^{1-x} in $(2^2)^{1-x} = 2^{2(1-x)}$ um. Daher kann (2.8) auch in der Form

$$2^{3x} = 2^{2(1-x)} \quad (2.9)$$

geschrieben werden. Mit (1.18) schließen wir, dass das genau dann erfüllt ist, wenn die Exponenten gleich sind, d.h. wenn $3x = 2(1-x)$ ist. Lösen Sie diese Gleichung selbst!

Die Lösung ist:

$$\left\{\frac{5}{2}\right\} = L \text{ ist die Lösungsmenge}$$

Nur ein bisschen komplizierter wird es, wenn wir vor einer Gleichung wie

$$2^{3x} = 4^{1+x} \cdot 3 \quad (2.10)$$

stehen. Mit $4^{1+x} = (2^2)^{1+x} = 2^{2(1+x)}$ können wir sie in der Form

$$2^{3x} = 2^{2(1+x)} \cdot 3 \quad (2.11)$$

anschreiben und danach so verfahren:

$$\begin{array}{rcl} 2^{3x} & = & 2^{2(1+x)} \cdot 3 \quad | \cdot 2^{-2(1+x)} \\ 2^{3x} 2^{-2(1+x)} & = & 3 \quad | \text{ linke Seite vereinfachen} \\ 2^{3x-2(1+x)} & = & 3 \quad | \text{ linke Seite weiter vereinfachen} \\ 2^{x-2} & = & 3 \end{array} \quad (2.12)$$

Auf die so erhaltene vereinfachte Gleichung kann eines der im Zusammenhang mit (2.1) besprochenen Verfahren angewandt werden. Machen Sie das zur Übung selbst!

Die Lösung ist:

$$\left\{\frac{2 \ln 3}{\ln 2} + 2\right\} = \left\{\frac{\ln 3}{\ln 2} + 2\right\} = \{2 + \log_2 3\} = L \text{ ist die Lösungsmenge}$$

In allen bisher betrachteten Exponentialgleichungen sind entweder nur Potenzen mit einer einzigen Basis aufgetreten (in (2.1) die Basis 3 und in (2.3) die Basis 5), oder wir haben es durch einfache Umformungen geschafft, der Gleichung eine solche Form zu geben (in (2.8) und (2.10) treten die Basen 2 und 4 auf, aber da $4 = 2^2$ ist, konnten wir die relevanten Terme als Potenzen der Basis 2 umschreiben). Gehen Sie diese Gleichungen noch einmal durch, und lassen Sie das gemeinsame „Strickmuster“ aller vorgeführten Lösungswege auf sich wirken!

Als letztes Beispiel einer Exponentialgleichung, die leicht gelöst werden kann, betrachten wir

$$2^{5x-1} = 7^{3x+2}. \quad (2.13)$$

Da hier zwei Basen (nämlich 2 und 7) auftreten, von denen *nicht* die eine eine einfach anzuschreibende Potenz der anderen ist, ist die direkte Ausnutzung der Definition des Logarithmus umständlich⁵. Aber es bleibt die einfachere Möglichkeit, von beiden Seiten den Logarithmus zu einer beliebigen Basis zu bilden. Wir entscheiden uns für den natürlichen Logarithmus:

$$\begin{array}{rcl} 2^{5x-1} & = & 7^{3x+2} \quad | \ln \text{ auf beide Seiten anwenden} \\ \ln(2^{5x-1}) & = & \ln(7^{3x+2}) \quad | \text{ beide Seiten vereinfachen} \\ (5x-1) \ln 2 & = & (3x+2) \ln 7 \end{array} \quad (2.14)$$

Wir überlassen es Ihnen, diese (lineare) Gleichung zu lösen.

⁵ Sie ist aber möglich, indem etwa 7 als $2^{\log_2 7}$ geschrieben wird.

Die Lösung ist:

$$\left\{ \frac{\ln 2 + 2 \ln 3}{\ln 2 + 2 \ln 3} \right\} = 7 \text{ ist die Lösungsmenge}$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts erwähnen wir noch, dass viele harmlos aussehende Exponentialgleichungen, wie etwa

$$2^x = 3x \quad (2.15)$$

oder

$$2^x = 3^x - 2, \quad (2.16)$$

mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln nicht exakt gelöst werden können. In diesen Fällen werden numerische Näherungsverfahren angewandt (die aber nicht Gegenstand dieses Skriptums sind).

3 Logarithmische Gleichungen

Eine **logarithmische Gleichung** enthält, wie der Name sagt, Logarithmen. Oft kann eine derartige Gleichung gelöst werden, indem beide Seiten zu einer geeigneten „Potenz erhoben“ werden, d.h. es wird eine Operation der Form „ a hoch“ auf beide Seiten angewandt. Wird dann die Identität

$$a^{\log_a u} = u \quad (3.1)$$

(die aus den Rechenregeln für den Logarithmus folgt⁶) benutzt, so löst sich die logarithmische Gleichung manchmal (bei Übungsaufgaben meistens) in Wohlgefallen auf.

Ein Beispiel für eine solche Gleichung wäre

$$\ln(3x - 1) = 5. \quad (3.2)$$

Die Basis des hier auftretenden Logarithmus ist e . Bilden wir „ e hoch“ beide Seiten von (3.2), so erhalten wir unter Verwendung von (3.1) die Gleichung

$$3x - 1 = e^5 \quad (3.3)$$

und daher als (einzige) Lösung $x = \frac{1}{3}(e^5 + 1)$. Aber Achtung! Während bei den Exponentialgleichungen stets beide Seiten für alle Werte der Variablen definiert waren, ist das bei logarithmischen Gleichungen nicht der Fall. So ist die linke Seite von (3.2) nur dann definiert, wenn $3x - 1 > 0$ ist. Anderenfalls wäre ja der Logarithmus von 0 oder von einer negativen Zahl zu bilden. Wir müssen daher als **Definitionsmenge**⁷ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 1 > 0\}$ festlegen und überprüfen, ob $\frac{1}{3}(e^5 + 1)$ tatsächlich Element von D ist. Daher ein kurzer Check:

$$3 \cdot \frac{1}{3}(e^5 + 1) - 1 = e^5 + 1 - 1 = e^5 > 0. \quad (3.4)$$

⁶ Um das einzusehen, müssen sie nur $x = \log_a u$ in $a^x = u$ einsetzen!

⁷ Zur Definitionsmenge siehe das Skriptum über Bruchgleichungen.

Unser Lösungskandidat ist tatsächlich eine Lösung von (3.2). Die Lösungsmenge ist $L = \{\frac{1}{3}(e^5 + 1)\}$.

Um die Gleichung

$$\ln(3x - 1) - \ln(x + 2) = 5 \quad (3.5)$$

zu lösen, legen wir zunächst die Definitionsmenge $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 1 > 0 \text{ und } x + 2 > 0\}$ fest⁸. Nun verwenden wir die Regel (1.8), um die linke Seite in der Form

$$\ln\left(\frac{3x - 1}{x + 2}\right) \quad (3.6)$$

zu schreiben. Bilden wir dann „e hoch“ beide Seiten von (3.5), so ergibt sich die Bruchgleichung

$$\frac{3x - 1}{x + 2} = e^5. \quad (3.7)$$

Ihre Lösung (berechnen Sie sie zur Übung selbst!) ist $x = -\frac{2e^5+1}{e^5-3}$. Wir überprüfen, ob sie in der Definitionsmenge liegt, wobei wir uns umständliche Umformungen sparen und einfach den Taschenrechner benutzen. Es ergibt sich $3x - 1 \approx -7.144$, was nicht positiv ist. Unsere Lösung von (3.7) ist daher *keine* Lösung von (3.5)! Die Lösungsmenge von (3.5) ist leer: $L = \{\}$.

Um die Gleichung

$$\ln(3x - 1) + \ln(x + 2) = 5 \quad (3.8)$$

zu lösen, legen wir die Definitionsmenge $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 1 > 0 \text{ und } x + 2 > 0\}$ fest⁹ und verwenden die Regel (1.5), um die linke Seite in der Form

$$\ln((3x - 1)(x + 2)) \quad (3.9)$$

zu schreiben. Bilden wir dann „e hoch“ beide Seiten von (3.8), so ergibt sich die (quadratische) Gleichung

$$(3x - 1)(x + 2) = e^5, \quad (3.10)$$

deren Lösungen (wenden Sie zur Übung selbst die „große Lösungsformel“ an!)

$$x_{1,2} = \frac{1}{6} \left(-5 \pm \sqrt{12e^5 + 49} \right) \quad (3.11)$$

sind. Wieder handelt es sich nur um Lösungskandidaten der ursprünglichen Gleichung (3.8). Wir überprüfen, ob sie in deren Definitionsmenge liegen, wobei wir uns wieder umständliche Umformungen sparen und die betreffenden Zahlenwerte einfach näherungsweise mit dem Taschenrechner ermitteln:

⁸ Vielleicht fällt Ihnen auf, dass von den beiden Bedingungen $3x - 1 > 0$ und $x + 2 > 0$ eine überflüssig ist. Die erste gilt, wenn $x > \frac{1}{3}$ ist, und die zweite gilt, wenn $x > -2$ ist. Ist die erste erfüllt, so gilt automatisch auch die zweite. Die Definitionsmenge kann also einfach in der Form $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 1 > 0\}$ geschrieben werden. Wir haben das im Text nicht gemacht, da wir hier keine Kenntnis von Ungleichungen voraussetzen wollen.

⁹ Hier gilt das in Fußnote 8 Gesagte in gleicher Weise.

- Mit $x_1 = \frac{1}{6}(-5 - \sqrt{12e^5 + 49})$ ist $3x_1 - 1 \approx -24.889$, was nicht positiv ist. Daher ist $x_1 \notin D$. x_1 ist keine Lösung von (3.8).
- Mit $x_2 = \frac{1}{6}(-5 + \sqrt{12e^5 + 49})$ ist $3x_2 - 1 \approx 17.889 > 0$ und $x_2 + 2 \approx 8.296 > 0$. Daher ist $x_2 \in D$. x_2 ist Lösung von (3.8).

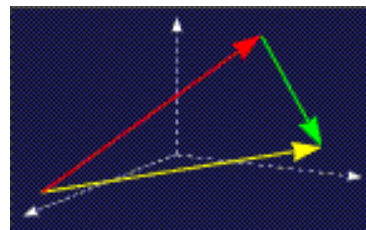
Die Lösungsmenge von (3.8) ist $L = \{x_2\} = \{\frac{1}{6}(-5 + \sqrt{12e^5 + 49})\}$.

Wie bei den Exponentialgleichungen gibt es auch bei den logarithmischen Gleichungen harmlos aussehende, wie

$$\lg x = x - 2, \quad (3.12)$$

die nur mit numerischen Näherungsmethoden gelöst werden können.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Juni 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Ungleichungen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

In diesem Skriptum werden Ungleichungen und einige der wichtigsten Lösungsmethoden für Ungleichungen behandelt.

1 Ungleichungen allgemein

Eine **Ungleichung in einer Variable** ist eine Aussage, dass ein gegebener Term kleiner, kleiner-gleich, größer oder größer-gleich einem anderen gegebenen Term ist, wobei zumindest einer der beiden Terme eine Variable enthält (die, wie bei Gleichungen, oft mit x bezeichnet wird). Ein Beispiel für eine Ungleichung ist

$$x + 2|x + 4| - 1 > \frac{4 - |x| + 3x^2}{x - 2}. \quad (1.1)$$

Wird für x ein konkreter Wert eingesetzt (wobei die Zahl 2 von vornherein nicht erlaubt ist, da die rechte Seite dann nicht definiert ist), so ergibt sich entweder eine wahre Aussage – dann nennen wir diesen x -Wert eine **Lösung** der Ungleichung – oder eine falsche Aussage (dann ist x natürlich *keine* Lösung). So kann durch simples Einsetzen leicht überprüft werden, dass die Zahl 1 eine Lösung von (1.1) ist, die Zahl 3 hingegen nicht.

In der Regel möchte man *alle* Lösungen einer Ungleichung kennen. Die Menge aller Lösungen einer Ungleichung nennen wir deren **Lösungsmenge**. Für die Lösungsmenge einer Ungleichung wird meist das Symbol L verwendet. Wir beschränken uns in diesem Skriptum auf *reelle* Ungleichungen, d.h. wir nehmen an, dass die Variable reelle Werte annehmen kann. Die Lösungsmenge ist dann eine Teilmenge von \mathbb{R} .

Beispielsweise ist – wie wir noch sehen werden – die Lösungsmenge der Ungleichung (1.1) gleich

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ oder } x > 9\} \quad (1.2)$$

oder, in Intervallschreibweise¹,

$$L = (-\infty, 2) \cup (9, \infty). \quad (1.3)$$

Lösungsmengen von Ungleichungen sind in vielen Fällen Intervalle oder Vereinigungen von Intervallen.

2 Lineare Ungleichungen und Äquivalenzumformungen

Eine **lineare Ungleichung** ist eine Ungleichung, bei der die Terme auf beiden Seiten von der Form $ax + b$ sind, wobei a und b vorgegebene reelle Zahlen sind. Ein Beispiel einer linearen Ungleichung ist

$$4x - 3 < 2x + 5. \quad (2.1)$$

Setzen wir beispielsweise $x = 1$ ein, so reduziert sie sich auf die (wahre) Aussage $1 < 7$. Daher ist 1 eine Lösung. Setzen wir $x = 6$ ein, so reduziert sie sich auf die (falsche) Aussage $21 < 17$. Daher ist 6 *keine* Lösung.

Wie finden wir die Lösungsmenge von (2.1)? Im Fall einer linearen Ungleichung gehen wir ähnlich vor wie beim Lösen einer linearen Gleichung²: Wir wenden bestimmte Umformungsregeln an, die aus einer Ungleichung eine andere Ungleichung machen, und zwar so, dass *die Lösungsmengen* der beiden Ungleichungen *dieselben sind*. Die zwei Ungleichungen nennen wir dann zueinander **äquivalent** und das Verfahren, das von der einen zur anderen führt, eine **Äquivalenzumformung**. Wir zählen nun die vier entscheidenden Äquivalenzumformungen auf, wobei wir unter *Ordnungszeichen* eines der vier Symbole $<$, $>$, \leq und \geq verstehen und mit „umdrehen“ meinen, dass $<$ und $>$ vertauscht werden und dass \leq und \geq vertauscht werden. Die Begründungen beziehen sich auf die Umformung einer Ungleichung der Form $r < s$, sie sind aber auch auf die anderen Ungleichungstypen $r > s$, $r \leq s$ und $r \geq s$ anwendbar.

- **Zu beiden Seiten einer Ungleichung wird eine Zahl oder ein Term addiert.**
Dass es sich dabei um eine Äquivalenzumformung handelt, folgt für eine Ungleichung der Form $r < s$ daraus, dass drei beliebige reelle Zahlen r , s und c die Beziehung $r < s$ genau dann erfüllen, wenn sie die Beziehung $r + c < s + c$ erfüllen, und Gleiches gilt für die drei anderen Ungleichungstypen. („Kleiner als“ bedeutet auf der Zahlengeraden „links von“, und die Operation „ c addieren“ bedeutet „um c verschieben“. Ordnungsbeziehungen bleiben unter einer Verschiebung aufrecht.)

- **Beide Seiten einer Ungleichung werden mit einer positiven Zahl oder mit einem Term, von dem sichergestellt ist, dass er nur positive Werte annimmt, multipliziert.**

Dass es sich dabei um eine Äquivalenzumformung handelt, folgt für eine Ungleichung der Form $r < s$ daraus, dass drei beliebige reelle Zahlen r , s und k mit $k > 0$ die Beziehung $r < s$ genau dann erfüllen, wenn sie die Beziehung $kr < ks$ erfüllen, und Gleiches gilt

¹ Intervalle wurden im Skriptum *Die Ordnung der reellen Zahlen* besprochen. Lesen Sie bitte nach, wenn Sie sich nicht mehr erinnern!

² Siehe das Skriptum *Lineare Gleichungen und Äquivalenzumformungen*.

für die drei anderen Ungleichungstypen. (Die Operation „mit einem positiven k multiplizieren“ entspricht (sofern $k \neq 1$) auf der Zahlengeraden einer Streckung (für $k > 1$) oder einer Stauchung (für $k < 1$) des Abstands vom Nullpunkt. Ordnungsbeziehungen bleiben unter einer solchen Streckung bzw. Stauchung aufrecht.)

- **Beide Seiten einer Ungleichung werden mit einer negativen Zahl oder mit einem Term, von dem sichergestellt ist, dass er nur negative Werte annimmt, multipliziert, und gleichzeitig wird das Ordnungszeichen „umgedreht“.**

Dass es sich dabei um eine Äquivalenzumformung handelt, folgt für eine Ungleichung der Form $r < s$ daraus, dass drei beliebige reelle Zahlen r , s und k mit $k < 0$ die Beziehung $r < s$ genau dann erfüllen, wenn sie die Beziehung $kr > ks$ erfüllen, und Gleiches gilt für die drei anderen Ungleichungstypen. (Die Operation „mit einem negativen k multiplizieren“ entspricht auf der Zahlengeraden einer Spiegelung am Nullpunkt, für $k \neq -1$ gefolgt von einer Streckung oder Stauchung. Durch die Spiegelung wird jede Links-rechts-Beziehung „umgedreht“.)

- **Die Ungleichung als Ganzes (inklusive Ordnungszeichen) wird „umgedreht“, d.h. linke und rechte Seite werden vertauscht und das Ordnungszeichen „umgedreht“.**

Dass es sich dabei um eine Äquivalenzumformung handelt, folgt für eine Ungleichung der Form $r < s$ daraus, dass zwei beliebige reelle Zahlen r und s die Beziehung $r < s$ genau dann erfüllen, wenn sie die Beziehung $s > r$ erfüllen, und Gleiches gilt für die drei anderen Ungleichungstypen.

Die zugrunde liegende Logik der Anwendung dieser Regeln ist die gleiche wie beim Gleichungslösen: Eine reelle Zahl x erfüllt genau dann eine gegebene Ungleichung, wenn sie die aus dieser mit Hilfe einer der Umformungsregeln hervorgegangene (vereinfachte) Ungleichung erfüllt. Auf diese Weise erzeugen wir eine Abfolge von zueinander äquivalenten Ungleichungen, deren letzte uns die Lösung unmittelbar mitteilt.

Mit den vier Regeln kommen wir bei linearen Ungleichungen stets durch. Wir demonstrieren das anhand der Ungleichung (2.1). Wie beim Gleichungslösen ist es zweckmäßig, die einzelnen Umformungsschritte in Form eines „Protokolls“ zu notieren³:

$$\begin{array}{rcl}
 4x - 3 < 2x + 5 & | & -2x \\
 2x - 3 < 5 & | & +3 \\
 2x < 8 & | & :2 \\
 x < 4
 \end{array} \tag{2.2}$$

Dabei haben wir im letzten Umformungsschritt die Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ als Division durch 2 notiert. Die letzte der (zueinander äquivalenten) Ungleichungen ist so einfach, dass sie uns direkt die Lösungsmenge angibt. Sie besteht aus allen reellen Zahlen, die kleiner als 4 sind:

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\} \tag{2.3}$$

oder, in Intervallschreibweise,

$$L = (-\infty, 4). \tag{2.4}$$

³ Siehe das Skriptum *Lineare Gleichungen und Äquivalenzumformungen*.

Wie beim Gleichungslösen sind in der Regel mehrere Strategien möglich, um eine Ungleichung zu lösen. Wir wollen das anhand der Ungleichung

$$3x + 2 \geq 5x + 8 \quad (2.5)$$

demonstrieren. Eine Lösungsvariante sieht so aus:

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2 & \geq & 5x + 8 \quad | \quad -5x \\ -2x + 2 & \geq & 8 \quad | \quad -2 \\ -2x & \geq & 6 \quad | \quad :(-2) \\ x & \leq & -3 \end{array} \quad (2.6)$$

Dabei wurde im dritten Umformungsschritt die Multiplikation mit $-\frac{1}{2}$ als Division durch -2 notiert (und entsprechend das Ordnungszeichen umgedreht). Die Lösungsmenge ist $L = (-\infty, -3]$. Die gleiche Aufgabe kann man aber auch so lösen:

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2 & \geq & 5x + 8 \quad | \quad -3x \\ 2 & \geq & 2x + 8 \quad | \quad -8 \\ -6 & \geq & 2x \quad | \quad :2 \\ -3 & \geq & x \quad | \quad \text{alles umdrehen} \\ x & \leq & -3 \end{array} \quad (2.7)$$

Der letzte Schritt wird oft gar nicht mehr angeschrieben, da wir bereits die vorletzte Ungleichung in Gedanken von rechts nach links als „ $x \leq -3$ “ lesen können.

Soweit zu linearen Ungleichungen. Bei komplizierteren Ungleichungen kommen wir mit den genannten Äquivalenzumformungen nur in Ausnahmefällen aus und müssen andere Lösungsmethoden anwenden. Dabei treten immer wieder (sozusagen als Nebenprodukt) lineare Ungleichungen auf. Daher sollten Sie das bisher Gesagte kennen und im Einzelfall sicher anwenden können.

3 Ungleichungen lösen durch Gleichungslösen

Manchmal lässt sich eine Ungleichung lösen, indem man eine *Gleichung* löst. Wie das? Nehmen wir die Ungleichung (2.1) als Beispiel: Gehen wir von einer Zahl x aus und ändern sie geringfügig, so ändern sich die Werte auf beiden Seiten der Ungleichung ebenfalls nur geringfügig⁴. Wenn wir x auf der Zahlengeraden von einer Zahl, die eine Lösung ist, zu einer Zahl, die keine Lösung ist, bewegen, so muss x dazwischen irgendwo einen Wert annehmen, für den die rechte und die linke Seite der Ungleichung *gleich* sind, d.h. für den die Gleichung

$$4x - 3 = 2x + 5 \quad (3.1)$$

gilt. Die ist schnell gelöst: Die einzige Lösung ist die Zahl 4. Sie teilt die Zahlengerade in drei Mengen: alle Zahlen kleiner als 4, 4 selbst, und alle Zahlen größer als 4. Diese drei Mengen, $(-\infty, 4)$, $\{4\}$ und $(4, \infty)$, untersuchen wir nun nacheinander:

⁴ Hinter diesem Verhalten steckt die Eigenschaft der *Stetigkeit*: Ändert sich x nur wenig, so ändert sich ein Term wie $4x - 3$ ebenfalls nur wenig.

1. Das Intervall $(-\infty, 4)$: Innerhalb dieser Menge gibt es keine Zahl, für die die linke Seite von (2.1) gleich der rechten Seite wäre. Folglich besteht sie nur aus Lösungen oder nur aus Nicht-Lösungen! Was von beiden der Fall ist, finden wir leicht heraus, indem wir irgendeine Zahl aus dieser Menge in die Ungleichung einsetzen. Wir wählen die Zahl 3. Mit $x = 3$ reduziert sich (2.1) auf die wahre Aussage $9 < 11$, was bedeutet, dass die Zahl 3 eine Lösung der Ungleichung ist, und mit ihr auch alle anderen Elemente des Intervalls $(-\infty, 4)$.
2. Die Menge $\{4\}$: Ihr einziges Element erfüllt die Gleichung (3.1), d.h. die linke Seite ist nicht kleiner als die rechte. Die Zahl 4 ist daher *keine* Lösung der Ungleichung (2.1).
3. Das Intervall $(4, \infty)$: Innerhalb dieser Menge gibt es keine Zahl, für die die linke Seite von (2.1) gleich der rechten Seite wäre. Folglich besteht sie nur aus Lösungen oder nur aus Nicht-Lösungen! Was von beiden der Fall ist, finden wir leicht heraus, indem wir irgendeine Zahl aus dieser Menge in die Ungleichung einsetzen. Wir wählen die Zahl 5. Mit $x = 5$ reduziert sich (2.1) auf die falsche Aussage $17 < 15$, was bedeutet, dass die Zahl 5 keine Lösung der Ungleichung ist, und mit ihr auch alle anderen Elemente des Intervalls $(4, \infty)$.

Nun haben wir alle reellen Zahlen überprüft: Die Lösungen von (2.1) sind genau die Elemente des Intervalls $(-\infty, 4)$, was natürlich mit (2.3) bzw. (2.4) übereinstimmt.

Diese Methode kann auf zahlreiche kompliziertere Ungleichungen angewandt werden. Bei ihrer Anwendung ist meist ein bisschen weniger zu rechnen als bei anderen Methoden, aber man darf die grundsätzliche Logik nicht aus den Augen verlieren: Nachdem die Lösungen der zugehörigen Gleichung gefunden sind, müssen alle offenen Intervalle, die durch sie begrenzt werden *und* die ein-elementigen Mengen zwischen ihnen nacheinander untersucht werden, ob ihre Elemente Lösungen oder Nicht-Lösungen der gegebenen Ungleichung sind. Weiters ist zu bedenken, dass die Methode nur funktioniert, wenn beide Seiten der Ungleichung die Eigenschaft erfüllen, unter kleinen Änderungen von x ihre Werte ebenfalls nur geringfügig zu ändern.

Letzteres ist beispielsweise für **quadratische Ungleichungen** der Fall, bei denen beide Seiten von der Form $ax^2 + bx + c$ für gegebene Zahlen a , b und c sind (und ganz allgemein für Ungleichungen, deren beide Seiten Polynome⁵ sind). Wir können dann immer die rechte Seite von beiden Seiten der Ungleichung subtrahieren (d.h. „auf die linke Seite bringen“) und durch den Koeffizienten von x^2 dividieren (und das Ordnungszeichen umdrehen, falls er negativ ist), sodass eine quadratische Ungleichung immer in die äquivalente Form

$$x^2 + px + q > 0 \quad (3.2)$$

oder eine Form, in der $>$ durch $<$, \geq oder \leq ersetzt ist, gebracht werden kann⁶. Sehen wir uns als Beispiel die quadratische Ungleichung

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \quad (3.3)$$

⁵ Siehe das Skriptum *Polynome*.

⁶ Fallen durch diese Umformung die x^2 -Glieder weg, so handelt es sich in Wahrheit um eine lineare Ungleichung.

an! Wir lösen sie, indem wir zunächst die zugehörige (quadratische) Gleichung

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad (3.4)$$

lösen. Die Lösungen sind 1 und 3. Die Zahlengerade zerfällt daher in fünf Teilmengen, die entweder nur aus Lösungen oder aus Nicht-Lösungen der Ungleichung (3.3) bestehen und getrennt untersucht werden können, indem man mit je einem beliebigen Element einen Test macht:

1. Das Intervall $(-\infty, 1)$: Mit $x = 0$ reduziert sich (3.3) auf die wahre Aussage $3 \geq 0$. Nur Lösungen!
2. Die Menge $\{1\}$: Die Zahl 1 erfüllt (3.4) und daher (3.3), da das Ordnungszeichen in (3.3) ein \geq ist: $0 \geq 0$ ist eine wahre Aussage⁷. Lösung!
3. Das Intervall $(1, 3)$: Mit $x = 2$ reduziert sich (3.3) auf die falsche Aussage $-1 \geq 0$. Nur Nicht-Lösungen!
4. Die Menge $\{3\}$: Die Zahl 3 erfüllt (3.4) und daher (3.3). Lösung!
5. Das Intervall $(3, \infty)$: Mit $x = 4$ reduziert sich (3.3) auf die wahre Aussage $3 \geq 0$. Nur Lösungen!

Diese Ergebnisse setzen wir nun zusammen: Die Lösungen sind in den Intervallen $(-\infty, 1)$ und $(3, \infty)$ und in den Mengen $\{1\}$ und $\{3\}$ enthalten. Daher (in drei Schreibweisen, die alle das Gleiche aussagen, angeschrieben):

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ oder } x \geq 3\} = (-\infty, 1] \cup [3, \infty) = \mathbb{R} \setminus (1, 3). \quad (3.5)$$

Die letzte Variante drückt aus, dass die Lösungen von (3.3) alle reellen Zahlen sind, die nicht im Intervall $(1, 3)$ liegen⁸.

Ein häufig auftretender Typ ist jener der **Bruch-Ungleichungen**, in denen, wie der Name sagt, Bruchterme vorkommen. Hier müssen wir aufpassen: Ein Bruchterm erfüllt nicht unbedingt die Bedingung, dass sich sein Wert unter einer kleinen Änderung von x nur geringfügig ändert. Setzen wir beispielsweise in

$$\frac{1}{x-2} \quad (3.6)$$

einmal einen x -Wert ein, der ein bisschen kleiner als 2 ist, und dann einen, der ein bisschen größer als 2 ist, so werden sich die Ergebnisse dramatisch unterscheiden: Für $x = 1.999$ hat der Term den Wert -1000 , für $x = 2.001$ hat er den Wert 1000 . Für $x = 2$ ist er nicht definiert, und wenn x über diese Stelle springt, so ändert sich sein Vorzeichen, was natürlich bedeutsam ist, wenn ein solcher Term in einer Ungleichung vorkommt! Dieser Situation müssen wir unsere Strategie des „Ungleichungslösens mittels Gleichungslösen“ anpassen: Zusätzlich zu den Lösungen der zugehörigen Gleichung kommen nun auch die Stellen, an denen ein Nenner

⁷ Hätte die Ungleichung $x^2 - 4x + 3 > 0$ gelautet, so wäre die Zahl 1 keine Lösung, da $0 > 0$ eine falsche Aussage ist!

⁸ Für zwei Mengen A und B ist $A \setminus B$ die Menge aller Elemente von A , die *nicht* Elemente von B sind. Siehe das Skriptum *Mengen und Mengenoperationen*.

Null wird, als Grenzen zwischen Bereichen von Lösungen und Bereichen von Nicht-Lösungen der Ungleichung in Frage.

Wir führen das anhand der Bruch-Ungleichung

$$\frac{3(x-1)}{x-2} < 4 \quad (3.7)$$

vor: Die linke Seite ist an der Stelle 2 nicht definiert. Analog zum Gleichungslösen notieren wir die **Definitionsmenge** $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, die Menge aller Zahlen, für die beide Seiten der Ungleichung definiert sind. Die zugehörige Gleichung

$$\frac{3(x-1)}{x-2} = 4 \quad (3.8)$$

besitzt die gleiche Definitionsmenge, und nach Multiplikation beider Seiten mit $x-2$ (was wir dürfen, da $x-2 \neq 0$ für jedes $x \in D$) ergibt sich die Gleichung

$$3(x-1) = 4(x-2), \quad (3.9)$$

deren einzige Lösung die Zahl 5 ist. Die möglichen Grenzen zwischen Bereichen von Lösungen und Bereichen von Nicht-Lösungen der Ungleichung (3.7) sind daher die Zahlen 2 und 5, woraus sich vier⁹ Teilmengen der Zahlengeraden ergeben, die es nacheinander zu untersuchen gilt:

1. Das Intervall $(-\infty, 2)$: Mit $x = 1$ reduziert sich (3.7) auf die wahre Aussage $0 < 4$. Nur Lösungen!
2. Das Intervall $(2, 5)$: Mit $x = 3$ reduziert sich (3.7) auf die falsche Aussage $6 < 4$. Nur Nicht-Lösungen!
3. Die Menge $\{5\}$: Die Zahl 5 erfüllt (3.8) und daher nicht (3.7). Nicht-Lösung!
4. Das Intervall $(5, \infty)$: Mit $x = 6$ reduziert sich (3.3) auf die wahre Aussage $\frac{15}{4} < 4$. Nur Lösungen!

Aus diesen Ergebnissen setzen wir die Lösungsmenge zusammen:

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ oder } x > 5\} = (-\infty, 2) \cup (5, \infty) = \mathbb{R} \setminus [2, 5]. \quad (3.10)$$

Bei noch komplizierteren Ungleichungen als den bisher besprochenen kann auch die Methode, anstelle einer gegebenen Ungleichung die zugehörige Gleichung zu lösen, unangenehm aufwändig werden. In diesem Fall kann eine **grafische Methode** einen ersten Aufschluss über die Lösungsmenge und die Lösungen der zugehörigen Gleichung geben. Wir machen damit genau genommen einen Vorgriff auf das Thema Funktionen, aber er ist nicht schwer zu verstehen: Wir formen die Ungleichung zunächst so um, dass auf der rechten Seite 0 steht. In einem zweidimensionalen Diagramm mit zwei aufeinander normal stehenden Koordinatenachsen wird

⁹ Die Menge $\{2\}$ müssen wir nicht untersuchen, da ihr einziges Element nicht in D liegt und daher von vornherein nicht als Lösung in Frage kommt.

zu jedem Wert x der (als Zahlengerade aufgefassten) „horizontalen“ Achse (x -Achse) in „vertikaler“ Richtung (in y -Richtung, wie es oft heißt) der Wert der linken Seite der Ungleichung aufgetragen. Daraus ergibt sich in der Regel eine Kurve oder die Vereinigung mehrerer Kurvenstücke in der Ebene. Aus einem solchen Diagramm ist (zumindest näherungsweise) sofort ablesbar, für welche x -Werte die linke Seite der Ungleichung größer, größer-gleich, kleiner oder kleiner-gleich 0 ist (und welche x -Werte gar nicht in der Definitionsmenge liegen, weil ihnen kein Wert entspricht). Computeralgebrasysteme (wie *Mathematica* oder *GeoGebra*) sind in der Lage, solche Diagramme zu zeichnen.

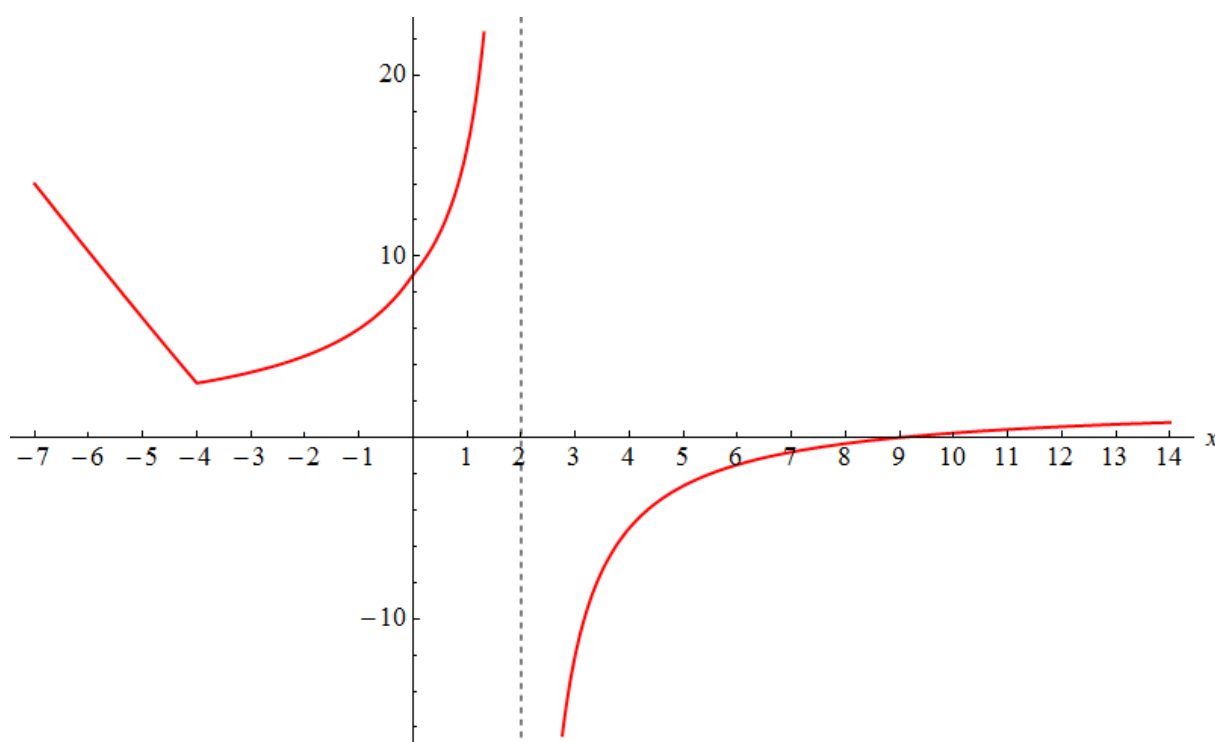


Abbildung 1: Ein Plot der Werte des Terms $x + 2|x + 4| - 1 - \frac{4 - |x| + 3x^2}{x - 2}$. Er hilft, die Lösung der zur Ungleichung (3.11) gehörenden Gleichung und damit die Lösungsmenge der Ungleichung zu finden.

Wir demonstrieren das anhand des eingangs erwähnten Ungetüms von Ungleichung (1.1). Wir schreiben sie in die Form

$$x + 2|x + 4| - 1 - \frac{4 - |x| + 3x^2}{x - 2} > 0 \quad (3.11)$$

um und erstellen einen „Plot“ des Terms, der nun auf der linken Seite steht. Er ist in Abbildung 1 wiedergegeben. Wir erkennen, dass der Wert $x = 2$ nicht zur Definitionsmenge gehört (was wegen des Nenners in (3.11) klar ist) und dass es bei (oder in der Nähe von) $x = 9$ eine Lösung der zugehörigen Gleichung gibt. Also untersuchen wir den Term in der Nähe von $x = 9$. Dort sind $x + 4$ und x positiv, sodass wir die Betragszeichen weglassen können, um die

Lösungen der zugehörigen Gleichung in der Nähe der Zahl 9 zu finden. Wir versuchen also, die modifizierte Gleichung

$$x + 2(x + 4) - 1 - \frac{4 - x + 3x^2}{x - 2} = 0 \quad (3.12)$$

zu lösen. Nach Multiplikation mit $x - 2$ stellt sich heraus, dass sie sich zu

$$2x - 18 = 0 \quad (3.13)$$

vereinfacht! Die (einzige) Lösung (der x -Wert, bei dem die Kurve in Abbildung 1 die x -Achse schneidet) ist exakt 9. Wir vertrauen dem Computertool, dass die zu (3.11) gehörende Gleichung außer 9 keine weitere Lösung besitzt, und sehen uns noch die x -Werte an, für die die Kurve oberhalb der x -Achse liegt: Es sind alle Werte kleiner als 2 und alle Werte größer als 9. Damit ergibt sich die Lösungsmenge zu (1.2) bzw. (1.3). Wer hätte gedacht, dass eine so kompliziert aussehende Ungleichung wie (1.1) mit ein bisschen Computerhilfe nicht nur näherungsweise, sondern sogar exakt zu lösen ist!

4 Fallunterscheidungen

Eine Methode, die beim Lösen von Ungleichungen oft hilft, ist die Methode der Fallunterscheidungen. Sie kann vor allem in zwei Situationen angewandt werden:

- Wenn man, um eine Ungleichung zu vereinfachen, beide Seiten mit einem Term multiplizieren will, aber dessen Vorzeichen nicht kennt (und daher nicht weiß, ob man nun das Ordnungszeichen umdrehen muss), so kann man die beiden Fälle „Term ist positiv“ und „Term ist negativ“ getrennt behandeln.
- Wenn in einer Ungleichung Betragszeichen vorkommen, so kann man eine Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen der Terme, deren Betrag gebildet wird, vornehmen und diese Fälle (in denen dann keine Betragszeichen mehr vorkommen) getrennt behandeln. Der Grund dafür¹⁰ liegt darin, dass $|a| = a$, falls $a \geq 0$ und $|a| = -a$, falls $a < 0$.

Grundsätzlich ist die Logik der Fallunterscheidungen hier die gleiche wie im Zusammenhang mit Gleichungen¹¹. Wichtig ist, dass die Gesamtheit der unterschiedenen Fälle *alle* Möglichkeiten umfasst. In der Regel werden die Fälle so gewählt, dass sie einander ausschließen.

Wir führen die Methode zuerst anhand der **Bruch-Ungleichung** (3.7) vor, die wir bereits mit einer anderen Methode gelöst haben. Also:

$$\frac{3(x - 1)}{x - 2} < 4. \quad (4.1)$$

Man würde gern mit $x - 2$ multiplizieren, aber ob das Ordnungszeichen umgedreht werden muss, hängt davon ab, ob $x - 2$ positiv oder negativ ist. Das sind unsere beiden Fälle¹²:

¹⁰ Siehe das Skriptum *Absolutbetrag*.

¹¹ Siehe das Skriptum *Betragsungleichungen und die Methode der Fallunterscheidungen*.

¹² Der Fall $x - 2 = 0$ kann nicht eintreten, da 2 nicht in der Definitionsmenge von (4.1) enthalten ist.

1. **Fall** $x - 2 > 0$, d.h. $x > 2$

In diesem Fall werden beide Seiten der Ungleichung (4.1) mit $x - 2$ multipliziert, ohne das Ordnungszeichen umzudrehen. Wir erhalten die lineare Ungleichung $3(x - 1) < 4(x - 2)$, was nach einer kleinen Umformung auf die äquivalente Ungleichung $x > 5$ führt. Unter allen reellen Zahlen x , die $x > 2$ erfüllen, sind daher all jene, die zusätzlich $x > 5$ erfüllen, Lösungen von (4.1). Das entspricht einer Teil-Lösungsmenge $L_1 = (5, \infty)$.

2. **Fall** $x - 2 < 0$, d.h. $x < 2$

In diesem Fall werden beide Seiten der Ungleichung (4.1) mit $x - 2$ multipliziert und das Ordnungszeichen umgedreht. Wir erhalten die lineare Ungleichung $3(x - 1) > 4(x - 2)$, was nach einer kleinen Umformung auf die äquivalente Ungleichung $x < 5$ führt. Unter allen reellen Zahlen x , die $x < 2$ erfüllen, sind daher all jene, die zusätzlich $x < 5$ erfüllen (was in diesem Fall alle tun), Lösungen von (4.1). Das entspricht einer Teil-Lösungsmenge $L_2 = (-\infty, 2)$.

Insgesamt ist daher die Lösungsmenge der Ungleichung (4.1) durch

$$L = L_1 \cup L_2 = (5, \infty) \cup (-\infty, 2) \stackrel{\text{schön geordnet}}{=} (-\infty, 2) \cup (5, \infty) = \mathbb{R} \setminus [2, 5] \quad (4.2)$$

gegeben, was natürlich gleich der bereits früher erhaltenen Lösung (3.10) ist.

Und nun eine Demonstration der Methode der Fallunterscheidungen anhand der **Betrags-Ungleichung**

$$|2x + 1| < x + 5. \quad (4.3)$$

Wären die Betragszeichen nicht, dann hätten wir eine lineare Ungleichung vor uns, die leicht zu lösen ist. Wir unterscheiden die beiden Fälle $2x + 1 \geq 0$ und $2x + 1 < 0$.

1. **Fall** $2x + 1 \geq 0$, d.h. $x \geq -\frac{1}{2}$

In diesem Fall ist $|2x + 1| = 2x + 1$. Die Ungleichung (4.3) vereinfacht sich zu $2x + 1 < x + 5$, was nach einer kleinen Umformung auf die äquivalente Ungleichung $x < 4$ führt. Unter allen reellen Zahlen x , die $x \geq -\frac{1}{2}$ erfüllen, sind daher all jene, die zusätzlich $x < 4$ erfüllen, Lösungen von (4.3). Das entspricht einer Teil-Lösungsmenge $L_1 = [-\frac{1}{2}, 4)$.

2. **Fall** $2x + 1 < 0$, d.h. $x < -\frac{1}{2}$

In diesem Fall ist $|2x + 1| = -2x - 1$. Die Ungleichung (4.3) vereinfacht sich zu $-2x - 1 < x + 5$, was nach einer kleinen Umformung auf die äquivalente Ungleichung $x > -2$ führt. Unter allen reellen Zahlen x , die $x < -\frac{1}{2}$ erfüllen, sind daher all jene, die zusätzlich $x > -2$ erfüllen, Lösungen von (4.3). Das entspricht einer Teil-Lösungsmenge $L_2 = (-2, -\frac{1}{2})$.

Insgesamt ist daher die Lösungsmenge der Ungleichung (4.3) durch

$$L = L_1 \cup L_2 = [-\frac{1}{2}, 4) \cup (-2, -\frac{1}{2}) \stackrel{\text{schön geordnet}}{=} (-2, -\frac{1}{2}) \cup [-\frac{1}{2}, 4) = (-2, 4) \quad (4.4)$$

gegeben.

Wir erwähnen noch, dass es manchmal nützlich ist, sich an die Bedeutung des **Betrags der Differenz zweier reeller Zahlen** als deren **Abstand auf der Zahlengeraden** zu erinnern¹³. So sollten Sie beispielsweise die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x - 6| < 2 \quad (4.5)$$

ohne großartige Berechnung als $L = (4, 8)$ erkennen, also als Menge aller reellen Zahlen, deren Abstand von der Zahl 6 kleiner als 2 ist. Auch kompliziertere Betrags-Ungleichungen wie

$$|x - 3| + |x + 3| \geq 8 \quad (4.6)$$

können mit ein bisschen Denkakrobatik auf diese Weise gelöst werden¹⁴. (4.6) besagt, dass die Summe der Abstände von x zu den Zahlen 3 und -3 nicht kleiner als 8 ist. Liegt x zwischen -3 und 3, so ist das nicht erfüllt, denn dann ist diese Summe 6. Überlegen Sie, ohne eine Rechnung aufzuschreiben, wie weit x von 3 nach rechts oder von -3 nach links wandern muss, damit (4.6) erfüllt ist! Lösung:

$$(\infty, 3] \cap [-3, -\infty) = \emptyset$$

5 Ungleichungen als Identitäten

Zum Abschluss erwähnen wir, dass Ungleichungen auch mehrere Variable enthalten können. Ist eine solche Ungleichung für alle Werte der auftretenden Variablen erfüllt, so nennen wir sie eine **Identität**. Das wichtigste Beispiel ist die für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ geltende **Dreiecksungleichung**

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad (5.1)$$

Ersetzen wir y durch $-z$, so nimmt sie die Form $|x - z| \leq |x| + |z|$ (für beliebige $x, z \in \mathbb{R}$) an und besagt, dass der Abstand zweier reeller Zahlen auf der Zahlengeraden (x und z) nie größer ist als die Summe der Abstände der beiden Zahlen vom Nullpunkt. Oder, etwas plastischer mit Hilfe zweier Städte auf einer Straße mit Kilometermarkierungen ausgedrückt: Wenn

- Person A direkt von x nach z fährt,
- Person B hingegen von x zum Nullpunkt der Kilometermarkierungen und von dort nach z ,

so ist der Weg, den Person A zurücklegt, nie länger als jener, den Person B zurücklegt.

Falls Sie wissen, was ein Vektor und sein Betrag ist und was das Skalarprodukt zweier Vektoren ist, so können wir Ihnen eine weitere Ungleichung vorstellen, die eine Identität ist. Sie lautet

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|, \quad (5.2)$$

heißt **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung** und gilt für Vektoren in beliebigen Dimensionen.

¹³ Am Ende des Skriptums *Absolutbetrag* wurden *de facto* einfache Betrags-Ungleichungen unter diesem Gesichtspunkt diskutiert (obwohl sie dort nicht so genannt wurden).

¹⁴ Eine andere Lösungsmöglichkeit wäre die Methode der Fallunterscheidungen, wobei nun drei Fälle ($x < -3$, $-3 \leq x < 3$ und $x \geq 3$) zu betrachten wären, die jeweils auf eine lineare Ungleichung führen.

6 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Lösen Sie die Ungleichung $3x+5 > 7x-3$ durch Anwendung von Äquivalenzumformungen!
Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = (-\infty, 2)$.

- Lösen Sie die Ungleichung $x^2 - 2x - 3 < 0$ mit der Methode „Ungleichungslösen mittels Gleichungslösen“!
Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = (-1, 3)$.

- Lösen Sie die Ungleichung $\frac{x-1}{x-4} > \frac{x-4}{x-1}$ mit der Methode „Ungleichungslösen mittels Gleichungslösen“!
Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = (1, \frac{7}{5}) \cup (4, \infty)$.

- Lösen Sie die Ungleichung $\frac{3(x-2)}{x-4} \geq 4$ mit der Methode der Fallunterscheidungen!
Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = (4, 10]$.

- Lösen Sie die Ungleichung $|2x-1| > 3x-2$ mit der Methode der Fallunterscheidungen!
Lösung:

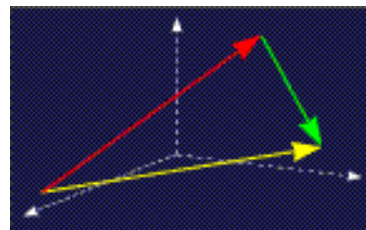
Die Lösungsmenge ist $L = (-\infty, 1)$.

- Lösen Sie die Ungleichung $|x-4| < |x-2|$ lediglich durch Ausnutzung der Bedeutung des Betrags der Differenz zweier reeller Zahlen als deren Abstand auf der Zahlengeraden, ohne eine Rechnung aufzuschreiben!
Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = (3, \infty)$.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Juli 2015 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“

(<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Was ist eine Funktion?

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

Dieses Skriptum soll anhand eines konkreten, in der Alltagswelt relevanten Beispiels einen ersten Einstieg in das Thema „Funktionen“ bieten.

1 Abhängigkeiten

Der Begriff der Funktion ist ein mathematisches Konzept, das überall dort angewandt werden kann, wo eine Größe von einer anderen Größe abhängt. Mit dem Wort „Größe“ kann vielerlei gemeint sein – wir beschränken uns hier auf den Fall, dass es sich um etwas handelt, das durch einen reellen Zahlenwert angegeben wird.

Wann immer eine Formel zur Berechnung einer solchen Größe angegeben wird, hängt eine „Funktion“ in der Luft. Betrachten wir als Beispiel den Anhalteweg beim Autofahren, d.h. die – in Meter gemessene – Strecke, die das Fahrzeug vom Zeitpunkt des Erkennens einer Situation, die ein Bremsen erfordert, bis zum Stillstand zurücklegt. Er hängt von vielen Faktoren ab und wird in jedem Fall ein bisschen anders sein. Um aber einen typischen Wert angeben zu können, wird die Faustformel

$$s = \frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10} \quad (1.1)$$

verwendet¹. Dabei steht s für den Anhalteweg (in Meter) und v für die in km/h angegebene Geschwindigkeit (zum Zeitpunkt des Erkennens eines Hindernisses). Wann immer wir im Folgenden vom „Anhalteweg“ sprechen, meinen wir den durch (1.1) angegebenen typischen Wert. (1.1) ist zunächst keine Funktion, sondern schlicht eine *Formel* zur Berechnung des Anhaltewegs.

Nun wird ein Neuling in die Kunst des Autofahrens eingeweiht. Er fragt: „Wie lang ist der Anhalteweg?“ Die Antwort, die man ihm darauf geben muss, ist: „Er hängt davon ab, wie

¹ Der lineare Term $\frac{3v}{10}$ gibt den Reaktionsweg an, der quadratische Term $\frac{v^2}{100}$ den Bremsweg.

schnell man fährt.“ Um eine solche **Abhängigkeit** in einer Formel zu kennzeichnen, ist eine eigene Schreibweise eingeführt worden. Anstelle von s schreiben wir $s(v)$:

$$s(v) = \frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10}. \quad (1.2)$$

Die Klammer um das Symbol v darf nicht mit der Klammer verwechselt werden, die der Zusammenfassung von Zahlen oder Termen dient. $s(v)$ wird kurz als „ s von v “ ausgesprochen. Das „von“ drückt die Abhängigkeit aus: s hängt „von“ v ab. Eine etwas längere Ausdrucksweise ist: „ s in Abhängigkeit von v “. Oder, wie man auch oft hört: „ s als Funktion von v “.

Man kann also nicht für den Anhalteweg „als solchen“ einen Zahlenwert angeben, sondern nur für den Anhalteweg, der sich bei einer bestimmten Geschwindigkeit ergibt. Beispielsweise: Wie lang ist der Anhalteweg bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h? Mathematisch bedeutet das: Wie groß ist $s(v)$, wenn $v = 50$ gesetzt wird? Das können wir nun leicht berechnen:

$$s(50) = \frac{50^2}{100} + \frac{3 \cdot 50}{10} = \frac{2500}{100} + \frac{150}{10} = 25 + 15 = 40. \quad (1.3)$$

Der Anhalteweg bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h beträgt 40 m. Und bei 60 km/h? Nichts leichter als das:

$$s(60) = \frac{60^2}{100} + \frac{3 \cdot 60}{10} = \frac{3600}{100} + \frac{180}{10} = 36 + 18 = 54. \quad (1.4)$$

Der Anhalteweg bei einer Geschwindigkeit von 60 km/h beträgt 54 m.

Es ist auch die umgekehrte Fragestellung möglich: Bei welcher Geschwindigkeit beträgt der Anhalteweg 180 m? Mathematisch bedeutet das: Wie muss v gewählt werden, damit $s(v) = 180$ ist? Oder, direkt mit Hilfe der Faustformel ausgedrückt: Wie muss v gewählt werden, damit

$$\frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10} = 180 \quad (1.5)$$

ist? Das gesuchte v ist also Lösung einer quadratischen Gleichung. Lösen Sie sie zur Übung selbst! Sie sollten die beiden Lösungen $v = -150$ und $v = 120$ finden. Offenbar ist es die zweite Lösung ($v = 120$), die uns interessiert, während die erste ($v = -150$) keine Bedeutung für die Fragestellung hat. Beim Gleichungslösen haben wir dieses Problem durch die Angabe einer geeignet gewählten *Grundmenge*² aus dem Weg geschafft. Ähnlich gehen wir nun hier vor und legen fest, dass uns $s(v)$ nur dann interessiert, wenn $v > 0$ ist. Wir beschränken also den Zahlenbereich, aus dem die Werte von v stammen dürfen, auf die Menge \mathbb{R}^+ aller positiven reellen Zahlen. Damit ist ein wichtiger Sichtwechsel verbunden.

2 Zuordnungen

Bisher haben wir mit der Einführung der Schreibweise $s(v)$ (s „von“ v) ausgedrückt, dass s von v abhängt und wir uns für diese Abhängigkeit interessieren. Jetzt drehen wir den Spieß um

² Siehe dazu das Skriptum *Was ist eine Gleichung?*

und gehen von v aus. Für jedes positive v (die negativen interessieren uns nicht, und auch der Fall $v = 0$ ist nicht wirklich von Interesse) gibt (1.2) den Anhalteweg an, der sich bei dieser Geschwindigkeit ergibt. Wir sagen, dass damit jedem $v > 0$ ein Wert $s(v)$ **zugeordnet** wird, oder, dass jedes $v > 0$ auf einen Wert $s(v)$ **abgebildet** wird.

Die Menge, aus der die erlaubten Werte für v kommen dürfen, ist \mathbb{R}^+ . Für jedes Element dieser Menge kann mittels (1.2) eine reelle Zahl $s(v)$ berechnet werden. Wird $v \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, so ergibt sich eine reelle Zahl $s(v) \in \mathbb{R}$. Die Vorschrift, die jeder Zahl $v \in \mathbb{R}^+$ eine Zahl $s(v) \in \mathbb{R}$ zuordnet, nennen wir eine **Funktion** (oder **Abbildung**). Dieser geben wir auch einen Namen, nämlich s . Um auszudrücken, dass s jedem Element von \mathbb{R}^+ ein Element von \mathbb{R} zuordnet, schreiben wir

$$s : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Wir nennen s (und sprechen (2.1) auch so aus) eine Funktion von der Menge \mathbb{R}^+ in die Menge \mathbb{R} . Um die konkrete Zuordnungsvorschrift auszudrücken, schreiben wir entweder (1.2) an oder benutzen die alternative Schreibweise³

$$s : v \mapsto \frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10}. \quad (2.2)$$

Beachten Sie, dass die Pfeile in (2.1) und (2.2) ein bisschen unterschiedlich aussehen. Der erste drückt aus, von welcher Menge in welche Menge eine Funktion wirkt, und der zweite (ausgesprochen als „wird abgebildet auf“ oder auch „geht über in“) gibt diese Wirkung an.

Eine vollständige, ordentlich angeschriebene Definition unserer Funktion s sieht also entweder so

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10} \end{aligned} \quad (2.3)$$

(bzw., wenn Sie wollen, mit einem vorangestellten „ $s :$ “ wie in (2.2)) oder so

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ s(v) &= \frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10} \end{aligned} \quad (2.4)$$

aus. Um den Anhalteweg bei einer Geschwindigkeit von 50 m anzugeben, machen wir die in (1.3) ausgeführte Rechnung und schreiben

$$s(50) = 40 \quad (2.5)$$

oder

$$s : 50 \mapsto 40. \quad (2.6)$$

Beachten Sie, dass der **Name** unserer Funktion schlicht und einfach s ist. $s(50)$ wird „**Funktionswert** an der Stelle 50“ genannt. Der Ausdruck $s(v)$ steht für einen „allgemeinen“ Funktionswert.

³ Diese Form ist besonders günstig, wenn man einer Funktion, von der klar ist, von welcher Menge in welche Menge sie abbildet, keinen Namen geben, aber dennoch ihre Wirkung beschreiben will. Man würde in unserem Fall dann einfach $v \mapsto \frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10}$ schreiben.

Anmerkung: Dass s der Name einer Funktion, also eines doch recht ausgefeilten mathematischen Objekts ist, kommt nun ein bisschen in Konflikt damit, dass wir in (1.1) mit s einfach den Anhalteweg bezeichnet haben:

- Aus mathematischer Sicht bezeichnet s die Funktion, d.h. die Zuordnungsvorschrift, und $s(v)$ einen Funktionswert. Aus dieser Perspektive sind s und $s(v)$ zwei ganz verschiedene Dinge.
- Aus praktischer (technischer, physikalischer,...) Sicht bezeichnet s den Anhalteweg, und mit $s(v)$ ist nur ausgedrückt, dass er von v abhängt. Das wird manchmal auch in der Form $s \equiv s(v)$ („ s hängt ab von v “ oder „ s ist eine Funktion von v “) angeschrieben. Aus dieser Perspektive besteht zwischen s und $s(v)$ kein nennenswerter Unterschied, außer dass die zweite Form etwas mehr Information beinhaltet.

An diese Zweideutigkeit müssen Sie sich gewöhnen! Es hätte nicht viel Sinn, noch einen weiteren Buchstaben einzuführen, um diese Diskrepanz auszuglätten. Versuchen Sie einfach, beide Sichtweisen zu verstehen und selbst einnehmen zu können!

Während s der Name unserer Funktion ist, den wir jederzeit benutzen können, ist die Verwendung des Buchstabens v in (1.2), (2.2), (2.3) oder (2.4) nicht verpflichtend, da es dort nur um die konkrete Art der Zuordnung geht. Wir könnten stattdessen genauso gut

$$s(x) = \frac{x^2}{100} + \frac{3x}{10} \quad (2.7)$$

oder

$$s(\star) = \frac{\star^2}{100} + \frac{3\star}{10} \quad (2.8)$$

oder

$$s : \xi \mapsto \frac{\xi^2}{100} + \frac{3\xi}{10} \quad (2.9)$$

schreiben. Die Funktion s wäre dieselbe. Die Verwendung des Buchstabens x ist, wie bei den Gleichungen, auch bei Funktionen weithin üblich. Wenn wir ein Wort für diese Art Größe benötigen (etwa um über eine Berechnung zu sprechen), so können wir sie „unabhängige Variable“ nennen, da sie, solange sie Element von \mathbb{R}^+ ist, frei vorgegeben werden kann. Die Kurzbezeichnung dafür ist schlicht und einfach „Variable“.

Funktionen werden auch **Abbildungen** oder (**eindeutige**) **Zuordnungen** genannt. Der Zusatz „eindeutig“ drückt aus, dass jedem $v \in \mathbb{R}^+$ *genau ein* Element $s(v) \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird: Ist v vorgegeben, so ist $s(v)$ eindeutig bestimmt.

3 Und wozu das Ganze?

Das ist eine berechtigte Frage! Zählen wir anhand unseres Beispiels (Anhalteweg als Funktion der Geschwindigkeit) einige Vorteile auf, die man davon hat, die Angelegenheit als „Funktion von einer Menge in eine andere“ aufzufassen:

- Die durch (2.3) oder (2.4) definierte Funktion s ist eine mathematisch präzise Formulierung des Zusammenhangs zwischen Anhalteweg und Geschwindigkeit⁴. Die Begriffe „Formel“ und „Term“ sind hingegen etwas unscharf. Ist beispielsweise der Term, der s in (1.1) definiert, der gleiche Term wie $\frac{1}{100} v(v + 30)$? Zumindest sind die zwei Terme äquivalent, da sie für jedes v den gleichen Zahlenwert ergeben. Aber sind sie wirklich *gleich*? Um diese Frage beantworten zu können, ist viel zu wenig klar, was ein „Term“ eigentlich ist. Wird s hingegen als Funktion angesehen, die jeder Geschwindigkeit $v > 0$ einen Anhalteweg $s(v)$ zuordnet, so ist das ein viel präziseres Konzept. Eine Funktion u , die die gleiche Wirkung hat wie s , d.h. die die gleiche Zuordnungsvorschrift darstellt, ist tatsächlich im besten mathematischen Sinn das Gleiche wie s , egal welchen Term (oder welche andere Methode, wie zum Beispiel eine Beschreibung in Worten) wir benutzen, um sie zu definieren. In diesem Fall können wir mit gutem Gewissen $u = s$ schreiben.
- Die Funktionsschreibweise ist sehr knapp und drückt viel aus. Man kann sich vornehmen, $s(50)$ zu berechnen, man kann das Ergebnis $s(50) = 40$ notieren oder sich fragen, wie v zu wählen ist, damit $s(v) = 180$ gilt. Alles in wenigen Symbolen ausgedrückt! (Das verkürzt nicht die Arbeit, die quadratische Gleichung $s(v) = 180$ zu lösen, aber immerhin erlaubt es uns, die *Frage* in sehr komprimierter Form zu stellen.)
- Die konkrete Art der Abhängigkeit des Anhaltewegs von der Geschwindigkeit kann in systematischer Weise (mit Mitteln, die die Mathematik bereitstellt und die Sie bereits kennen oder noch kennenlernen werden) untersucht und diskutiert werden. Beispielsweise nennen wir die Funktion s *streng monoton wachsend*, da eine Vergrößerung von v auch eine Vergrößerung von $s(v)$ zur Folge hat. Wir nennen sie *injektiv*, weil zwei verschiedene Geschwindigkeiten nicht den gleichen Anhalteweg ergeben können (woraus folgt, dass die Gleichung $s(v) = 180$ über \mathbb{R}^+ genau eine Lösung besitzt).
- Auch kompliziertere Fragen können in knapper Form gestellt werden: Um welchen Faktor erhöht sich der Anhalteweg, wenn die Geschwindigkeit verdoppelt wird? Er hängt von der Geschwindigkeit v ab, die verdoppelt werden soll, und beträgt $\frac{s(2v)}{s(v)}$. Dieser Ausdruck definiert selbst eine Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(v) &= \frac{s(2v)}{s(v)}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

⁴ Mit der Aussage, dass die durch (2.3) oder (2.4) definierte Funktion s eine mathematisch präzise Formulierung des Zusammenhangs zwischen Anhalteweg und Geschwindigkeit ist, ist nicht gemeint, dass die in einer *realen* Situation gemessenen Werte von Anhalteweg und Geschwindigkeit exakt in der durch die Funktion s angegebenen Beziehung stehen. Bei der Funktion s handelt es sich um ein *mathematisches Modell*, das natürlich nur eine Annäherung an die Wirklichkeit darstellt. Die obige Aussage drückt aus, dass s *als Modell* präzise formuliert ist.

Interessanterweise ist sie *nach oben beschränkt*: Ihr Funktionwert ist für alle v kleiner als 4. (Durch eine Verdopplung der Geschwindigkeit wird der Anhalteweg also nie viermal so lang oder länger.) Die Begründung kann mit Hilfe der Funktionsschreibweise übersichtlich gestaltet werden und erfordert nur ein bisschen Termrechnung mit Brüchen:

$$\begin{aligned}
 f(v) &= \frac{s(2v)}{s(v)} = \frac{\frac{(2v)^2}{100} + \frac{3 \cdot 2v}{10}}{\frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10}} = \frac{4v + 60}{v + 30} = \frac{4v + 120 - 60}{v + 30} = \\
 &= \frac{4(v + 30) - 60}{v + 30} = 4 - \underbrace{\frac{60}{v + 30}}_{> 0}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Am Beginn dieser Umformung wurde „ $f(v) =$ “ geschrieben, um klar auszudrücken, was im Folgenden berechnet wird. Als Ergebnis können wir notieren

$$f(v) < 4 \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^+. \tag{3.3}$$

- Wir können die Zuordnung s in einem Schaubild (dem *Graphen*), dem wir viel ansehen, darstellen (Abbildung 1).

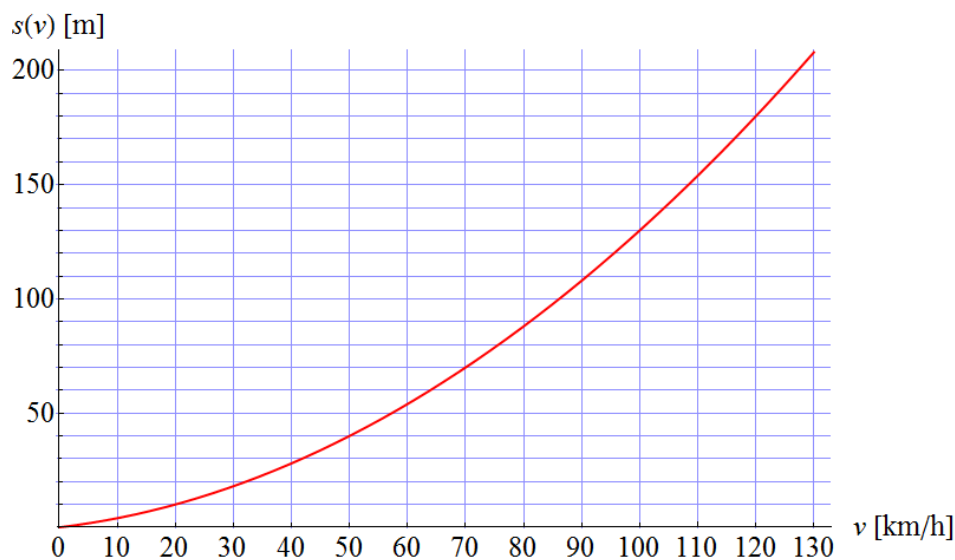


Abbildung 1: Graph der hier diskutierten Funktion s . (Genauer gesagt handelt es sich um einen Ausschnitt, da der gesamte Graph – mathematisch gesehen – bis ins Unendliche reicht.)

- Falls für einen konkreten Zweck benötigt, können wir eine Tabelle (*Wertetabelle*) für ausgewählte Werte der Geschwindigkeit, etwa von 10 bis 130 in Zehnerschritten, und die zugehörigen Funktionswerte erstellen. Die Beschriftung der ersten Zeile einer solchen

Tabelle illustriert noch einmal, was wir unter $s(v)$ verstehen:

v [km/h]	$s(v)$ [m]
10	4
20	10
30	18
40	28
50	40
60	45
70	70
80	88
90	108
100	130
110	154
120	180
130	208
140	238
150	270

(3.4)

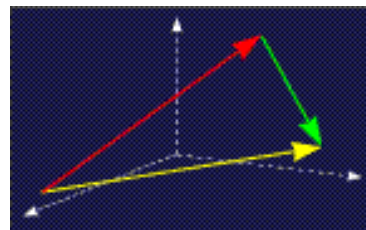
Man erkennt, wie stark der Anhalteweg bei größeren Geschwindigkeiten mit jeder weiteren Vergrößerung von v ansteigt.

- Praktisch unverzichtbar wird der Funktionsbegriff, wenn es ums Differenzieren und Integrieren geht, in unserem Beispiel etwa um die Frage, wie sich der Anhalteweg ändert, wenn v ein klein wenig vergrößert wird.

Funktionen stellen in gewisser Weise die Basis der modernen Mathematik dar. Kein Teilgebiet der Mathematik und kaum ein Anwendungsbereich kommt ohne sie aus.

Überzeugt?

Dieses Skriptum wurde erstellt im Juni 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2021 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Rede- und Schreibweisen über Funktionen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

Dieses Skriptum stellt einige im Zusammenhang mit Funktionen wichtige Begriffe und ihre korrekte Verwendung vor.

1 Definition von Funktionen

Um eine **Funktion** (**Abbildung**) zu definieren, benötigen wir zwei Mengen A und B sowie eine Vorschrift f , die jedem Element von A ein Element von B zuordnet. Wir schreiben dann

$$f : A \rightarrow B \quad (1.1)$$

und müssen dazu die konkrete Zuordnungsvorschrift, d.h. die Festlegung, wie f auf Elemente von A „wirkt“, angeben. Für jedes $x \in A$ bezeichnen wir mit $f(x)$ jenes Element von B , auf das x abgebildet wird.

Hier ein konkretes Beispiel: Es sei $A = \mathbb{R}^*$ (d.h. die Menge der von 0 verschiedenen reellen Zahlen) und $B = \mathbb{R}$ (d.h. die Menge aller reellen Zahlen). Nun definieren wir eine Funktion

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.2)$$

durch die Zuordnungsvorschrift

$$f(x) = \frac{3x - 1}{x} \quad (1.3)$$

bzw. in einer anderen Schreibweise

$$x \mapsto \frac{3x - 1}{x} \quad \text{oder} \quad f : x \mapsto \frac{3x - 1}{x}. \quad (1.4)$$

Eine dritte Möglichkeit, dieselbe Zuordnungsvorschrift festzulegen, wäre die folgende „Wortformel“:

„Man wähle eine von 0 verschiedene reelle Zahl, multipliziere sie mit 3, subtrahiere 1 und dividiere das Ergebnis durch ebenjene gewählte Zahl.“

Sie sehen, es kommt nicht auf die Art und Weise an, wie die Zuordnungsvorschrift beschrieben wird – wichtig ist nur, dass sie für jedes $x \in \mathbb{R}^*$ eindeutig ein $f(x) \in \mathbb{R}$ festlegt.

2 Sprachregelungen

Anhand der durch (1.2) und (1.3) bzw. (1.4) definierten Funktion f stellen wir nun einige Bezeichnungen und Sprechweisen vor, die Sie kennen (und nicht miteinander verwechseln) sollten:

- f ist der **Name** der Funktion¹.
- Die Menge \mathbb{R}^* in der Rolle, die sie in (1.2) spielt, heißt **Definitionsmenge** (oder **Definitionsbereich**) der Funktion f .
- Die Menge \mathbb{R} in der Rolle, die sie in (1.2) spielt, heißt **Zielmenge** der Funktion f .
- Der Platzhalter x in (1.3) und (1.4) wird **Variable**² oder **Argument** genannt, ein konkreter Wert von x heißt **Stelle**, manchmal auch **Punkt**³.
- $f(x)$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}^*$ der zugehörige **Funktionswert**. Wie nennen ihn auch **Funktionswert an der Stelle** x . Bitte verwechseln Sie nicht $f(x)$ mit f !
- Der in (1.3) und (1.4) auftretende Term $\frac{3x-1}{x}$ heißt **Funktionsterm**. Aber Achtung: Er ist nicht eindeutig. Wird er durch den äquivalenten Term $3 - \frac{1}{x}$ ersetzt, so ergibt sich dieselbe Funktion!
- (1.3) heißt **Funktionsgleichung**. Auch sie ist nicht eindeutig! Wird (1.3) durch $f(x) = 3 - \frac{1}{x}$ ersetzt, so ergibt sich dieselbe Funktion!
- Für die konkrete Wirkungsweise der Funktion f gibt es viele sprachliche Ausdrucksformen, unter anderem:
 - f wirkt auf x in der durch (1.3) bzw. (1.4) angegebenen Weise.
 - f ordnet jedem x ein $f(x)$ zu.
 - f auf x angewandt ergibt $f(x)$.
 - x wird durch f (oder von f) auf $f(x)$ abgebildet.
- Die Menge aller Elemente von \mathbb{R} , die „von f getroffen werden“, d.h. die Funktionswert eines Elements von \mathbb{R}^* sind, heißt **Bildmenge** (kurz **Bild**) oder **Wertemenge**⁴ (**Wertebereich**) der Funktion f . Sie wird – in unserem Beispiel – kurz mit $f(\mathbb{R}^*)$ bezeichnet. Konkret ist $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, d.h. die Menge aller reellen Zahlen, die ungleich 3 sind⁵.

¹ Nicht $f(x)$, auch wenn Sie das vielleicht gelernt haben! Wenn man über eine Funktion spricht, sollte man also genau genommen sagen „Die Funktion f ...“, nicht „Die Funktion $f(x)$...“, wie das vielfach üblich ist. Anstelle von „Die Funktion $f(x) = \frac{3x-1}{x}$...“ könnte man etwa sagen „Die durch $f(x) = \frac{3x-1}{x}$ definierte Funktion f ...“. Man muss nicht päpstlicher als der Papst sein, aber man sollte zumindest wissen, was f und was $f(x)$ bedeutet.

² Manchmal auch „unabhängige Variable“, da x innerhalb der Definitionsmenge frei gewählt werden kann.

³ Die Bezeichnung „Punkt“ rührt von der Identifizierung reeller Zahlen mit Punkten auf der Zahlengeraden her. Mit ihr sollte man aber vorsichtig umgehen, da „Punkt“ im Zusammenhang mit Funktionen auch etwas anderes bedeutet, nämlich ein Paar $(x, f(x))$, interpretiert als Punkt in der Zeichenebene.

⁴ Achtung: In manchen mathematischen Texten wird der Begriff „Wertemenge“ in der Bedeutung von „Zielmenge“ verwendet. Bei der Bezeichnung „Bildmenge“ besteht diese Verwechslungsgefahr nicht.

⁵ Was nichts anderes bedeutet, als dass die Gleichung $f(x) = c$ für $c \neq 3$ zumindest eine Lösung in \mathbb{R}^* besitzt, für $c = 3$ aber keine.

- f ist eine **reelle Funktion**, da sie von einer Teilmenge von \mathbb{R} (nämlich \mathbb{R}^*) in eine Teilmenge von \mathbb{R} (nämlich \mathbb{R} selbst) abbildet. Fast alle Funktionen, die im Stoff des Mathematikunterrichts vorkommen, sind reelle Funktionen.

In fast allen bisher besprochenen Varianten, eine Funktion anzugeben, wurde ihr Name (in unserem Beispiel f) mit angeschrieben. Lediglich die Schreibweise

$$x \mapsto \frac{3x-1}{x} \quad (2.1)$$

(ausgesprochen als „ x wird abgebildet auf $\frac{3x-1}{x}$ “) erlaubt es, eine Funktion nur durch einen Funktionsterm, also gewissermaßen „namenlos“ anzugeben. Dies wird in Technik und Naturwissenschaft häufig zu „die Funktion $\frac{3x-1}{x}$ “ verkürzt. Genau genommen ist das nicht korrekt, da $\frac{3x-1}{x}$ einen Funktionsterm bezeichnet, nicht die Funktion als solche. Es handelt sich also nicht um eine „offizielle“ Sprachregelung, sondern um einen etwas laxen Sprachgebrauch.

3 Variablenbezeichnung

Während unsere Funktion den Namen f hat, bei dem wir bleiben, solange wir es mit ihr zu tun haben, ist das Symbol, das für die Variable verwendet wird, beliebig und kann von einer Berechnung zur nächsten geändert werden! Anstelle von (1.3) könnte man genauso gut

$$f(u) = \frac{3u-1}{u}, \quad (3.1)$$

und anstelle von (1.4) könnte man

$$z \mapsto \frac{3z-1}{z} \quad \text{oder} \quad f: \beta \mapsto \frac{3\beta-1}{\beta} \quad (3.2)$$

schreiben. Um dann etwa herauszufinden, an welcher Stelle der Funktionswert gleich -1 ist, kann man die Gleichung, die diese Frage darstellt, mit dem Variablennamen w in der Form $f(w) = -1$, also

$$\frac{3w-1}{w} = -1 \quad (3.3)$$

anschreiben und lösen. (Lösen Sie sie zur Übung! Die einzige Lösung ist $\frac{1}{4}$.) Mit einem Wort: Man muss sich nicht auf eine fixe Bezeichnung für die Variable festlegen.

Manchmal kommt in Berechnungen ein Variablenwert vor, den man sich als fix festgehalten vorstellt (obwohl er nicht konkret angegeben ist), und gleichzeitig die Variable in ihrer Rolle, beliebige Werte im Definitionsbereich annehmen zu können. In diesen Fällen wird ersterer oft mit einem Index wie $_0$ oder $_1$ gekennzeichnet. So kann beispielsweise gefragt werden, wie sich der Funktionswert an einer „variablen“ Stelle x vom Funktionswert an einer „festgehaltenen“ Stelle x_0 unterscheidet. Die Differenz der beiden Funktionswerte ist dann durch

$$f(x) - f(x_0) = \frac{3x-1}{x} - \frac{3x_0-1}{x_0} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} \quad (3.4)$$

gegeben. (Überprüfen Sie zur Übung diese Rechnung!) Sie kann dann etwa zum Anlass genommen werden, um für jedes festgehaltene $x_0 \in \mathbb{R}^*$ eine neue Funktion

$$g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = f(x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} \quad (3.5)$$

zu definieren. Beachten Sie die unterschiedlichen Rollen, die die Symbole x und x_0 in (3.5) spielen!

Im Zusammenhang mit „variablen“ und „festgehaltenen“ Größen erwähnen wir noch die in Technik und Naturwissenschaft verbreitete Angewohnheit, die Funktionsschreibweise vom Typ „ $f(x)$ “ zur Kennzeichnung unterschiedlichster Abhängigkeiten zu verwenden. Wir nehmen als Beispiel das Ohmsche Gesetz für Gleichstrom, das in der Form

$$I = \frac{U}{R} \quad (3.6)$$

geschrieben werden kann. Es besagt: Wird an einen Leiter mit Widerstand R eine elektrische Spannung U angelegt, so fließt durch diesen ein elektrischer Strom mit Stromstärke I , wobei R , U und I die Beziehung (3.6) erfüllen. Daher gibt es zwei Möglichkeiten, die Stromstärke I in Abhängigkeit von einer der beiden anderen Größen bei festgehaltenem Wert der anderen aufzufassen:

- Wird in einer Versuchsanordnung mit bekanntem, gleichbleibendem Widerstand R die Spannung U variiert, so hängt die Stromstärke von U ab. Das wird oft in der Form

$$I(U) = \frac{U}{R} \quad (3.7)$$

angeschrieben. Um lediglich anzugeben, dass I in dieser Situation von U abhängt, wird $I = I(U)$ geschrieben.

- Wird hingegen die angelegte Spannung U auf einen fixen Wert geregelt und der Widerstand R variiert, so hängt die Stromstärke von R ab. Das wird dann oft in der Form

$$I(R) = \frac{U}{R} \quad (3.8)$$

angeschrieben. Um lediglich anzugeben, dass I in dieser Situation von R abhängt, wird $I = I(R)$ geschrieben.

Mit diesen Kennzeichnungen wird ausgedrückt, welche Abhängigkeit gerade von Interesse ist, also was als festgehalten und was als variabel betrachtet wird. Aber Achtung: Das Symbol I stellt in (3.7) und (3.8) zwei *unterschiedliche* Funktionen dar⁶! (3.7) drückt eine Proportionalität aus, (3.8) eine umgekehrte Proportionalität.

⁶ Genau genommen stellt (3.7) nicht *eine* Funktion dar, sondern für jeden vorgegebenen Wert von R (der natürlich $\neq 0$ sein muss) eine, und auch (3.8) stellt nicht *eine* Funktion dar, sondern für jeden vorgegebenen Wert von U eine!

4 Beispiel mit endlichen Mengen

Um einige der zuvor vorgestellten Begriffe zu illustrieren, betrachten wir als Beispiel eine Funktion, bei der die Definitionsmenge A und die Zielmenge B endliche Mengen sind, d.h. nur endlich viele Elemente haben.

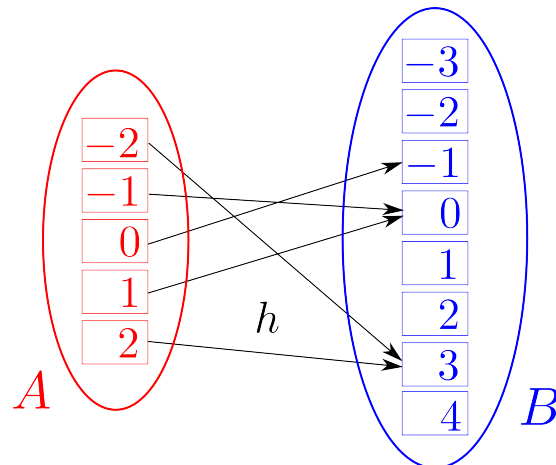


Abbildung 1: Beispiel einer Funktion $h : A \rightarrow B$, wobei A und B endliche Mengen sind. Jedem Element von A wird ein Element von B zugeordnet.

Abbildung 1 zeigt die Mengen $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ und $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ sowie die Wirkung einer Funktion $h : A \rightarrow B$. Letztere kann, da die Menge A endlich ist, durch eine Aufzählung aller Funktionswerte definiert werden:

$$h(-2) = 3 \quad (4.1)$$

$$h(-1) = 0 \quad (4.2)$$

$$h(0) = -1 \quad (4.3)$$

$$h(1) = 0 \quad (4.4)$$

$$h(2) = 3 \quad (4.5)$$

(4.1) könnten wir auch genauso gut in der Form

$$h : -2 \mapsto 3 \quad (4.6)$$

anschreiben, (4.2) in der Form

$$h : -1 \mapsto 0, \quad (4.7)$$

usw.

Wie aus der Abbildung hervorgeht, wird *jedem* Element von A ein Element von B zugeordnet. Es wird aber nicht jedes Element von B „getroffen“. Die Bildmenge ist $h(A) = \{-1, 0, 3\}$. Zwei Elemente von B (nämlich 0 und 3) werden jeweils zweimal „getroffen“, das Element -1 nur einmal, alle anderen Elemente gar nicht. Anstelle der Darstellung in Abbildung 1 oder der Aufzählung (4.1) – (4.5) kann die Funktion h auch durch eine Funktionsgleichung definiert werden:

$$h(n) = n^2 - 1 \quad (4.8)$$

(rechnen Sie nach!), wobei wir die Variable hier mit n bezeichnet haben. (Wir hätten aber auch jeden anderen Buchstaben verwenden können.) Der Funktionsterm ist $n^2 - 1$.

Auch in diesem einfachen Fall können wir von Gleichungen sprechen, wenn Funktionswerte vorgegeben werden:

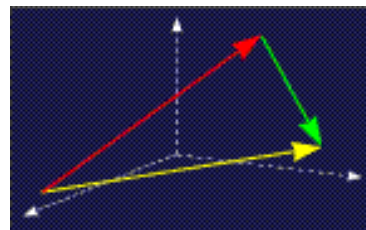
- Die Gleichung $h(n) = 3$ besitzt zwei Lösungen (nämlich -2 und 2),
- die Gleichung $h(n) = -1$ besitzt nur eine Lösung (nämlich 0),
- und die Gleichung $h(n) = 2$ besitzt überhaupt keine Lösung.

Auch einige andere Begriffe, die im Zusammenhang mit Funktionen eine wichtige Rolle spielen, können anhand dieses einfachen Beispiels verdeutlicht werden:

- Da $h(-1) = 0$ und $h(1) = 0$ gilt, werden -1 und 1 **Nullstellen** der Funktion h genannt.
- Der größte angenommene Funktionswert ist 3 . Er wird an den Stellen -2 und 2 angenommen. Diese beiden Stellen heißen daher **Maximumstellen** von h .
- Der kleinste angenommene Funktionswert ist -1 . Er wird an der Stelle 0 angenommen. Die Stelle 0 heißt daher **Minimumstelle** von h .

Alle diese Begriffe werden mit entsprechend übertragenen Bedeutungen ganz allgemein für reelle Funktionen verwendet, insbesondere auch für solche, bei denen A und B keine endlichen Mengen sind.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Juni 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Funktionsdarstellungen: Term, Graph, Tabelle

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

Dieses Skriptum behandelt die drei wichtigsten Methoden, reelle Funktionen zu definieren bzw. so darzustellen, dass wesentliche Eigenschaften leicht erkannt werden können: durch einen Term, einen Graphen und eine Tabelle.

1 Was ist eine Funktionsdarstellung?

Eine reelle Funktion

$$f : A \rightarrow B \quad (1.1)$$

ordnet jedem Element einer Menge A (Definitions-*m*enge) ein Element einer Menge B (Ziel-*m*enge) zu, wobei A und B Teilmengen der Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen sind. Dabei

- sind die am häufigsten benötigten Fälle, dass A entweder ganz \mathbb{R} oder ein Intervall¹ ist oder eine Menge, die entsteht, indem aus \mathbb{R} einzelne Elemente herausgenommen werden. Wichtig ist, dass die Menge A so gewählt ist, dass die Zuordnungsvorschrift für *alle* ihre Elemente anwendbar ist (so darf etwa keine Division durch 0 auftreten oder keine Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen werden). Für manche Zwecke (und zur Veranschaulichung der im Zusammenhang mit Funktionen verwendeten Begriffe) wird A bisweilen als endliche Menge (d.h. als Menge mit nur endlich vielen Elementen) gewählt. Um die Eintragungen einer unendlichen Liste durchzunummerieren, wird $A = \mathbb{N}$ oder $A = \mathbb{N}^*$ benötigt.
- Die Wahl von B hingegen ist weniger kritisch: Diese Menge dient als „Vorrat“ möglicher Funktionswerte. Da jeder Funktionswert einer reellen Funktion reell ist, kann man immer $B = \mathbb{R}$ setzen, auch wenn nicht alle reellen Zahlen als Funktionswerte auftreten (bzw. wenn man nicht von vornherein weiß, welche Funktionswerte auftreten).

Wir werden in diesem Skriptum daher in den meisten Fällen Funktionen $A \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten. (Nur in einem einzigen Beispiel werden wir B als echte Teilmenge von \mathbb{R} wählen.)

¹ Zum Begriff des Intervalls siehe das Skriptum *Die Ordnung der reellen Zahlen*.

Eine reelle Funktion **darzustellen**, kann nun zweierlei bedeuten:

- Informationen anzugeben, die sie eindeutig festlegen. Das tun wir, neben der Angabe von Definitions- und Zielmenge, in der Regel mit Hilfe einer Funktionsgleichung, die die betreffende Funktion durch einen Funktionsterm definiert.
- Informationen anzugeben, die wesentliche Eigenschaften der Funktion in einer für uns leicht verständlichen Weise anzeigen. Neben der Darstellung einer Funktion mit Hilfe eines Terms tun wir das vor allem, indem wir Graphen zeichnen und Tabellen anlegen.

Zu einem guten Verständnis des Funktionsbegriffs gehört es, die in solchen Darstellungen enthaltenen Informationen aufeinander beziehen zu können.

2 Funktionsgleichung und Funktionsterm

Eine **Funktionsgleichung** ist die Angabe der Funktionswerte $f(x)$ für alle $x \in A$ mit Hilfe eines Terms (des **Funktionsterms**). Ein Beispiel ist

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= x^2 + \frac{1}{x}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Hier ist also $A = \mathbb{R}^*$ gewählt² (die Menge der von 0 verschiedenen reellen Zahlen).

Anmerkung zur Angabe der Definitionsmenge: Wenn man *weiß*, dass zu einer ordentlichen Funktionsdefinition die Angabe einer Definitionsmenge gehört, kann man es sich erlauben, manchmal etwas nachlässig zu sein. Ist eine Funktion (etwa in einer Übungsaufgabe) nur über ihren Funktionsterm definiert, ohne dass eine Definitionsmenge angegeben ist, so ist in der Regel damit gemeint, dass die Definitionsmenge A die größtmögliche Teilmenge von \mathbb{R} ist, für die der Funktionsterm definiert ist. Wenn Sie also etwa irgendwo die Angabe

$$g(x) = x^2 - 3\sqrt{x} \quad (2.2)$$

sehen, ohne dass eine Definitionsmenge dabei steht, so können Sie annehmen, dass $A = \mathbb{R}_0^+$, also die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen, gemeint ist (denn für negative x wäre \sqrt{x} nicht definiert). Im Fall von

$$h(x) = \frac{4x^2 - 2x + 7}{(x-1)(x-2)} \quad (2.3)$$

² Es ist dies die größtmögliche Wahl einer Definitionsmenge, die zum angegebenen Term passt. Die Wahl $A = \mathbb{R}$ wäre nicht möglich gewesen, da der Funktionsterm $x^2 + \frac{1}{x}$ für $x = 0$ nicht definiert ist (Division durch Null!). Die Definitionsmenge kleiner zu wählen (d.h. als echte Teilmenge von \mathbb{R}^*) ist hingegen jederzeit möglich. Falls etwa die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$ irgendeinen (sagen wir physikalischen) Sachverhalt modelliert, in dem x nur positive Werte annehmen kann, so wird man $A = \mathbb{R}^+$ (Menge aller positiven reellen Zahlen) festlegen. Die Wahl von A hängt immer auch davon ab, welchen Sachverhalt eine Funktion darstellt bzw. was man mit ihr machen möchte. Die einzige (unverzichtbare) Bedingung ist, dass $f(x)$ für alle $x \in A$ definiert ist.

wäre $A = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ gemeint (denn für $x = 1$ und $x = 2$ wäre durch 0 zu dividieren), und im Fall von

$$j(x) = 3x^2 - 2x + 5 \quad (2.4)$$

wäre $A = \mathbb{R}$ gemeint, da dieser Term (als Polynom) für alle reellen x definiert ist.

Ausgerüstet mit einem Funktionsterm können wir Funktionswerte durch Einsetzen berechnen. Beispiele für Funktionswerte der in (2.1) definierten Funktion f :

$$f(3) = 3^2 + \frac{1}{3} = 9 + \frac{1}{3} = \frac{28}{3} \approx 9.33 \quad (2.5)$$

$$f(-2) = (-2)^2 + \frac{1}{-2} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 3.5 \quad (2.6)$$

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2.71. \quad (2.7)$$

3 Abschnittsweise termdefinierte Funktionen

Manche Funktionen können nur durch die Angabe *mehrerer* Terme für unterschiedliche Variablenbereiche charakterisiert werden. Stellen wir uns etwa vor, wir wollen den zeitlichen Verlauf einer elektrischen Spannung modellieren, die zunächst eine Zeitlang konstant ist, nach einer bestimmten Zeit abrupt auf 0 absinkt und danach linear ansteigt. Ist U die (in Volt gemessene) elektrische Spannung und t die (in Sekunden gemessene) Zeit, so setzen wir als Modell die Funktion

$$U: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \leq t < 2 \\ t - 2 & \text{wenn } t \geq 2 \end{cases} \quad (3.1)$$

an. Die Spannung hat ab dem Anfangszeitpunkt $t = 0$ zunächst den konstanten Wert 1, d.h. ihr Verlauf wird durch den Term $U(t) = 1$ beschrieben. Ab dem Zeitpunkt $t = 2$ (d.h. 2 Sekunden nach dem Beginn) wird sie durch den linearen Term $U(t) = t - 2$ modelliert, der ein Ansteigen beschreibt (weil $t - 2$ umso größer ist, je größer t ist). Wie durch die Schreibweise in (3.1) ausgedrückt, ist je nach dem betrachteten Bereich von t ein anderer Term zu verwenden (daher der Name „abschnittsweise termdefinierte Funktion“, manchmal auch „stückweise termdefinierte Funktion“ genannt). Um also einen Funktionswert $U(t)$ zu ermitteln, muss zuerst geprüft werden, ob $0 \leq t < 2$ oder $t \geq 2$ gilt, und wenn das entschieden ist, muss der entsprechende Term benutzt werden. So berechnen wir beispielsweise

$$U(0.5) = 1 \quad (3.2)$$

$$U(3.5) = 3.5 - 2 = 1.5. \quad (3.3)$$

Um $U(0.5)$ zu berechnen, mussten wir den ersten Term $U(t) = 1$ verwenden, da $0 \leq 0.5 < 2$ gilt, und um $U(3.5)$ zu berechnen, mussten wir den zweiten Term $U(t) = t - 2$ verwenden,

da $3.5 \geq 2$ gilt. Ein besonderer Fall ist die Stelle $t = 2$. Hier ist der zweite Term zu verwenden (da $2 \leq 2$ gilt), daher ist

$$U(2) = 2 - 2 = 0. \quad (3.4)$$

Gehen wir zu einem nur minimal früheren Zeitpunkt über, etwa $t = 1.999$, so ist

$$U(1.999) = 1. \quad (3.5)$$

Der Funktionswert von U fällt daher zum Zeitpunkt 2 tatsächlich abrupt auf 0 ab (er macht einen „Sprung“). Die Stelle $t = 2$ heißt daher *Sprungstelle* (oder *Unstetigkeitsstelle*), und eine Funktion, die eine Sprungstelle besitzt, nennen wir eine *unstetige Funktion*³.

4 Funktionsgraph

Manchmal möchte man sich mit einem Blick über bestimmte Eigenschaften einer Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ orientieren und Fragen beantworten wie: Sind alle Funktionswerte positiv? Gibt es Nullstellen (d.h. Werte der Variablen, an denen der Funktionswert 0 ist)? Nimmt der Funktionswert $f(x)$ zu oder ab, wenn x vergrößert wird (bzw. in welchen Variablenbereichen gilt das eine und in welchen das andere)? Gibt es eine Stelle, an der der Funktionswert maximal oder minimal ist? Kann die Funktion beliebig große Werte annehmen?

Um einen solchen Überblick zu erhalten, ist eine grafische Darstellung angebracht. Dabei gehen wir folgendermaßen vor: Wir wählen (gedanklich) ein Element $x \in A$ und betrachten es gemeinsam mit dem zugehörigen Funktionswert $f(x)$. Das **Zahlenpaar** $(x, f(x))$ fassen wir als **Koordinaten** eines Punktes in der **Zeichenebene** auf. Dazu zeichnen wir zwei aufeinander normal stehende Geraden, die Koordinatenachsen, die beide als Zahlengeraden interpretiert werden. Die „horizontale“ Achse bezeichnen wir als „erste Achse“ (oder **Abszisse**) oder mit einem Namen für die Variable (etwa als „ x -Achse“). Die „vertikale“ Achse bezeichnen wir als „zweite Achse“ (oder **Ordinate**) oder als „Achse für $f(x)$ “ (oft wird sie auch einfach „ y -Achse“ genannt). Am (**Koordinaten**)-**Ursprung**, dem Schnittpunkt der Achsen, liegen auch deren Nullpunkte. Üblicherweise gibt man der ersten Achse einen nach „rechts“ weisenden Pfeil, um anzudeuten, dass die auf ihr dargestellten Zahlen größer werden, wenn man in diese Richtung fortschreitet, und markiert zumindest einen Punkt auf ihr (z.B. 1), um einen Maßstab zum Einzeichnen weiterer Punkte festzulegen. Analog gibt man der zweiten Achse einen nach „oben“ weisenden Pfeil, um anzudeuten, dass die auf ihr dargestellten Zahlen größer werden, wenn man in diese Richtung fortschreitet, und auch auf ihr markiert man zumindest einen Punkt (z.B. 1), um einen Maßstab zum Einzeichnen weiterer Punkte festzulegen. Unserem Zahlenpaar $(x, f(x))$ entspricht nun jener Punkt, den wir, vom Ursprung (dem Schnittpunkt der Achsen) ausgehend, erhalten, indem wir

- „ x nach rechts“ (bzw., wenn x negativ ist, die entsprechende Strecke „nach links“) gehen
- und von dort aus „ $f(x)$ nach oben“ (bzw., wenn $f(x)$ negativ ist, die entsprechende Strecke „nach unten“) gehen.

³ Im Gegenzug wird eine Funktion *stetig* genannt, wenn so etwas nicht auftritt, d.h. wenn – etwas salopp ausgedrückt – nahe beieinander liegende Stellen stets nahe beieinander liegende Funktionswerte besitzen.

Umgekehrt können dann an der Lage des Punktes (in der Praxis oft nur näherungsweise) sowohl der Variablenwert x (als erste Koordinate) als auch der Funktionswert $f(x)$ (als zweite Koordinate) abgelesen werden.

Diese Konstruktion machen wir (gedanklich) nun mit *allen* Variablenwerten $x \in A$. Die Menge *aller* Zahlenpaare

$$(\text{Variablenwert, Funktionswert}) \quad \text{d.h.} \quad (x, f(x)) \quad (4.1)$$

nennen wir **Funktionsgraph** (oder einfach **Graph**) der Funktion f . Formal ist er definiert als die Menge

$$\text{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}, \quad (4.2)$$

also als Menge aller Zahlenpaare $(x, f(x))$, für die $x \in A$ ist. Da jedem Paar $(x, f(x))$ ein Punkt entspricht, interpretieren wir den Graphen von f als **Menge von Punkten** in der Zeichenebene. In vielen Fällen ist diese Menge eine **Linie** (oder besteht aus mehreren **Linien**), die wir (angenähert) zeichnen oder von einem Computerprogramm zeichnen („plotten“) lassen können⁴. Und was wir dann sehen, wenn wir einen solchen Funktionsgraphen betrachten, kann in der Regel die oben gestellten Fragen (und noch viele mehr) beantworten.

Betrachten wir als Beispiel die durch (2.1) definierte Funktion f . Die Definitionsmenge ist $A = \mathbb{R}^*$, die Zuordnungsvorschrift ist

$$x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}. \quad (4.3)$$

Wir übergeben den Funktionsterm $x^2 + \frac{1}{x}$ einem Computerprogramm, das Funktionsgraphen plotten kann (die Frage, wie wir das ohne Hilfe elektronischer Werkzeuge machen können, schieben wir noch ein bisschen auf), und erhalten das in Abbildung 1 gezeigte Bild. Es zeigt natürlich nur einen Ausschnitt der Zeichenebene und damit nur einen Teil des Graphen, da wir die Koordinatenachsen nicht „bis ins Unendliche“ zeichnen können, gibt uns aber dennoch *auf einen Blick* eine gute Übersicht über wichtige Eigenschaften der Funktion f . Sehen wir uns einige an:

- Einzelne, ausgewählte Funktionswerte können nun leicht (näherungsweise) abgelesen werden. So lesen wir beispielsweise ab, dass $f(3)$ ein bisschen kleiner als 10 ist. Der genaue Wert ist, wie die Rechnung zeigt, $f(3) = 3^2 + \frac{1}{3} = \frac{28}{3}$, also $9.333 \dots$ (periodisch).
- Der Graph zerfällt in zwei Linien. Der Stelle $x = 0$ entspricht kein Punkt des Graphen, da 0 kein Element der Definitionsmenge A ist. Diese Stelle wurde ja von vornherein ausgeschlossen, da für $x = 0$ bei der Berechnung des Funktionswerts $x^2 + \frac{1}{x}$ durch 0 dividiert werden müsste. Aber x kann zumindest sehr nahe bei 0 gewählt werden (also etwa $x = 0.001$ oder $x = -0.001$). Wie sich das auf den Funktionswert auswirkt, sehen wir nun sehr schön:

⁴ Der Zusatz „angenähert“ drückt aus, dass wir natürlich nicht „mathematisch genaue“ Punkte oder Linien zeichnen können, sondern nur „reale“ Punkte oder Linien auf einem Blatt Papier oder einem Computerbildschirm, ganz so wie ein real auf Papier gezeichneter Kreis kein „mathematisch idealer“ Kreis ist, aber dennoch bei sorgfältiger Ausführung gut genug, um einen solchen *darzustellen*.

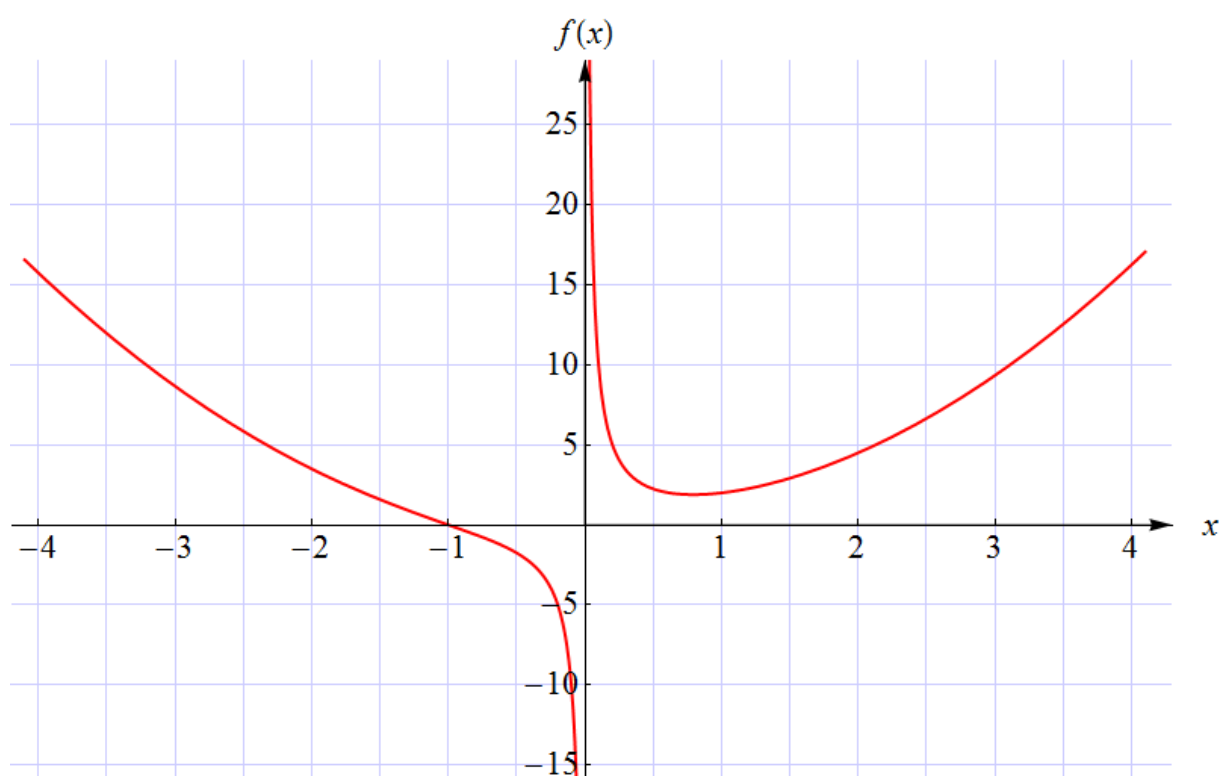


Abbildung 1: Graph der durch (2.1) definierten Funktion f . (Genauer gesagt handelt es sich um einen Ausschnitt, da der gesamte Graph – mathematisch gesehen – bis ins Unendliche reicht). Um Werte besser ablesen zu können, ist auch ein Koordinatenraster eingezeichnet. Die Maßstäbe auf den beiden Achsen sind unterschiedlich, was der betrachteten Funktion angemessen ist.

- Für einen Wert wie $x = 0.001$ ist $f(x)$ sehr groß, da der Graph bei Annäherung an 0 von positiven x -Werten (also von „rechts“) nach „oben“ schießt. (Die Rechnung ergibt zur Bestätigung $f(0.001) = 10^{-6} + 10^3 = 1000.000001 \approx 1000$.)
- Für einen Wert wie $x = -0.001$ ist zwar der Betrag von $f(x)$ sehr groß, aber $f(x)$ ist negativ, da der Graph bei Annäherung an 0 von negativen x -Werten (also von „links“) nach „unten“ schießt. (Die Rechnung ergibt zur Bestätigung $f(-0.001) = 10^{-6} - 10^3 = -999.999999 \approx -1000$.)

Die Stelle $x = 0$ (eine sogenannte *Definitionslücke*, da hier der Funktionswert nicht definiert ist) wird auch eine *Singularität* oder eine *Polstelle* (kurz *Pol*) der Funktion f genannt.

- Schreiten wir, beginnend mit kleinen positiven Werten von x , nach „rechts“, also zu größeren Werten, so werden die Funktionswerte zunächst kleiner, erreichen dann irgendwo zwischen 0.5 und 1 ein (*lokales*⁵) *Minimum* und werden dann wieder größer. Der

⁵ Der Zusatz „lokal“ bezieht sich darauf, dass die Funktionswerte *in der Nähe* einer solchen Stelle nicht kleiner sind als an dieser Stelle selbst. Ein „globales“ Minimum würde vorliegen, wenn *kein anderer* Funktionswert (an welcher Stelle der Definitionsmenge er auch immer auftreten mag) kleiner ist.

genaue Wert dieser (*lokalen*) *Minimumstelle* ist $2^{-1/3} \approx 0.7937$ (was erst mit Hilfe der Differentialrechnung auf schnelle Weise berechnet werden kann).

- Für große x ist der Graph „nach oben“ gebogen, was bedeutet, dass die Funktionswerte $f(x)$ schneller größer werden als x selbst (und zwar näherungsweise quadratisch, da sich für große x der Summand $\frac{1}{x}$ in der Summe $x^2 + \frac{1}{x}$ kaum mehr auswirkt). Der Graph wird immer steiler, je größer x wird (was überprüft werden kann, indem weitere Plots mit größeren Ausschnitten angelegt werden).
- Zwischen der Definitionslücke 0 und der Stelle, an der das lokale Minimum angenommen wird, ist die Funktion f *streng monoton fallend*, da in diesem Bereich die Funktionswerte mit wachsendem x immer kleiner werden. Im Bereich „rechts“ von der Minimumstelle ist sie *streng monoton steigend* (*streng monoton wachsend*), da dort die Funktionswerte mit wachsendem x immer größer werden.
- Nun sehen wir uns das Verhalten der Funktion für negative Variablenwerte an: Schreiten wir, beginnend mit einem negativen Wert von x , der in der Nähe von 0 liegt, nach „links“, also zu kleineren Werten, so werden die Funktionswerte größer und steigen offenbar immer weiter an. Umgekehrt bedeutet das, dass im Bereich negativer x die Funktionswerte immer *kleiner* werden, wenn x wächst. Daher ist die Funktion f in diesem Bereich *streng monoton fallend*. (Wann immer man über *Änderungen* von Funktionswerten spricht, sind *Änderungen* bei *wachsendem* Variablenwert gemeint, also *Änderungen*, die sich ergeben, wenn die Variable gedanklich entlang der ersten Achse „von links nach rechts“ bewegt wird.)
- Bei $x = -1$ ist der Funktionswert gleich 0. (Die Rechnung bestätigt: $f(-1) = (-1)^2 + \frac{1}{-1} = 1 - 1 = 0$.) Der Variablenwert -1 wird daher als *Nullstelle* bezeichnet. Er ist Lösung der Gleichung $f(x) = 0$. Offenbar ist -1 die *einzig*e Lösung dieser Gleichung, da der Graph die erste Achse nirgendwo sonst schneidet.
- Ebenfalls bei $x = -1$ findet eine andere interessante Sache statt: Stellen Sie sich vor, der Graph stellt eine Straße in der Zeichenebene dar, die Sie entlangradeln! Fahren Sie den linken Teil des Graphen in Richtung ansteigender x -Werte entlang, so müssen Sie im Bereich $x < -1$ nach links lenken und im Bereich $x > -1$ nach rechts. Bei $x = -1$ (und zwar *exakt* bei diesem Wert, wie ein kleines Argument zeigt, das allerdings die Differentialrechnung benötigt) findet der Übergang zwischen Nach-links-Lenken und Nach-rechts-Lenken statt. Ein Variablenwert mit dieser Eigenschaft heißt *Wendestelle*. Der Wert -1 ist Nullstelle und Wendestelle gleichzeitig.
- Auch im Bereich negativer x mit großem Betrag zeigt sich ein (annähernd) quadratisches Verhalten – sowohl am Graphen (er wird umso steiler, je weiter wir von der Nullstelle aus nach „links“ gehen) als auch am Funktionsterm (da der Summand $\frac{1}{x}$ in der Summe $x^2 + \frac{1}{x}$ für $x \ll -1$ ebenfalls kaum ins Gewicht fällt; das Symbol \ll bedeutet *viel kleiner als*).
- Wollen wir aus irgendeinem Grund wissen, an welchen Stellen der Funktionswert gleich 5 ist (was rechnerisch bedeuten würde, die Gleichung $f(x) = 5$ zu lösen, was auf eine Gleichung dritten Grades führt), so müssen wir jene Stellen suchen, für die der Graph die „horizontale“ Gerade, deren zweite Koordinate 5 ist, schneidet. Ein Blick

auf den Graphen zeigt, dass es drei derartige Stellen gibt (und zwar näherungsweise -2.33 , 0.20 und 2.13). Eine exakte Berechnung dieser Werte ist zwar möglich, aber etwas umständlich und jenseits des Stoffs dieses Skriptums. Indem wir uns näher zum Graphen „heranzoomen“ (indem wir neue Plots anlegen, die immer kleinere Ausschnitte um die entsprechenden Schnittpunkte zeigen), können wir die Genauigkeit, mit der wir sie ablesen können, steigern.

- Schließlich entnehmen wir dem Graphen, dass die Bildmenge unserer Funktion ganz \mathbb{R} ist, da jede reelle Zahl als Funktionswert auftritt (manche sogar mehrfach). Das folgt einfach daraus, dass *jede* „horizontale“ Gerade mindestens einen Punkt mit dem Funktionsgraphen gemeinsam hat.

Versuchen Sie, all diese Eigenschaften unserer Funktion anhand des Graphen und – soweit oben erwähnt – durch eine Rechnung mit dem Funktionsterm nachzuvollziehen!

Anmerkung zur Sprechweise: Um einen Variablenwert x von einem Wertepaar $(x, f(x))$ zu unterscheiden, nennen wir x eine **Stelle** und das Paar $(x, f(x))$ im Hinblick auf seine geometrische Deutung einen **Punkt**. So ist beispielsweise eine lokale „Minimumstelle“ ein x -Wert, dessen Funktionswert von keinem anderen Funktionswert einer in der Nähe liegenden Stelle unterschritten wird, während der Punkt des Graphen, der zu dieser Stelle gehört, als „Tiefpunkt“ bezeichnet wird. Analog spricht man von (lokalen) „Maximumstellen“ und „Hochpunkten“ und von „Wendestellen“ und „Wendepunkten“. Dieser feine Unterschied in der Bezeichnung wird nicht immer konsequent durchgehalten, aber man sollte ihn zumindest kennen.

Zu einem guten Verständnis des Funktionsbegriffs zählt,

- wichtige Eigenschaften einer Funktion aus ihrem Graphen ablesen zu können
- und diese Eigenschaften des Graphen auf Eigenschaften des Funktionsterms beziehen zu können.

Um in der Praxis jene Eigenschaften einer gegebenen Funktion herauszuarbeiten, die uns für bestimmte Zwecke interessieren, wird ihr Graph meist in zweierlei Hinsicht herangezogen: Er hilft uns zu entscheiden, welche Berechnungen mit dem Funktionsterm durchzuführen sind, und er gibt uns (zumindest näherungsweise) darüber Auskunft, was dabei herauskommen sollte. In manchen Fällen sind die nötigen Berechnungen so aufwändig, dass wir uns mit den am Graphen abgelesenen Eigenschaften zufrieden geben (wie beispielsweise bei der Frage nach den Lösungen der Gleichung $f(x) = 5$ für die oben diskutierte Funktion f).

Weiters sollten Sie wissen, wie die Graphen der oft auftretenden elementaren Funktionen (Potenz- und Polynomfunktionen, Winkelfunktionen sowie Exponential- und Logarithmusfunktionen) aussehen. Sie werden besprochen, wenn die betreffenden Funktionen eingeführt werden.

Als Ergänzung betrachten wir noch den Graphen der in (3.1) abschnittsweise durch zwei Terme definierten Funktion U . Er ist in Abbildung 2 wiedergegeben und zeigt den durch diese Funktion modellierten Spannungsverlauf in einem Bild, das man sofort überblickt.

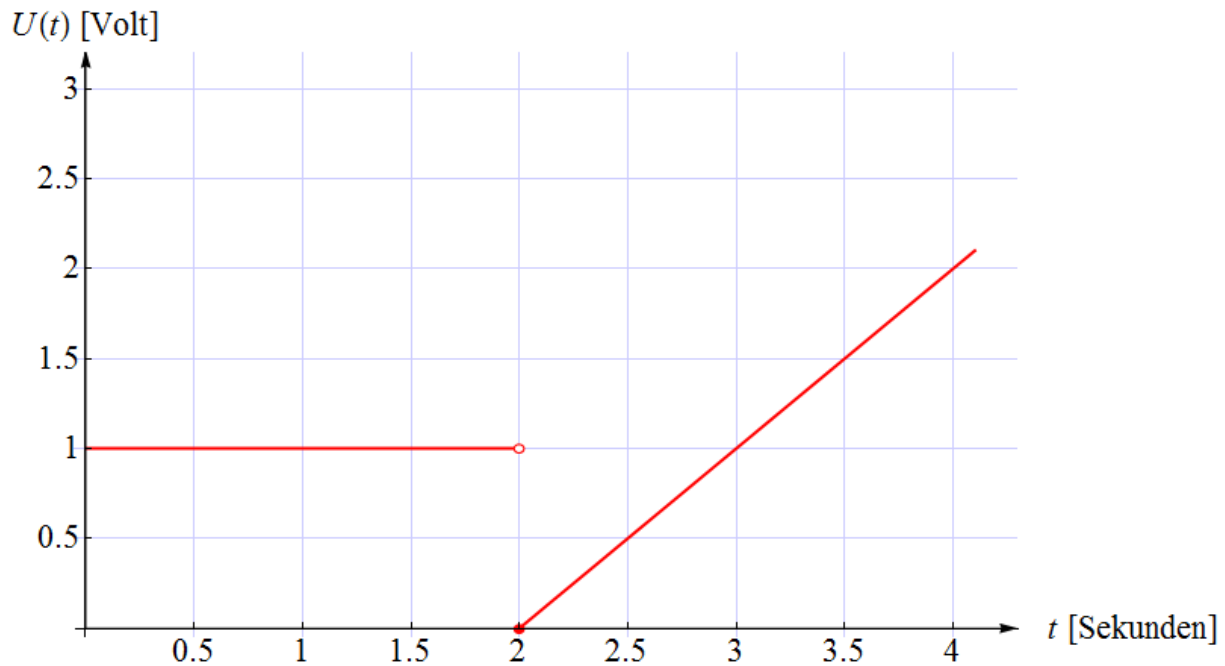


Abbildung 2: Graph der abschnittsweise termdefinierten Funktion (3.1). Die durch diese Funktion modellierte elektrische Spannung ist 2 Sekunden lang konstant, fällt dann abrupt auf 0 ab und steigt danach linear an. Dass der Funktionswert an der Stelle $t = 2$ mit Hilfe des zweiten Terms berechnet wird, also 0 ist, wird durch den ausgefüllten Kreis gekennzeichnet, während durch den Kreisring am Ende des „horizontalen“ Graphenstücks angezeigt wird, dass dieser Punkt *nicht* zum Graphen gehört.

Der anfängliche konstante Verlauf, die Sprungstelle bei $t = 2$ (die U zu einer unstetigen Funktion macht) und der darauffolgende lineare Anstieg sind deutlich zu erkennen. Die Bildmenge der Funktion U ist \mathbb{R}_0^+ , da jede nichtnegative Zahl als Funktionswert auftritt, aber keine negative.

5 Wertetabelle und Punktgraph

Zum Aufwärmen betrachten wir eine Funktion, deren Definitionsmenge endlich ist, also nur endlich viele Elemente besitzt:

$$\sigma : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}. \quad (5.1)$$

Sie soll 1 auf 2 abbilden, 2 auf 3 und 3 auf 1. Diese Zuordnungsvorschrift ⁶ (man könnte sie in Worten als „weiterrücken um 1 modulo 3“ bezeichnen⁷) können wir entweder in der Form

$$\begin{aligned} \sigma(1) &= 2 \\ \sigma(2) &= 3 \\ \sigma(3) &= 1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

oder in Form einer **Tabelle (Wertetabelle)**

x	$\sigma(x)$
1	2
2	3
3	1

(5.3)

vollständig darstellen. Alles klar? In einer Übungsaufgabe am Ende dieses Skriptums werden Sie aufgefordert, den Graphen der Funktion σ zu zeichnen.

Nun kommen wir zur Frage, wie man den Graphen einer Funktion, deren Definitionsmenge unendlich viele Elemente besitzt, ohne ausgefeilte technische Hilfsmittel – maximal mit einem einfachen Taschenrechner ausgerüstet – erstellen kann. In einem solchen Fall können wir natürlich nicht *alle* Funktionswerte berechnen und auflisten. Im vorigen Abschnitt haben wir einfach angenommen, dass ein grafischer Taschenrechner oder ein Computerprogramm den Graphen für uns plottet. Auch wenn heute im Mathematikunterricht dank dieser elektronischen Hilfsmittel weniger mit der Hand gezeichnet wird als in früheren Zeiten, sollten wir dennoch grundsätzlich wissen, wie man einen Funktionsgraphen *selbst* erstellen kann.

Eine Wertetabelle einer Funktion mit unendlicher Definitionsmenge ist eine Auflistung von endlich vielen *ausgewählten* Variablenwerten und den zugehörigen Funktionswerten. Betrachten wir als Beispiel wieder die durch (2.1) definierte Funktion f . Wir wählen Variablenwerte

⁶ Es handelt sich um eine sogenannte *Permutation*. Stellen Sie sich vor, die Elemente von $A = \{1, 2, 3\}$ kennzeichnen Personen, und in einem Raum stehen drei Sessel, die mit den Elementen von $B = \{1, 2, 3\}$ bezeichnet sind. Setzt sich jede Person auf einen Sessel, so kann das formal als Zuordnung $\text{Person} \mapsto \text{Sesselnummer}$ beschrieben werden. Jede solche Zuordnung ist eine „Permutation von drei Elementen“. In unserem Beispiel setzt sich Person 1 auf den Sessel Nummer 2, Person 2 auf den Sessel Nummer 3 und Person 3 auf den Sessel Nummer 1, wie durch σ angegeben. Das Symbol σ ist ein kleines griechisches „sigma“.

⁷ „Modulo 3“ bedeutet, dass „zyklisch“ (sozusagen „im Kreis“) gezählt wird: 1, 2, 3 und danach wieder 1. Das Zifferblatt einer Uhr zählt die Stunden „modulo 12“.

von -4 bis 4 in Schritten von 0.25 , berechnen die Funktionswerte, runden sie auf zwei Nachkommastellen und können dann die folgende Tabelle anlegen:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
-4	15.75	0	nicht definiert
-3.75	13.80	0.25	4.06
-3.5	11.96	0.5	2.25
-3.25	10.25	0.75	1.90
-3	8.67	1	2
-2.75	7.20	1.25	2.36
-2.5	5.85	1.5	2.92
-2.25	4.62	1.75	3.63
-2	3.5	2	4.5
-1.75	2.49	2.25	5.51
-1.5	1.58	2.5	6.65
-1.25	0.76	2.75	7.93
-1	0	3	9.33
-0.75	-0.77	3.25	10.87
-0.5	-1.75	3.5	12.54
-0.25	-3.94	3.75	14.33
		4	16.25

(5.4)

Diese Werte geben eine grobe Übersicht über das Verhalten unserer Funktion, nun mit Schwerpunkt auf konkreten Zahlenwerten. Wir sehen, dass die Funktionswerte im Bereich $x < 0$ mit wachsendem x kleiner werden (wobei auch die Nullstelle bei $x = -1$ ersichtlich ist, ab der die Funktionswerte negativ sind). Im Bereich $x > 0$ sind die Funktionswerte positiv, wobei sie zunächst kleiner werden, bei $x = 0.75$ offenbar ihren kleinsten Wert annehmen und danach wieder ansteigen. Die Tabelle gibt natürlich keine Auskunft über die Funktionswerte an Stellen, die *zwischen* den ausgewählten x -Werten liegen. So können wir weder den genauen Wert der Minimumstelle aus der Tabelle ermitteln noch Funktionswerte wie $f(1.1)$. (Was letzteren betrifft, können wir lediglich *vermuten* oder, wenn Ihnen das Wort besser gefällt, *schätzen*, dass $f(1.1)$ zwischen 2 und 2.36 liegt, vielleicht näher bei 2 , da 1.1 näher bei 1 liegt als bei 1.25 .)

Jede Zeile der Wertetabelle besteht aus einem Paar $(x, f(x))$ und kann daher als Punkt in der Zeichenebene gedeutet werden. Da der Graph der Funktion f die Menge *aller* Paare $(x, f(x))$ für $x \in \mathbb{R}^*$ ist, liegen alle diese der Tabelle entnommenen Punkte (mal davon abgesehen, dass wir die Funktionswerte gerundet haben) auf dem Graphen. Zeichnen wir sie in ein Koordinatensystem, so erhalten wir den in Abbildung 3 gezeigten **Punktgraphen**. Er vermittelt uns eine ungefähre Vorstellung davon, wie der Graph aussehen könnte, wobei aber die Verhältnisse in der Nähe von $x = 0$ nicht wirklich gut erkennbar sind.

Zu Übungszwecken vor die Aufgabe gestellt, allein aus dem Funktionsterm und einer selbst-erstellten Wertetabelle den Graphen zu zeichnen, müsste man sich zunächst genauer über das Verhalten nahe $x = 0$ orientieren, und zwar entweder durch eine weitere Wertetabelle (etwa im Bereich $-0.25 < x < 0.25$ mit kleinerer Schrittweite) oder durch einen Blick auf

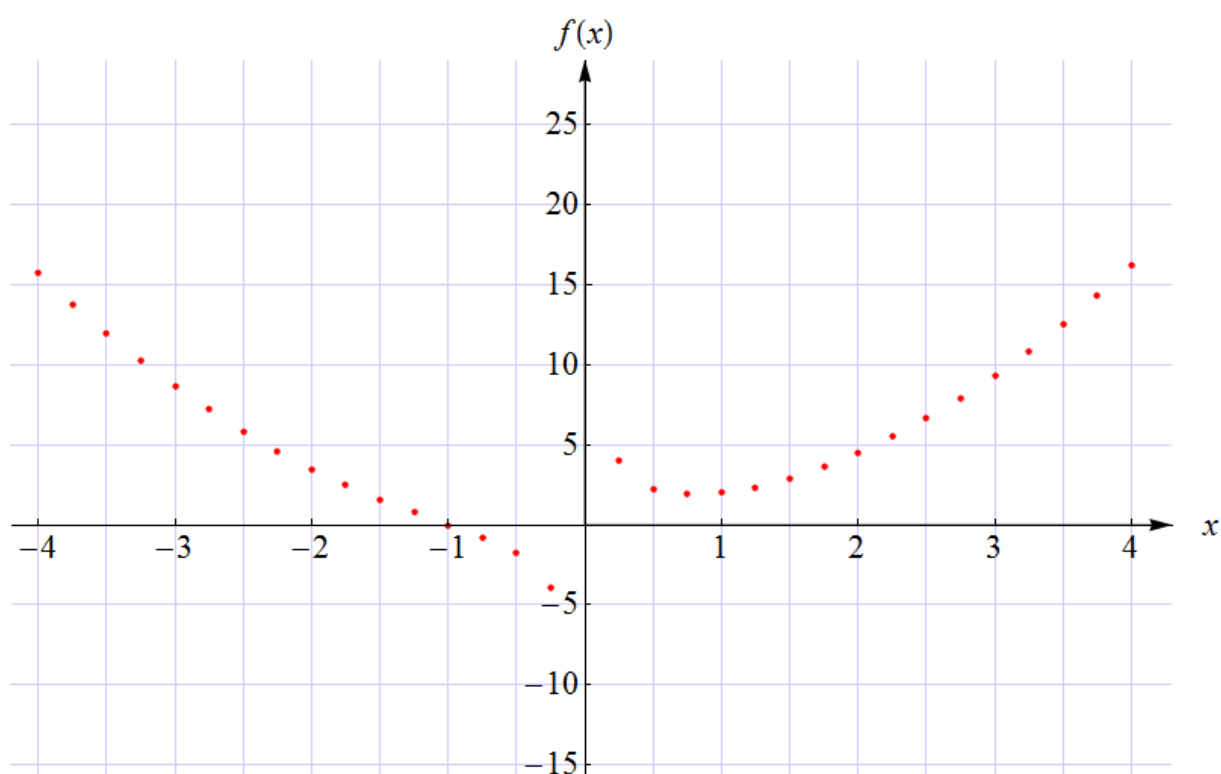


Abbildung 3: Punktgraph, der die in der Wertetabelle (5.4) enthaltenen Paare $(x, f(x))$ zeigt. Jede Zeile der Tabelle (außer jener für $x = 0$, wo die Funktion f nicht definiert ist) entspricht einem Punkt. Jeder dieser Punkte liegt auf dem in Abbildung 1 gezeigten Graphen.

den Funktionsterm, um das Verhalten in der Nähe der Definitionslücke zu erschließen⁸. Eine gewissenhafte Strategie wird in solchen Fällen dann auch zusätzliche Berechnungen und Argumente heranziehen (etwa um Nullstellen und – mit Hilfe der Differentialrechnung – lokale Minimum- und Maximumstellen sowie Wendestellen zu ermitteln). Sobald Sie über ausreichende Zusatzinformationen verfügen, können Sie den Bleistift ansetzen, um den Graphen zu zeichnen.

Ein grafischer Taschenrechner oder ein Computerprogramm macht bei der Erstellung eines Funktionsgraphen im Grunde nichts anderes, als eine Liste ausgewählter, recht eng nebeneinander liegender x -Werte zu wählen, die zugehörigen Funktionswerte zu berechnen, die entsprechenden Punkte zu zeichnen und zu verbinden, sodass sich der Eindruck einer Linie (in unserem Beispiel: zweier Linien) ergibt. Manche – die etwas „intelligenteren“ – Programme berücksichtigen durch geschickte Rechnungen mit dem Funktionsterm die Krümmung der Kurve und erkennen sogar Definitionslücken.

Tabellen zur Darstellung von Funktionen können etwa dann eingesetzt werden, wenn den Personen, die Funktionswerte ermitteln müssen, deren Berechnung aus einem Funktionsterm

⁸ Dieser Blick könnte ergeben, dass sich $x^2 + \frac{1}{x}$ in der Nähe von $x = 0$ näherungsweise so verhält wie $\frac{1}{x}$, also großen Betrag und das gleiche Vorzeichen wie x hat.

oder deren Ablesung aus einem Graphen nicht zugemutet werden soll oder wenn dies aus anderen Gründen unpraktisch ist. Wenn Ihnen beispielsweise Ihr Bankberater zeigen will, wie sich Ihr angelegtes Geld im Laufe der Zeit vermehren wird, wird er Ihnen wahrscheinlich eine Tabelle zeigen. In früheren Zeiten waren umfangreiche Tabellenwerke auch in technischen und wissenschaftlichen Bereichen eine unentbehrliche Hilfe, während heute (sofern die nötigen Berechnungen nicht auch die Computer überfordern) mit einem Mausklick Funktionsterme ausgewertet und Funktionsgraphen erstellt werden können.

6 Funktionen, die direkt aus der „Wirklichkeit“ kommen

Bisher haben wir von reellen Funktionen gesprochen, die durch die Angabe einer Definitionsmenge und eines Funktionsterms (oder im Fall abschnittsweise definierter Funktionen durch mehrere Terme) definiert sind⁹. Wenn wir diese Abhängigkeit einer Größe von einer anderen Größe aus realen Beobachtungen erschließen (etwa den zeitlichen Verlauf der Temperatur eines Bauteils in einer Maschine), so wird das nicht immer möglich sein. Jeder in der Praxis zur Beschreibung eines realen Sachverhalts benutzte Funktionsterm enthält von vornherein eine Portion „Theorie“, d.h. idealisierende Annahmen, die seine Form rechtfertigen. Bei der Darstellung realer Beobachtungsdaten ist es oft gar nicht zweckmäßig, mit Funktionstermen zu arbeiten.

Ein Beispiel wäre die Lufttemperatur, wie sie von der meteorologischen Station der Hohen Warte in Wien in den letzten 24 Stunden (etwa in Abständen von 15 Minuten) gemessen worden ist. Um die Daten möglichst unverfälscht nutzen zu können, dürfen wir nicht annehmen, etwas über die Temperatur zwischen den Messzeitpunkten zu wissen. In einem solchen Fall liegt ein Funktionsterm $T(t)$, der die Temperatur T in Abhängigkeit von einer Zeitvariable t beschreibt, die innerhalb des betrachteten Zeitintervalls *beliebige* reelle Werte annehmen kann, schlicht und einfach nicht vor. Wir können dann aber immer noch die Messwerte (im Rahmen der Messgenauigkeit) als Funktionswerte ansehen, sofern die Definitionsmenge aus den (endlich vielen) Messzeitpunkten besteht. Das verschafft uns zwar keinen Funktionsterm (und einen Term zu suchen, der die reinen Beobachtungsdaten korrekt wiedergibt, hätte angesichts der Zufälligkeiten, die die Temperatur ständig beeinflussen, nicht viel Sinn), aber immerhin können wir Tabellen und Punktgraphen benutzen, um die Daten darzustellen. In manchen realistischen Darstellungen von gemessenen Temperaturverläufen liegen die Punkte des Punktgraphen so nahe, dass der Eindruck einer kontinuierlichen Linie entsteht.

Eine *andere*, davon zu unterscheidende (aber ebenfalls wichtige) Sache ist eine sich auf die „reinen“ Beobachtungsdaten – und in der Regel auch auf theoretische (physikalische) Annahmen – stützende *Modellierung* des Temperaturverlaufs (oder eines typischen Temperaturverlaufs). In einem solchen Fall wird – im Gegensatz zur reinen Datendarstellung – die Angabe

⁹ Eine Ausnahme ist die in (5.1) – (5.3) betrachtete Funktion σ , deren Zuordnungsvorschrift in einer anderen Form angegeben wurde. Aber selbst für diese Funktion lässt sich ein Term angeben: $\sigma(x) = -\frac{1}{2}(3x^2 - 11x + 4)$. Überprüfen Sie ihn durch Einsetzen von $x = 1$, $x = 2$ und $x = 3$! Ein anderer Term, der dieselbe Funktion charakterisiert, ist $\sigma(x) = (x + 1) \bmod 3$. Der Teil $\bmod 3$ („modulo 3“) bezeichnet den Rest bei Division durch 3. Siehe dazu auch Fußnote 7.

eines Terms (der die Beobachtungsdaten möglichst gut wiedergibt, aber nicht auf endlich viele Messzeitpunkte beschränkt ist) ein wünschenswertes Ziel sein.

7 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Lesen Sie für die in (2.1) definierte Funktion f aus dem Graphen in Abbildung 1 näherungsweise die Lösungen der Gleichung $f(x) = 10$ ab!
Lösung:

Die Lösungen sind näherungsweise -3.2 , 0.1 und 3.1 .

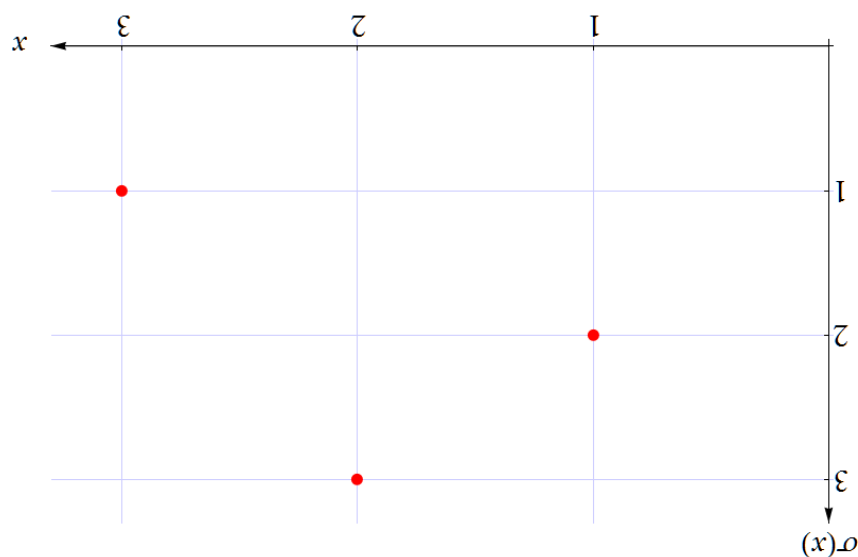
- Lösen Sie für die Funktion U von (3.1) unter Zuhilfenahme der Funktionsterme *und* des Graphen in Abbildung 2 die Gleichungen $U(t) = 0.5$, $U(t) = 1$ und $U(t) = 2$!
Lösungen:

Die Lösungsmenge von $U(t) = 0.5$ ist $L = \{2.5\}$.
Die Lösungsmenge von $U(t) = 1$ ist $L = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t < 2 \text{ oder } t = 3\} = [0, 2) \cup \{3\}$.
Die Lösungsmenge von $U(t) = 2$ ist $L = \{4\}$.

- Ermitteln Sie die Bildmenge der in (5.1) – (5.3) definierten Funktion σ !
Lösung:

Die Bildmenge ist $\{1, 2, 3\}$. Sie ist gleich der Zielmenge.

- Zeichnen Sie einen Punktgraphen der in (5.1) – (5.3) definierten Funktion σ !
Lösung:



- Sei p die durch

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ p(x) &= 3x^2 - 2 \end{aligned}$$

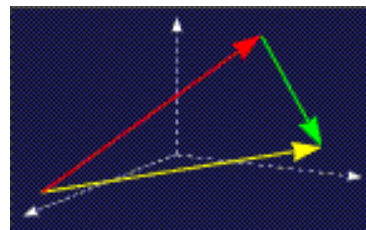
definierte Funktion. Geben Sie zwei Punkte an, die auf dem Graphen von p liegen! (Sie müssen dazu den Graphen nicht zeichnen!)

Lösung:

Tipp: Wählen Sie eine beliebige reelle Zahl x und berechnen Sie den zugehörigen Funktionswert $p(x)$! Der Punkt $(x, p(x))$ liegt dann auf dem Graphen von p .
Beispiele sind die Punkte $(0, -2)$ und $(1, 1)$.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Juli 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“

(<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Lineare Funktionen und ihre Graphen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

Dieses Skriptum behandelt die Funktionsterme und Graphen linearer Funktionen und geht auf die Begriffe Änderungsrate und Anstieg (Steigung) ein.

1 Lineare Funktionen

Eine reelle **lineare Funktion** ist eine reelle Funktion, deren Zuordnungsvorschrift vom Typ

$$x \mapsto kx + d \quad (1.1)$$

ist, wobei k und d fix vorgegebene reelle Zahlen (Konstanten¹) sind. Ist $d = 0$, so wird die Funktion **linear-homogen**, ansonsten **linear-inhomogen** genannt². Die größtmögliche Definitionsmenge einer reellen linearen Funktion ist ganz \mathbb{R} . Bei Bedarf kann die Definitionsmenge natürlich als echte Teilmenge von \mathbb{R} festgelegt werden.

Eine lineare Funktion mit $k = 0$ ist konstant. Eine lineare Funktion mit $k \neq 0$ (wir wollen sie im Folgenden f nennen) stellt eine bestimmte Form der Zu- bzw. Abnahme dar, die folgendermaßen charakterisiert werden kann: Wir setzen uns gedanklich an eine beliebige Stelle x_0 und rücken von dort um eine Strecke $\Delta x > 0$ vor, betrachten also auch die Stelle $x_0 + \Delta x$.

Anmerkung zur Bezeichnung von Änderungen: Um Änderungen auszudrücken, wird in der Mathematik und in angewandten Wissenschaften oft das Symbol Δ (ein großes griechisches „Delta“) verwendet. Δx bezeichnet hier also die Differenz „neue Stelle minus alte Stelle“. Die „alte Stelle“ ist x_0 , die „neue Stelle“ ist $x_0 + \Delta x$. Deren Differenz ist klarerweise Δx .

¹ Auch *Parameter* oder *Koeffizienten* genannt.

² Das Wort „linear“ wird in der Mathematik leider ein bisschen uneinheitlich verwendet. In manchen Teilgebieten (wie der linearen Algebra) versteht man darunter das, was wir hier als „linear-homogen“ bezeichnen.

Die Funktionswerte an diesen beiden Stellen sind³

$$f(x_0) = k x_0 + d \quad (1.2)$$

$$f(x_0 + \Delta x) = k(x_0 + \Delta x) + d \quad (1.3)$$

und können miteinander verglichen werden. Ihre Differenz ist⁴

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = k(x_0 + \Delta x) + d - k x_0 - d = k \Delta x, \quad (1.4)$$

woraus folgt

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + k \Delta x. \quad (1.5)$$

Wird von einer beliebigen Stelle x_0 zu einer (neuen, größeren) Stelle $x_0 + \Delta x$ übergegangen, so erhält man den neuen Funktionswert, indem zum alten Funktionswert $k \Delta x$ addiert wird⁵. Das bedeutet:

- Ist $k > 0$, so vergrößert sich der Funktionswert beim Übergang von x_0 zu $x_0 + \Delta x$ (d.h. beim „Vorrücken um Δx “) um den konstanten Wert $k \Delta x$, und zwar egal, von welchem x_0 man ausgegangen ist.
- Ist $k < 0$, so ändert sich der Funktionswert beim Übergang von x_0 zu $x_0 + \Delta x$ (d.h. beim „Vorrücken um Δx “) um den konstanten Wert $k \Delta x$, was jetzt einer Verkleinerung entspricht, da ja $k \Delta x < 0$ ist. Auch das gilt immer, gleichgültig, von welchem x_0 man ausgegangen ist.

Die Begriffe „vorrücken“, „neuer Funktionswert“, „Vergrößerung“ und „Verkleinerung“ werden besonders deutlich, wenn man sich vorstellt, dass die Variable x die Zeit darstellt und die Funktion f einen zeitlichen Verlauf modelliert.

Hier ein konkretes **Beispiel**, das dieses Verhalten verdeutlicht: Um einen Gebrauchsgegenstand von einer Firma auszuleihen, muss man eine Grundgebühr von 5 Euro bezahlen und dazu noch 2 Euro pro Tag, bis man ihn zurückbringt. Ist x die Zahl der Tage, die eine solche Ausleihe dauert, und $f(x)$ die dafür zu entrichtende Gebühr (in Euro), so gilt

$$f(x) = 2x + 5. \quad (1.6)$$

³ Beachten Sie, dass in (1.3) der Ausdruck $f(x_0 + \Delta x)$ bedeutet: „ f angewandt auf $x_0 + \Delta x$ “, während der Ausdruck $k(x_0 + \Delta x)$ bedeutet: „ k mal $x_0 + \Delta x$ “. Letzterer könnte auch in der Form $k \cdot (x_0 + \Delta x)$ geschrieben werden (was aber nicht generell üblich ist, da die Malpunkte, sofern es nicht um reine Zahlen geht, meist weggelassen werden). Die Klammern um $x_0 + \Delta x$ dienen in diesen beiden Ausdrücken also gänzlich verschiedenen Zwecken, obwohl $f(x_0 + \Delta x)$ und $k(x_0 + \Delta x)$, von den Buchstaben abgesehen, ganz gleich aussehen. Derartige Unterschiede in der Bedeutung von Klammern sollten Sie aus dem jeweiligen Kontext heraus erkennen!

⁴ Mit Δf wird hier die Änderung des Funktionswerts, d.h. die Differenz „Funktionswert an der neuen Stelle minus Funktionswert an der alten Stelle“ bezeichnet. Die Kurzschreibweise Δf hat den Nachteil, dass durch sie im Unterschied zur ausführlichen Schreibweise $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ die Stelle x_0 nicht angegeben ist. Aber ihr Vorteil stellt sich ein, sobald Sie sich daran gewöhnt haben, ein Δ sogleich als eine Änderung bzw. eine Differenz zu erkennen.

⁵ Die Beziehungen (1.3), (1.4) und (1.5) gelten auch für negative Δx . Aber nur für $\Delta x > 0$ beschreiben sie, wie sich der Funktionswert für *wachsendes* x ändert.

Hier ist also $k = 2$ und $d = 5$. Als Definitionsmenge wird sinnvollerweise die Menge \mathbb{N} aller natürlichen Zahlen gewählt. (Der Tag 0 ist jener, an dem die Ausleihe stattfindet.) Um welchen Wert erhöht sich die zu zahlende Gebühr pro Woche? Da eine Woche 7 Tage hat, entspricht das dem Fall $\Delta x = 7$. Die für beliebige lineare Funktionen geltende Beziehung (1.5) nimmt in diesem Beispiel die Form

$$f(x_0 + 7) = f(x_0) + 2 \cdot 7 = f(x_0) + 14 \quad (1.7)$$

an. Jede Woche erhöht sich die Gebühr um 14 Euro, und zwar gleichgültig, an welchem Tag (x_0) zu zählen begonnen wird. In jedem Fall ist die Gebühr eine Woche später um 14 Euro angestiegen. Man nennt diesen Typ eines zeitlichen Verlaufs **lineares Wachstum**.

Einen wichtigen Spezialfall erhalten wir, indem wir $\Delta x = 1$ setzen. Aus (1.5) folgt dann

$$f(x_0 + 1) = f(x_0) + k. \quad (1.8)$$

Die Konstante k ist daher der Zuwachs des Funktionswerts, wenn die Variable (ausgehend von einem beliebigen Wert) um 1 erhöht wird. (Ist $k < 0$, so ist dieser „Zuwachs“ negativ, was einer Abnahme entspricht.)

Die Bedeutung der Konstante d ergibt sich, indem im Funktionsterm $x = 0$ gesetzt wird:

$$f(0) = d. \quad (1.9)$$

d ist also nichts anderes als der Funktionswert an der Stelle 0. Bezeichnet x die Zeit, und entspricht $x = 0$ dem Anfangszeitpunkt eines durch f beschriebenen zeitlichen Verlaufs, so ist d dessen „Anfangswert“.

Im Beispiel (1.6) einer Ausleihgebühr ist $d = 5$. Diese Konstante stellt die Grundgebühr dar, also jene Gebühr, die bereits zu Beginn (am „nullten Tag“) besteht.

2 Änderungsrate

Die Beziehung (1.4) besagt, dass die **Änderung** Δf des Funktionswerts beim Übergang von einer beliebigen Stelle x_0 zur Stelle $x_0 + \Delta x$, also die Differenz $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, stets gleich $k \Delta x$ ist.

Für das obige Beispiel (1.6) einer Ausleihgebühr bedeutet das: Die Änderung (der Zuwachs) der Gebühr während Δx Tagen ist $2 \Delta x$.

Anstatt der Differenz Δf der zwei Funktionswerte (der Änderung) kann auch die **Änderungsrate** betrachtet werden. Sie ist definiert als der Quotient

$$\text{Änderungsrate} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (2.1)$$

also als „Änderung des Funktionswerts dividiert durch Änderung der Stelle“. Genauer handelt es sich um die Änderungsrate zwischen x_0 und $x_0 + \Delta x$ oder, kurz ausgedrückt, um die „Änderungsrate im Intervall⁶ $[x_0, x_0 + \Delta x]$ “. Sie drückt die Änderung „pro vorgerückter Strecke Δx “ aus⁷. Mit (1.4) ergibt sich für jede lineare Funktion

$$\text{Änderungsrate} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{k \Delta x}{\Delta x} = k. \quad (2.2)$$

Die Änderungsrate einer linearen Funktion (in jedem beliebigen Intervall) ist daher stets gleich der Konstante k .

Für das Beispiel (1.6) einer Ausleihgebühr bedeutet das: Die Änderungsrate der Gebühr ist gleich 2 oder, genauer ausgedrückt, „2 Euro pro Tag“.

Eine Rate erkennt man in der Regel daran, dass ihre Beschreibung in Worten ein „pro“ enthält. Da die „Änderung Δf des Funktionswerts pro vorgerückter Strecke Δx “ gleich k ist, ergibt sich für ein gegebenes Δx die Änderung Δf mit Hilfe einer einfachen Schlussrechnung zu $k \Delta x$, was nichts anderes als (1.4) ist.

Für das Beispiel (1.6) einer Ausleihgebühr sieht diese Schlussrechnung so aus:

- Die Änderungsrate der Gebühr ist gleich 2 Euro pro Tag. Die Änderung der Gebühr während eines Tages ist gleich 2 Euro.
- Die Änderung der Gebühr während eines Zeitraums von 4 Tagen ist $2 \cdot 4$ Euro = 8 Euro.
- Die Änderung der Gebühr während einer Woche (7 Tage) ist gleich $2 \cdot 7$ Euro = 14 Euro.
- Allgemein: Die Änderung der Gebühr während eines Zeitraums von Δx Tagen ist $2 \Delta x$ Euro.

Ein anderes Beispiel einer Änderungsrate ist die **Geschwindigkeit**. Modellieren wir eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit: Die Zeit sei durch die Variable t dargestellt, und $s(t)$ sei jene Kilometermarkierung entlang einer Straße, bei der sich ein Fahrzeug zum Zeitpunkt t befindet. Führt es mit konstanter Geschwindigkeit, so gilt

$$s(t) = vt + d, \quad (2.3)$$

wobei v und d fix vorgegebene Konstanten sind. Da $s(0) = d$ gilt, ist d jene Kilometermarkierung, bei der das Fahrzeug zur Zeit 0 ist (der „Anfangsort“). Die Änderung des Funktionswerts zwischen einem beliebigen Zeitpunkt t_0 und dem späteren Zeitpunkt $t_0 + \Delta t$ (also der zwischen diesen Zeitpunkten zurückgelegte Weg) ist gleich

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = v(t_0 + \Delta t) + d - vt_0 - d = v \Delta t. \quad (2.4)$$

⁶ Zum Begriff des Intervalls siehe das Skriptum *Die Ordnung der reellen Zahlen*.

⁷ Man kann sie auch *durchschnittliche* oder *mittlere* Änderungsrate nennen. Dieser Zusatz ist in unserem Zusammenhang nicht so wichtig, wird aber in der Differentialrechnung bedeutsam, wenn auch die Änderungsrate „an einer Stelle x_0 “, also die „*momentane*“ Änderungsrate betrachtet wird. Für lineare Funktionen sind mittlere und momentane Änderungsrate identisch.

Die Änderungsrate während des Zeitintervalls $[t_0, t_0 + \Delta t]$ ist die „pro verstrichener Zeit Δt zurückgelegte Strecke“, eine Größe, die wir als Geschwindigkeit bezeichnen. Wir berechnen sie zu

$$\text{Geschwindigkeit} = \text{Änderungsrate} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{v \Delta t}{\Delta t} = v. \quad (2.5)$$

Die Konstante v in (2.3) ist also nichts anderes als die Geschwindigkeit⁸. Messen wir die Funktionswerte (d.h. die zurückgelegte Strecke) in Kilometer und die Zeit t in Stunden, so messen wir v in „Kilometer pro Stunde“. Hier ist wieder das „pro“, das eine Rate anzeigt. Auch in der Abkürzung dieser Einheit, km/h , erkennen wir das „pro“ am Schrägstrich, der die Division ausdrückt, oder in der Form $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ am Bruchstrich⁹.

3 Graphen linearer Funktionen

Der Graph jeder linearen Funktion f (mit Zuordnungsvorschrift (1.1) und Definitionsmenge \mathbb{R}) ist eine Gerade. Ist $k = 0$, so ist f eine konstante Funktion. Die Funktionsgleichung lautet dann $f(x) = d$. In diesem Fall ist der Graph eine „horizontale“ (d.h. zur ersten Achse parallele) Gerade. Aber auch für jedes $k \neq 0$ ist der Graph eine Gerade. Lesen Sie den nun folgenden Beweis dieser Tatsache und versuchen Sie, ihn zu verstehen:

Beweis: Wir nennen unsere Funktion f . Ihre Zuordnungsvorschrift ist vom Typ (1.1). Geht man von einem beliebigen Punkt $P = (x_0, f(x_0)) = (x_0, kx_0 + d)$ des Graphen aus und rückt von der Stelle x_0 aus um $\Delta x > 0$ vor, so ergibt sich der Punkt $Q = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) = (x_0 + \Delta x, kx_0 + d + k\Delta x)$, der ebenfalls auf dem Graphen liegt. Wird in der Zeichenebene vom Punkt P zum Punkt Q geschritten, indem man zuerst von P die Strecke Δx nach „rechts“ in Richtung der ersten Achse („in x -Richtung“) vorrückt und dann (nach „oben“ oder „unten“) in Richtung der zweiten Achse bis Q geht, so entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck, ein sogenanntes **Steigungsdreieck**, wie in Abbildung 1 illustriert. Die „horizontale“ (zur ersten Achse parallele) Kathete hat die Länge Δx . Für die „vertikale“ (zur zweiten Achse parallele) Kathete wird der Wert $\Delta f = k\Delta x$ notiert. (Ist k positiv, so ist Δf die Länge dieser Kathete, ist k negativ, so ist Δf gleich minus der Länge dieser Kathete.) Das Verhältnis der (möglicherweise mit einem Minuszeichen versehenen) „vertikalen“ zur „horizontalen“ Kathetenlänge ist

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k \Delta x}{\Delta x} = k \quad (3.1)$$

und damit unabhängig von x_0 und Δx . Nach dem Strahlensatz sind daher alle

⁸ Man kann sie auch *Durchschnittsgeschwindigkeit* nennen. Dieser Zusatz ist in unserem Zusammenhang nicht so wichtig, wird aber dann bedeutsam, wenn ein Fahrzeug mal langsamer und mal schneller fährt. Dann ist die Durchschnittsgeschwindigkeit von der *Momentangeschwindigkeit* zu unterscheiden. Siehe auch Fußnote 7.

⁹ Der Hauptgrund, warum wir nicht „Stundenkilometer“ sagen sollten, besteht darin, dass dann dieses wichtige „pro“ verschluckt wird.

Steigungsdreiecke zueinander ähnlich¹⁰, was impliziert, dass ihre Hypotenusen mit den Koordinatenachsen alle die gleichen Winkel bilden. Das ist nur möglich, wenn der Graph eine Gerade ist.

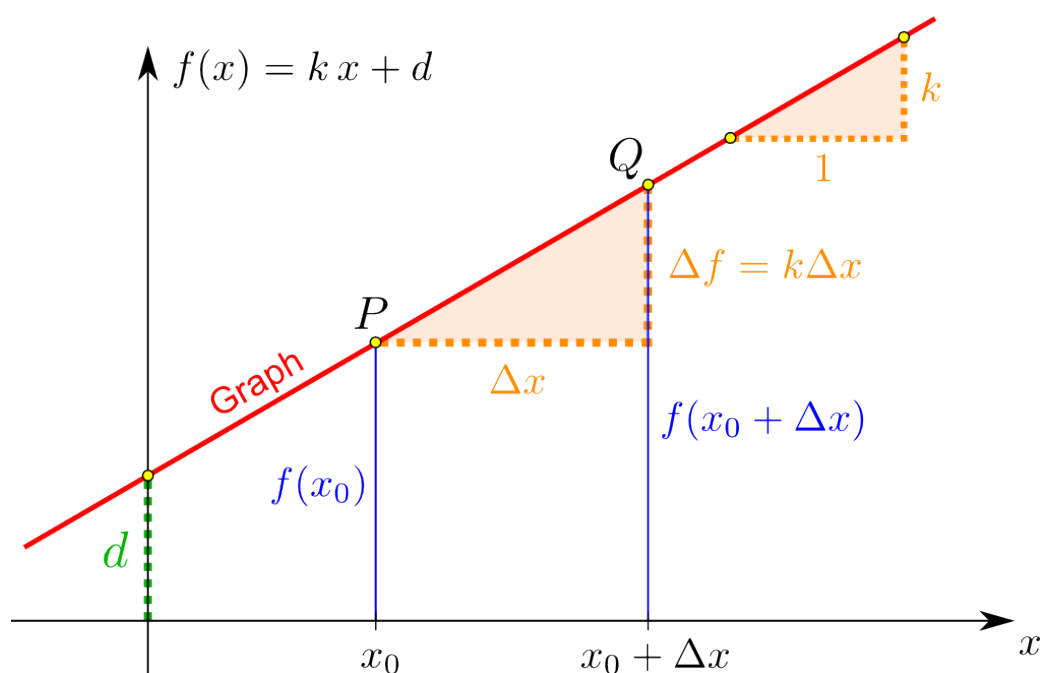


Abbildung 1: Graph einer linearen Funktion $f(x) = kx + d$ (wobei hier angenommen ist, dass k und d positiv sind). Eingezeichnet sind zwei Steigungsdreiecke (ein „allgemeines“ mit beliebigem $\Delta x > 0$ und eines – rechts oben – mit $\Delta x = 1$), die den Anstieg k des Graphen angeben, sowie der Abschnitt auf der zweiten Achse, d . Der hier skizzierte Sachverhalt wird benutzt, um den Graphen einer gegebenen linearen Funktion zu zeichnen und, umgekehrt, um die Konstanten k und d zu ermitteln („abzulesen“), wenn der Graph gegeben ist. Beachten Sie, dass die beiden Steigungsdreiecke (so wie *alle* Steigungsdreiecke, die für diese Funktion gezeichnet werden können) zueinander ähnlich sind und daher den gleichen Anstieg ausdrücken!

Wie die Beziehung (3.1) ausdrückt, ist in *jedem* Steigungsdreieck das Verhältnis $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ gleich k . Die Konstante k wird als **Anstieg** oder **Steigung** des Graphen bezeichnet. Der Anstieg ist also eine Größe, die die „Steilheit“ einer Geraden in Bezug auf die erste Koordinatenachse beschreibt.

Der Graph einer durch einen Term angegebenen linearen Funktion mit $k \neq 0$ kann gezeichnet werden, sobald zwei Punkte, die auf ihm liegen, ermittelt worden sind. Das wird beispielsweise mit einer der drei folgenden Methoden gemacht:

- **Methode 1:** Wegen $f(0) = d$ liegt der Punkt $(0, d)$ auf dem Graphen. Die Konstante d wird daher auch „Abschnitt auf der zweiten Achse“ oder „Ordinatenabschnitt“ genannt.

¹⁰ Zwei geometrische Figuren sind zueinander *ähnlich*, wenn das Verhältnis zweier Strecken der einen Figur stets gleich dem Verhältnis der entsprechenden Strecken der anderen Figur ist. Ähnliche Figuren sind „aufgeblasene“ bzw. „geschrumpfte“ Versionen voneinander, wobei alle Proportionen (Seitenverhältnisse) gleich bleiben. Insbesondere sind alle einander entsprechenden Winkel gleich.

Um einen zweiten Punkt des Graphen zu finden, geht man von diesem ersten Punkt eine beliebige Strecke $\Delta x > 0$ nach „rechts“ und die Strecke $k \Delta x$ „hinauf“ (wobei „hinauf“ im Fall negativer k bedeutet, die entsprechende Strecke „hinunter“ zu gehen). Das ergibt einen zweiten Punkt $(\Delta x, k \Delta x + d)$, der ebenfalls auf dem Graphen liegt.

Sie können diese Vorgangsweise auch so interpretieren: Die Zahlen Δx und $k \Delta x$ bestimmen die Seitenverhältnisse eines Steigungsdreiecks und damit die Richtung der Geraden. Gehen Sie vom Punkt $(0, d)$ aus Δx nach „rechts“ und $k \Delta x$ „hinauf“, so landen Sie im Punkt $(\Delta x, k \Delta x + d)$.

In den meisten Fällen wird es am einfachsten sein, $\Delta x = 1$ zu wählen.

Die Regel, die die Richtung der Geraden bestimmt, lautet dann: „1 nach rechts, k hinauf“, wobei „hinauf“ für negatives k „hinunter“ bedeutet.

Hat man auf diese Weise zwei Punkte des Graphen eingezeichnet, setzt man das Lineal an und zeichnet die Gerade durch sie.

Um den Graphen einer linearen Funktion zu zeichnen, die nur auf einem Intervall $[a, b]$ (also nicht auf ganz \mathbb{R}) definiert ist, können Sie diese Methode so adaptieren: Ermitteln Sie einen beliebigen Punkt P auf dem Graphen, beispielsweise $(a, f(a))$, und bestimmen Sie die Richtung der Geraden wie oben beschrieben mit Hilfe des Anstiegs k , d.h. gehen Sie vom Punkt P aus „1 nach rechts, k hinauf“ (oder „ Δx nach rechts, $k \Delta x$ hinauf“), um einen zweiten Punkt auf dem Graphen zu finden.

- **Methode 2:** Man bestimmt zunächst rechnerisch die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen. Wegen $f(0) = d$ liegt der Punkt $(0, d)$ auf dem Graphen. Er ist der Schnittpunkt des Graphen mit der zweiten Achse. Um den Schnittpunkt des Graphen mit der ersten Achse zu finden, muss die Nullstelle von f ermittelt, d.h. die Gleichung $f(x) = 0$ gelöst werden, was aber ganz leicht geht: Aus $kx + d = 0$ folgt $x = -\frac{d}{k}$. Das ergibt den Schnittpunkt $(-\frac{d}{k}, 0)$ des Graphen mit der ersten Achse. Hat man diese zwei Punkte eingezeichnet, setzt man das Lineal an und zeichnet die Gerade durch sie.
- **Methode 3:** Sie können natürlich auch zwei Punkte des Graphen von f ermitteln, indem Sie die Funktionswerte an zwei beliebigen Stellen berechnen. Das ist insbesondere dann sinnvoll, wenn die lineare Funktion, deren Graphen Sie zeichnen wollen, nur auf einem Intervall $[a, b]$ (also nicht auf ganz \mathbb{R}) definiert ist. Zeichnen Sie die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ und verbinden Sie sie mit dem Lineal!

Umgekehrt kann jede Gerade in der Zeichenebene, die nicht parallel zur zweiten Achse (also nicht „vertikal“) ist, als Graph einer linearen Funktion aufgefasst werden. Den Funktionsterm zu einem gegebenen Graphen zu ermitteln¹¹, wird oft als Übungsaufgabe gestellt. Auch eine Aufgabe dieser Art ist leicht zu bewältigen: Die Konstante d kann (entsprechend ihrem Namen) als „Abschnitt auf der zweiten Achse“, d.h. als zweite Koordinate des Schnittpunkts mit der zweiten Achse abgelesen werden. Um den Anstieg k zu ermitteln, wird ein (beliebiges!)

¹¹ Genauer gesagt soll in diesen Aufgaben *ein* Funktionsterm ermittelt werden, denn Funktionsterme sind nicht eindeutig bestimmt! So geben beispielsweise die Terme $2x + 6$ und $2(x + 3)$ die gleiche Funktion an.

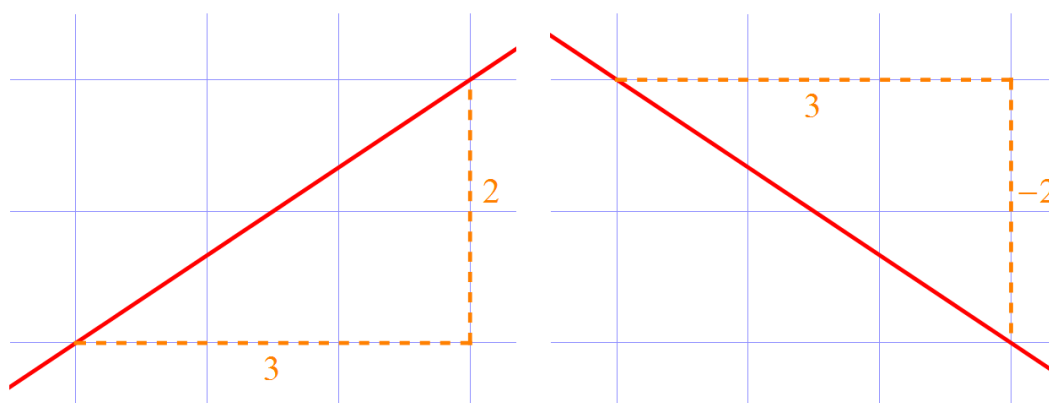


Abbildung 2: Um den Anstieg einer Geraden in der Zeichenebene abzulesen, benutzt man ein (beliebiges!) Steigungsdreieck. Falls – wie in diesen zwei Beispielen – ein Koordinatenraster eingezeichnet ist, lässt sich manchmal ein Steigungsdreieck mit ganzzahligen Werten für Δx und Δf finden. Links: Ein Steigungsdreieck, das $\Delta x = 3$ entspricht. Die zugehörige Differenz der Funktionswerte ist $\Delta f = 2$, und daher ist der Anstieg $k = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2}{3}$. Rechts: Ein Steigungsdreieck, das ebenfalls $\Delta x = 3$ entspricht. Die zugehörige Differenz der Funktionswerte ist nun $\Delta f = -2$, und daher ist der Anstieg in diesem Fall $k = \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{2}{3}$.

Steigungsdreieck gezeichnet. In den meisten Fällen wird es am einfachsten sein, $\Delta x = 1$ zu wählen. (In Abbildung 1 ist – rechts oben – ein solches Steigungsdreieck gezeichnet.) Gemäß der Regel „1 nach rechts, k hinauf“ kann dann k als Länge der „vertikalen“ Kathete (gegebenenfalls mit einem Minuszeichen, falls sie „hinunter“ weist, d.h. falls das zugehörige Δf negativ ist) abgelesen werden. Ist aufgrund des verwendeten Maßstabs oder der Lage der Geraden die Wahl $\Delta x = 1$ ungünstig, so kann auch jedes andere Steigungsdreieck verwendet werden. (Ist die Skizze mit einem Koordinatenraster ausgestattet, so ist dabei oft überhaupt nichts zu zeichnen, sondern lediglich ein geeignetes Steigungsdreieck gedanklich zu wählen.) Der Anstieg ist dann gleich dem Verhältnis $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Abbildung 2 zeigt zwei derartige Situationen, eine mit positivem und eine mit negativem Anstieg.

In Abbildung 3 sind fünf Graphen linearer Funktionen mit den zugehörigen Funktionstermen angegeben. Versuchen Sie, die Funktionsterme und die Graphen gemäß den oben besprochenen Regeln aufeinander zu beziehen!

4 Rechnerische Ermittlung linearer Funktionen

In der Praxis steht man oft vor der Aufgabe, jene lineare Funktion f zu ermitteln, deren Werte $f(x_0)$ und $f(x_1)$ an zwei Stellen x_0 und x_1 bekannt sind¹². Bezeichnen wir $f(x_0)$ mit y_0 und $f(x_1)$ mit y_1 , so ist diese Aufgabe gleichbedeutend damit, eine lineare Funktion zu finden, deren Graph durch zwei vorgegebene Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) verläuft. Um Aufgaben dieser Art schnell lösen zu können, drücken wir ganz allgemein k und d durch die gegebenen

¹² Eine Funktion mit gewünschten Eigenschaften zu „ermitteln“, zu „finden“ oder zu „bestimmen“ bedeutet, einen Funktionsterm anzugeben.

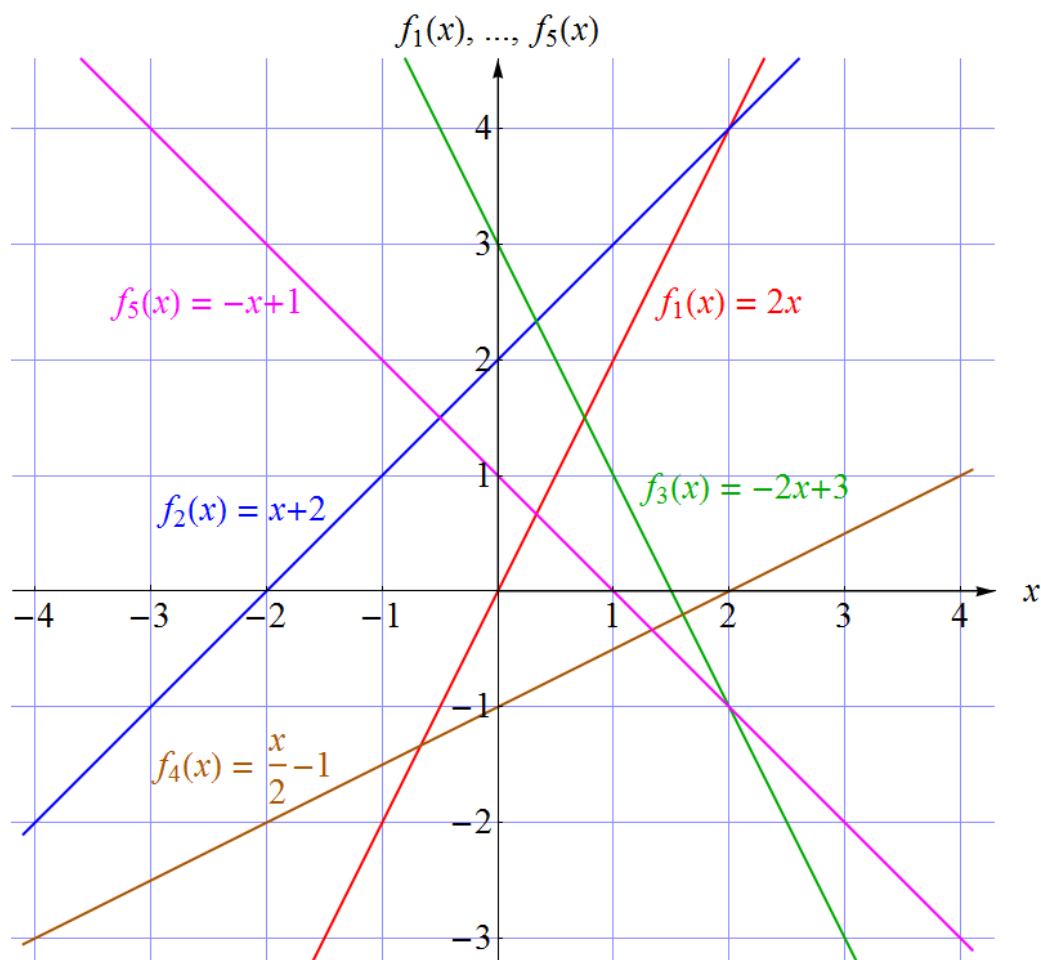


Abbildung 3: Die Graphen von fünf linearen Funktionen und ihre Funktionsterme. Überprüfen Sie für jeden dieser Graphen durch Ablesung von k und d die angegebenen Funktionsterme! Danach stellen Sie sich vor, es wären nur die Funktionsterme angegeben, und vollziehen Sie nach, wie Sie mit diesen Angaben die Geraden zeichnen können!

Zahlen aus: Mit $f(x) = kx + d$ ergibt sich

$$f(x_0) = kx_0 + d \quad (4.1)$$

$$f(x_1) = kx_1 + d, \quad (4.2)$$

woraus wir durch Subtraktion sofort

$$f(x_1) - f(x_0) = k(x_1 - x_0) \quad (4.3)$$

und daraus

$$k = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (4.4)$$

erhalten. Beachten Sie, dass diese Beziehung nichts anderes aussagt als (2.2): Die Änderungsrate k von f ist die „Änderung des Funktionswerts dividiert durch Änderung der Stelle“. Die Änderung der Stelle ist $\Delta x = x_1 - x_0$, die Änderung des Funktionswerts ist $\Delta f = f(x_1) -$

$f(x_0)$. Wir hätten (4.4) auch durch Einsetzen von $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$ und $\Delta x = x_1 - x_0$ in die Formel $k = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ herleiten können. Aus (4.1) folgern wir

$$d = f(x_0) - k x_0, \quad (4.5)$$

womit wir den Funktionsterm so umschreiben können, dass er direkt durch die vorgegebenen Zahlenwerte x_0 , $f(x_0)$, x_1 und $f(x_1)$ ausgedrückt ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= k x + d = k x + f(x_0) - k x_0 = f(x_0) + k (x - x_0) = \\ &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Unser Ergebnis (das Sie sich einprägen und merken sollten) lautet also¹³:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0). \quad (4.7)$$

Mit den Bezeichnungen y_0 für $f(x_0)$ und y_1 für $f(x_1)$ kann es auch in der Form¹⁴

$$f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) \quad (4.8)$$

geschrieben werden. Nun können die gegebenen Zahlenwerte von x_0 , x_1 , $f(x_0)$ (d.h. y_0) und $f(x_1)$ (d.h. y_1) eingesetzt werden, um sofort den gewünschten Funktionsterm zu erhalten.

Ist der Anstieg k einer linearen Funktion f und ein Funktionswert $f(x_0)$ an einer Stelle x_0 bekannt, so kann die in der Umformung (4.6) enthaltene Beziehung

$$f(x) = f(x_0) + k (x - x_0) \quad (4.9)$$

verwendet werden, um direkt die Zahlenwerte für x_0 und $f(x_0)$ einzusetzen. Auch diese Formel sollten Sie sich merken! Mit $x_0 = 0$ ergibt sich daraus $f(x) = f(0) + k x$, und mit (1.9) erhalten wir unsere frühere Darstellung

$$f(x) = k x + d, \quad (4.10)$$

vgl. (1.1).

Hier zwei Beispiele zur rechnerischen Ermittlung linearer Funktionen:

Beispiel 1: Es ist jene lineare Funktion f zu bestimmen, für die $f(2) = 4$ und $f(3) = 7$ gilt. Lösung: Mit $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $f(x_0) = 4$ und $f(x_1) = 7$ ergibt sich sofort

$$f(x) = 4 + \frac{7 - 4}{3 - 2} (x - 2) = 4 + 3 (x - 2) = 3 x - 2. \quad (4.11)$$

Die gesuchte Funktion f ist also durch $k = 3$ und $d = -2$ charakterisiert.

¹³ Überzeugen Sie sich von seiner Richtigkeit, indem Sie in (4.7) $x = x_0$ bzw. $x = x_1$ einsetzen!

¹⁴ Überzeugen Sie sich auch von der Richtigkeit dieser Version, indem Sie $x = x_0$ bzw. $x = x_1$ einsetzen!

Beispiel 2: Es ist jene lineare Funktion g zu bestimmen, deren Graph durch die Punkte $(3, 4)$ und $(5, 11)$ verläuft. Lösung: Mit $x_0 = 3$, $x_1 = 5$, $y_0 = 4$ und $y_1 = 11$ ergibt sich sofort

$$g(x) = 4 + \frac{11 - 4}{5 - 3} (x - 3) = 4 + \frac{7}{2} (x - 3) = \frac{7}{2} x - \frac{13}{2}. \quad (4.12)$$

Die gesuchte Funktion g ist also durch $k = \frac{7}{2}$ und $d = -\frac{13}{2}$ charakterisiert.

Beachten Sie, dass diese beiden Beispiele, obwohl unterschiedlich formuliert, die gleiche Struktur haben! Die erste Aufgabe könnte man auch so formulieren: Es ist jene lineare Funktion f zu bestimmen, deren Graph durch die Punkte $(2, 4)$ und $(3, 7)$ verläuft. Die zweite Aufgabe könnte man auch so formulieren: Es ist jene lineare Funktion g zu bestimmen, für die $g(3) = 4$ und $g(5) = 11$ gilt. In den unterschiedlichen Formulierungen kommen lediglich zwei Standpunkte zum Ausdruck, zwischen denen Sie schnell und sicher wechseln können sollten:

- Der eine Standpunkt betont den Aspekt der Anwendung einer Funktion auf Zahlen und verwendet Formulierungen, in denen von Stellen, Funktionswerten, Änderungen und Änderungsraten die Rede ist.
- Der andere, eher „geometrische“ Standpunkt macht sich die grafische Darstellung im Koordinatensystem zunutze und verwendet Formulierungen, in denen von Punkten und Graphen (Geraden) die Rede ist.

Sie beziehen sich aber beide auf den gleichen Sachverhalt. So besagen beispielsweise die Aussagen „für die Funktion h gilt $h(1) = -2$ “ und „der Graph von h verläuft durch den Punkt $(1, -2)$ “ genau das Gleiche.

Besonders wichtig im Zusammenhang mit diesen zwei Standpunkten beim Umgang mit linearen Funktionen ist es, sich die **Doppelrolle der Konstante** k vor Augen zu halten:

- Als Änderungsrate der betreffenden Funktion gibt ihr Wert Auskunft darüber, wie sich der Funktionswert „pro weitergerückter Strecke Δx “ ändert (nämlich um k).
- Als Anstieg des Graphen gibt ihr Wert Auskunft darüber, wie „steil“ dieser ist.

Vergessen Sie also bitte nicht: Der Anstieg des Graphen einer linearen Funktion ist stets gleich ihrer Änderungsrate. Dieses Konzept wird beispielsweise im Straßenverkehr ausgenutzt, um anzugeben, wie steil eine Straße ansteigt. Wenn Sie in einem Verkehrszeichen eine Steigungsangabe von 12% sehen, so bedeutet das, dass die betreffende Straße, als Graph einer linearen Funktion aufgefasst, den Anstieg $k = 0.12$ besitzt. Auf einer horizontal gemessenen Strecke von 1 km steigt sie um 120 m (also um 12 Prozent von 1 km) an. Auch in der Formulierung „120 m Höhenzuwachs pro Kilometer“ entdecken wir das für eine Rate charakteristische „pro“!

5 Schnittmengen der Graphen linearer Funktionen

Sind zwei lineare Funktionen f und g gegeben, so können wir fragen, ob es eine oder mehrere Stellen x gibt, an denen die Funktionswerte übereinstimmen, d.h. an denen

$$f(x) = g(x) \quad (5.1)$$

gilt. Das ist nichts anderes als eine lineare Gleichung¹⁵. Ist x eine Lösung, so sind die Punkte $(x, f(x))$ und $(x, g(x))$ identisch, d.h. es handelt sich nur um einen einzigen Punkt, der auf *beiden* Graphen liegt. Diesen Sachverhalt können wir auch umgekehrt betrachten: Jeder gemeinsame Punkt der Graphen von f und g definiert eine Lösung von (5.1), nämlich einfach als erste Koordinate dieses Punktes. Die Gleichung (5.1) kann daher als *geometrisches Problem* aufgefasst werden: Man bestimme die **Durchschnittsmenge** (kurz **Schnittmenge**) der Graphen von f und g !

Beispiel:

$$f(x) = 3x - 5 \quad (5.2)$$

$$g(x) = 2x - 1. \quad (5.3)$$

Die Gleichung (5.1) lautet damit

$$3x - 5 = 2x - 1. \quad (5.4)$$

Wir lösen sie (mit Äquivalenzumformungen):

$$\begin{array}{rcl} 3x - 5 & = & 2x - 1 \quad | \quad -2x \\ x - 5 & = & -1 \quad | \quad +5 \\ x & = & 4 \end{array} \quad (5.5)$$

Sie besitzt also genau eine Lösung, nämlich 4. Die zugehörigen Funktionswerte sind $f(4) = g(4) = 7$. Zeichnen Sie zur Übung die Graphen der beiden Funktionen und vergewissern Sie sich, dass der Punkt $S = (4, 7)$ ihr Schnittpunkt ist!

Da die Graphen linearer Funktionen Geraden sind, gibt es im Allgemeinen für Gleichungen vom Typ (5.1) drei Lösungsfälle:

- Die Anstiege der Graphen von f und g sind verschieden. In diesem Fall haben ihre Graphen verschiedene Richtungen. Sie besitzen genau einen Schnittpunkt, was im Gegenzug bedeutet, dass die Gleichung (5.1) genau eine Lösung besitzt. Rechnerisch merken wir das daran, dass die Gleichung nach einer Äquivalenzumformung auf eine einzige Lösung führt.
- Die Anstiege der Graphen von f und g sind gleich, aber die Graphen sind verschieden (was wir etwa daran erkennen, dass ihre „Abschnitte auf der zweiten Achse“, d.h. ihre Konstanten d , verschieden sind). In diesem Fall besitzen die Graphen keinen Schnittpunkt (sie sind parallel, aber nicht identisch), was im Gegenzug bedeutet, dass die Gleichung (5.1) keine Lösung besitzt. Rechnerisch merken wir das daran, dass die Gleichung nach einer Äquivalenzumformung auf einen Widerspruch (etwa $1 = 0$) führt.

¹⁵ Siehe bei Bedarf das Skriptum *Lineare Gleichungen und Äquivalenzumformungen*.

- Die Anstiege der Graphen von f und g sind gleich, und die Graphen sind identisch (was wir etwa daran erkennen, dass auch ihre „Abschnitte auf der zweiten Achse“, d.h. ihre Konstanten d , gleich sind). In diesem Fall ist $f = g$. Wir haben es dann mit einer einzigen Funktion und daher mit einer einzigen Geraden zu tun, was im Gegenzug bedeutet, dass jede reelle Zahl Lösung der Gleichung (5.1) ist. Rechnerisch merken wir das daran, dass auf der linken und auf der rechten Seite der Gleichung das Gleiche steht, sodass die Variable nach einer Äquivalenzumformung herausfällt und sich eine wahre Aussage (wie $0 = 0$) ergibt.

Das Schnittpunktproblem kann auch anders betrachtet werden: Definieren wir die Differenz unserer zwei Funktionen als eine weitere Funktion h durch

$$h(x) = f(x) - g(x), \quad (5.6)$$

so ist die Gleichung (5.1) äquivalent zur Gleichung

$$h(x) = 0, \quad (5.7)$$

stellt also die Frage nach den Nullstellen von h dar. Geometrisch betrachtet ist eine Nullstelle von h der Schnittpunkt des Graphen von h mit der ersten Achse¹⁶.

Für das Beispiel (5.2) – (5.3) ist die Differenzfunktion durch

$$h(x) = x - 4 \quad (5.8)$$

gegeben. Ihre (einzige) Nullstelle ist klarerweise 4, was nichts anderes als die bereits oben ermittelte Lösung der Gleichung (5.4) ist. (Zeichnen Sie zur Übung den Graphen von h !)

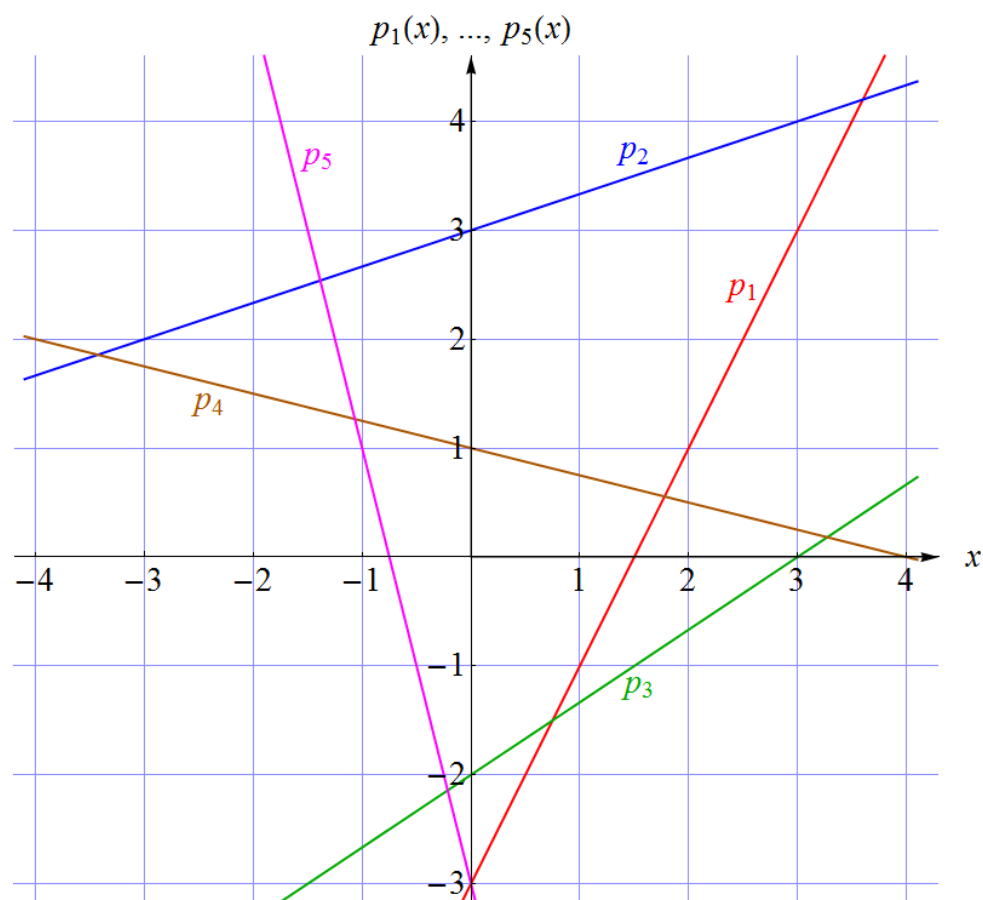
Da Schnittpunkte und Nullstellen von Graphen aus Zeichnungen (zumindest näherungsweise) abgelesen werden können, haben wir hier einen (sehr einfachen) Beispieltyp für das *grafische Lösen von Gleichungen* vor uns.

¹⁶ Genauer: Die x -Koordinate dieses Schnittpunkts. Erinnern Sie sich an den Unterschied zwischen „Stellen“ und „Punkten“, wie er im Skriptum *Funktionsdarstellungen: Term, Graph, Tabelle* beschrieben wurde!

6 Übungsaufgaben

Hier einige Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Die folgende Abbildung zeigt fünf Graphen linearer Funktionen. Geben Sie Funktions-
terme für sie an!



Lösungen:

$$\begin{aligned}
 ' \mathfrak{E} - x \mathfrak{V} - &= (x)^{\mathfrak{S}} d \\
 ' \mathfrak{I} + \frac{\mathfrak{V}}{x} - &= (x)^{\mathfrak{V}} d \\
 ' \mathfrak{Z} - x \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{Z}} &= (x)^{\mathfrak{E}} d \\
 ' \mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{E}}{x} &= (x)^{\mathfrak{Z}} d \\
 ' \mathfrak{E} - x \mathfrak{Z} &= (x)^{\mathfrak{I}} d
 \end{aligned}$$

- Die Funktionen q_1, \dots, q_5 sind gegeben durch

$$q_1(x) = \frac{3}{2}x + 1 \quad (6.1)$$

$$q_2(x) = 2x - 3 \quad (6.2)$$

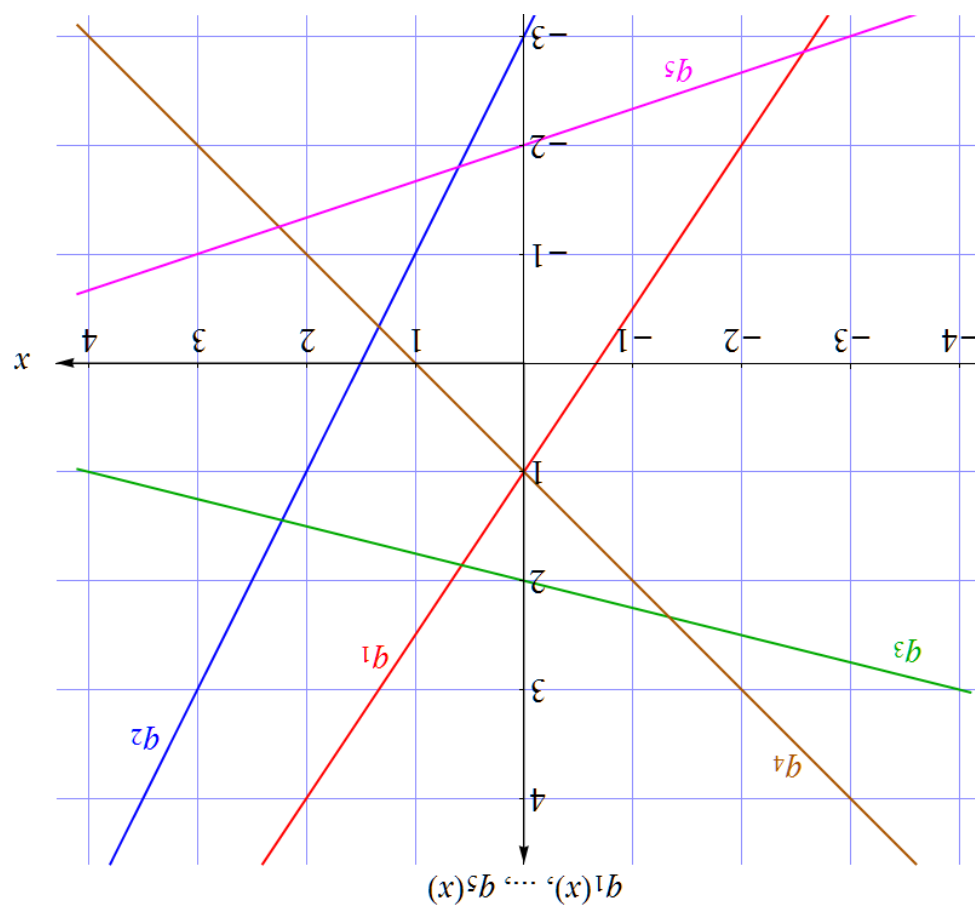
$$q_3(x) = -\frac{x}{4} + 2 \quad (6.3)$$

$$q_4(x) = -x + 1 \quad (6.4)$$

$$q_5(x) = \frac{x}{3} - 2 \quad (6.5)$$

Zeichnen Sie ihre Graphen!

Lösung:



- Bestimmen Sie jene lineare Funktion g , für die $g(1) = 3$ und $g(5) = -13$ gilt!

Lösung:

$$y - x = -4$$

- Bestimmen Sie jene lineare Funktion h , deren Graph durch die Punkte $(2, 8)$ und $(4, 11)$ verläuft!

Lösung:

$$y - x = 1,5$$

- Bestimmen Sie jene lineare Funktion p , deren Anstieg gleich 7 ist und deren Graph durch den Punkt $(2, 3)$ verläuft!

Lösung:

$$y - x = 1$$

- Gegeben sind die linearen Funktionen f und g durch

$$f(x) = 2x - 3 \quad (6.6)$$

$$g(x) = 7x + 2. \quad (6.7)$$

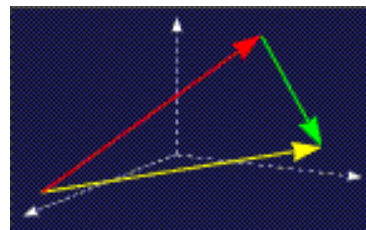
Ermitteln Sie den Schnittpunkt S ihrer Graphen!

Lösung:

$$(x, y) = S$$

Weitere Möglichkeiten, Ihr Wissen über lineare Funktionen und ihre Graphen zu überprüfen und zu festigen, bieten zahlreiche Ressourcen im Web, unter anderem der *Kacheltest* http://www.mathe-online.at/kacheltests/lineare_funktionen_und_ihre_graphen/.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Juli 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Quadratische Funktionen und ihre Graphen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

Dieses Skriptum behandelt die Funktionsterme, Graphen und wichtigsten Eigenschaften quadratischer Funktionen.

1 Quadratische Funktionen

Eine reelle **quadratische Funktion** ist eine reelle Funktion, deren Zuordnungsvorschrift vom Typ

$$x \mapsto ax^2 + bx + c \quad (1.1)$$

ist, wobei a , b und c fix vorgegebene reelle Zahlen (Konstanten¹) sind und $a \neq 0$ ist. Mit anderen Worten: Der Funktionsterm einer quadratischen Funktion ist ein Polynom zweiten Grades (weshalb quadratische Funktionen auch **Polynomfunktionen zweiten Grades**² genannt werden). Die größtmögliche Definitionsmenge einer reellen quadratischen Funktion ist ganz \mathbb{R} . Bei Bedarf kann die Definitionsmenge natürlich als echte Teilmenge von \mathbb{R} festgelegt werden.

Mit quadratischen Termen und quadratischen Gleichungen haben Sie sicher schon Bekanntschaft gemacht³. Einige der Rechentechniken, die Sie dabei gelernt haben, werden nun bei der Diskussion quadratischer Funktionen benötigt, und einige der Sachverhalte, die Sie bereits kennen, werden in diesem Skriptum um weitere Gesichtspunkte ergänzt, insbesondere was die Graphen quadratischer Funktionen betrifft. Wir beginnen damit, einige Grundeigenschaften quadratischer Funktionen, die durch Untersuchung der Funktionsterme erschlossen werden können, zu besprechen.

¹ Auch *Parameter* oder *Koeffizienten* genannt.

² Siehe dazu das Skriptum *Polynome*. Eine Funktion mit Zuordnungsvorschrift (1.1) und $a = 0$ ist eine lineare Funktion. Für lineare Funktionen siehe das Skriptum *lineare Funktionen und ihre Graphen*.

³ Zu letzteren siehe das Skriptum *quadratische Gleichungen*.

2 Extrema und Monotonieverhalten quadratischer Funktionen

Jede quadratische Funktion f (mit Zuordnungsvorschrift vom Typ (1.1) und Definitionsmenge \mathbb{R}) besitzt einen Bereich, in dem ihre Funktionswerte bei wachsendem x ebenfalls wachsen und einen Bereich, in dem ihre Funktionswerte bei wachsendem x fallen, d.h. kleiner werden. Die einfachste quadratische Funktion ist durch

$$g(x) = x^2 \quad (2.1)$$

definiert. Sehen wir uns ihr Verhalten an: Ein Blick auf die Funktionswerte

$$g(-3) = 9 \quad (2.2)$$

$$g(-2) = 4 \quad (2.3)$$

$$g(-1) = 1 \quad (2.4)$$

$$g(0) = 0 \quad (2.5)$$

$$g(1) = 1 \quad (2.6)$$

$$g(2) = 4 \quad (2.7)$$

$$g(3) = 9 \quad (2.8)$$

zeigt, dass die Funktionswerte mit zunehmendem x

- im Bereich negativer x -Werte kleiner werden (wir nennen die Funktion g in diesem Bereich daher *monoton fallend*)
- und im Bereich positiver x -Werte größer werden (wir nennen die Funktion g in diesem Bereich daher *monoton wachsend*)⁴.

An der Stelle $x = 0$ nimmt die Funktion ihr Minimum an. Ihr Funktionswert ist dort 0. An keiner anderen Stelle wird dieser Wert angenommen oder unterschritten.

Sehen wir uns zum Vergleich die durch

$$h(x) = -x^2 \quad (2.9)$$

definierte quadratische Funktion an: Ein Blick auf die Funktionswerte

$$h(-3) = -9 \quad (2.10)$$

$$h(-2) = -4 \quad (2.11)$$

$$h(-1) = -1 \quad (2.12)$$

$$h(0) = 0 \quad (2.13)$$

$$h(1) = -1 \quad (2.14)$$

$$h(2) = -4 \quad (2.15)$$

$$h(3) = -9 \quad (2.16)$$

⁴ Mehr dazu finden Sie im Skriptum *Der Funktionenzoo*.

zeigt, dass h im Bereich negativer x -Werte monoton wachsend und im Bereich positiver x -Werte monoton fallend ist. An der Stelle $x = 0$ nimmt diese Funktion ihr Maximum an. Ihr Funktionswert ist dort 0, und an keiner anderen Stelle wird dieser Wert angenommen oder überschritten.

Ganz allgemein zeigt *jede* quadratische Funktion vom Typ (1.1) ein analoges Verhalten. Sehen wir uns das anhand des etwas komplizierteren Beispiels

$$q(x) = 3x^2 + 5x + 7 \quad (2.17)$$

an! Wir ergänzen den Funktionsterm auf ein vollständiges Quadrat⁵. Dazu heben wir zuerst aus den ersten beiden Summanden den Koeffizienten von x^2 , also die Zahl 3, heraus:

$$3x^2 + 5x + 7 = 3 \left(x^2 + \frac{5}{3}x \right) + 7. \quad (2.18)$$

Dem in der Klammer auftretenden Term $x^2 + \frac{5}{3}x$ „fehlt“ zu einem vollständigen Quadrat nur mehr ein Anteil $\left(\frac{5}{2 \cdot 3}\right)^2$. Davon können Sie sich leicht selbst überzeugen, indem Sie mit der ersten binomischen Formel⁶ berechnen:

$$\left(x + \frac{5}{2 \cdot 3} \right)^2 = \underbrace{x^2 + 2x \cdot \frac{5}{2 \cdot 3}}_{x^2 + \frac{5}{3}x} + \left(\frac{5}{2 \cdot 3} \right)^2 = x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{2 \cdot 3} \right)^2. \quad (2.19)$$

Um also $x^2 + \frac{5}{3}x$ in die Form „Quadrat eines linearen Terms + eine Zahl“ zu bringen, können wir $\left(\frac{5}{2 \cdot 3}\right)^2$ addieren und gleich wieder subtrahieren:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{5}{3}x &= x^2 + \frac{5}{3}x + \underbrace{\left(\frac{5}{2 \cdot 3} \right)^2 - \left(\frac{5}{2 \cdot 3} \right)^2}_{\left(x + \frac{5}{2 \cdot 3} \right)^2} = \\ &= \left(x + \frac{5}{2 \cdot 3} \right)^2 - \left(\frac{5}{2 \cdot 3} \right)^2 = \left(x + \frac{5}{6} \right)^2 - \frac{25}{36}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Das setzen wir nun in (2.18) ein und erhalten

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x + 7 &= 3 \left(\left(x + \frac{5}{6} \right)^2 - \frac{25}{36} \right) + 7 = \\ &= 3 \left(x + \frac{5}{6} \right)^2 - 3 \cdot \frac{25}{36} + 7 = 3 \left(x + \frac{5}{6} \right)^2 + \frac{59}{12}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

⁵ Dabei gehen wir ähnlich vor, wie es im Skriptum *Quadratische Gleichungen* vorgeführt worden ist.

⁶ Siehe das Skriptum *Identitäten*.

Damit können wir unsere Funktion q statt wie in (2.17) auch in der Form

$$q(x) = 3 \left(x + \frac{5}{6} \right)^2 + \frac{59}{12} \quad (2.22)$$

anschreiben. In dieser Form lässt sich ihr Verhalten leichter ablesen als mit dem ursprünglich angegebenen Funktionsterm (2.17). Ist $x = -\frac{5}{6}$, so ist $3 \left(x + \frac{5}{6} \right)^2 = 0$, d.h. der Funktionswert ist an dieser Stelle durch $q(-\frac{5}{6}) = \frac{59}{12}$ gegeben. An jeder *anderen* Stelle ist der Funktionswert größer (da ja dann noch eine positive Zahl addiert wird), was nichts anderes besagt, als dass die Funktion an der Stelle $x = -\frac{5}{6}$ ihr Minimum annimmt. Weiters gilt:

- Wir nehmen ein x im Bereich $x + \frac{5}{6} < 0$, d.h. $x < -\frac{5}{6}$. Wird es geringfügig vergrößert, so wächst auch $x + \frac{5}{6}$, was bedeutet, dass $x + \frac{5}{6}$ näher zum Nullpunkt rückt. (Nicht vergessen: von $x + \frac{5}{6}$ haben wir angenommen, dass es negativ ist!) Daher werden die Funktionswerte kleiner. In diesem Bereich ist die Funktion q also monoton fallend.
- Wir nehmen ein x im Bereich $x + \frac{5}{6} > 0$, d.h. $x > -\frac{5}{6}$. Wird es vergrößert, so wächst auch $x + \frac{5}{6}$, was nun bedeutet, dass $x + \frac{5}{6}$ vom Nullpunkt weg rückt. (Nicht vergessen: von $x + \frac{5}{6}$ haben wir nun angenommen, dass es positiv ist!) Daher werden die Funktionswerte größer. In diesem Bereich ist die Funktion q also monoton wachsend.

Wieder zeigt sich das Bild: Die Funktion besitzt eine *Extremstelle*⁷ (in diesem Beispiel die Minimumstelle $-\frac{5}{6}$). Diese teilt die Zahlengerade in zwei Bereiche, in denen die Funktion jeweils monoton ist – in einem monoton fallend, im anderen monoton wachsend.

Um sich zu vergewissern, dass dieses Verhalten bei *jeder* quadratischen Funktion auftritt, kann der Term einer allgemeinen quadratischen Funktion, wie in (1.1) angegeben, genauso behandelt werden, wie wir es soeben anhand des Beispiels (2.17) durchgeführt haben. Kompakt angeschrieben, sieht die entsprechende Umformung so aus:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) + c = \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) - a \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + c = \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Sie können diese Rechnung auch von hinten aufzäumen, von $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ ausgehen, das Quadrat mit Hilfe der ersten binomischen Formel ausmultiplizieren und sich davon überzeugen, dass genau $ax^2 + bx + c$ herauskommt!

⁷ Eine *Extremstelle* einer Funktion ist eine Stelle, die entweder eine *Minimumstelle* oder eine *Maximumstelle* ist. Alle in diesem Skriptum auftretenden Extremstellen sind *globale* Extremstellen (*globale* Minimumstellen bzw. *globale* Maximumstellen). Man sagt auch oft kurz, dass eine Funktion an einer Stelle ein *Extremum* (*Minimum* oder *Maximum*) hat (bzw. annimmt). Mehr dazu finden Sie im Skriptum *Der Funktionenzoo*.

Mit dem wichtigen Ergebnis (2.23) können wir nun einige **für beliebige quadratische Funktionen geltende Aussagen** machen: Die durch

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (2.24)$$

(mit $a \neq 0$) definierte quadratische Funktion f besitzt an der Stelle $x = -\frac{b}{2a}$ ein **Extremum**. Der Funktionswert an dieser Extremstelle ist durch

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2}{4a} + c \quad (2.25)$$

gegeben. Weiters gilt:

- Ist $a > 0$, so können die Funktionswerte nirgends kleiner sein als $-\frac{b^2}{4a} + c$, d.h. die Stelle $x = -\frac{b}{2a}$ ist eine **Minimumstelle**. Die Funktion ist dann im Bereich $x < -\frac{b}{2a}$ **monoton fallend** und im Bereich $x > -\frac{b}{2a}$ **monoton wachsend**.
- Ist $a < 0$, so können die Funktionswerte nirgends größer sein als $-\frac{b^2}{4a} + c$, d.h. die Stelle $x = -\frac{b}{2a}$ ist eine **Maximumstelle**. Die Funktion ist dann im Bereich $x < -\frac{b}{2a}$ **monoton wachsend** und im Bereich $x > -\frac{b}{2a}$ **monoton fallend**.

Um diese allgemeinen Aussagen für das zuvor betrachtete Beispiel (2.17) zu überprüfen, setzen Sie einfach $a = 3$, $b = 5$ und $c = 7$ ein. Die Extremstelle (da $a = 3 > 0$ ist, handelt es sich um eine Minimumstelle) ergibt sich zu $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2 \cdot 3} = -\frac{5}{6}$, in Übereinstimmung mit dem bereits früher erhaltenen Resultat.

3 Nullstellen quadratischer Funktionen

An welchen Stellen ist der Funktionswert einer quadratischen Funktion gleich 0? Bezeichnen wir den Funktionsterm wieder mit $ax^2 + bx + c$, so sind die Nullstellen genau jene x -Werte, für die

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (3.1)$$

gilt, also die Lösungen einer quadratischen Gleichung. Wie bereits im Skriptum über quadratische Gleichungen ausführlich besprochen, gibt es hinsichtlich der Zahl der Lösungen (im Rahmen der reellen Zahlen) drei Möglichkeiten:

- Manchmal gibt es keine Lösung. (Beispiel: $x^2 + 1 = 0$.)
- Manchmal gibt es eine einzige Lösung. (Beispiel: $x^2 = 0$. Die einzige Lösung ist $x = 0$.)
- Manchmal gibt es zwei Lösungen. (Beispiel: $x^2 - 1 = 0$. Die beiden Lösungen sind $x = -1$ und $x = 1$.)

Eine quadratische Funktion hat daher entweder keine Nullstelle oder eine Nullstelle oder zwei Nullstellen.

Um die Nullstellen zu finden, kann eine der beiden Lösungsformeln für quadratische Gleichungen verwendet werden. Ist $a = 1$, so bietet sich die „kleine Lösungsformel“ an. Ist $a \neq 1$,

so kann entweder die „große Lösungsformel“ verwendet werden oder, nach Division durch a , ebenfalls die „kleine Lösungsformel“.

Wir können zur Bestimmung der Nullstellen aber auch das im vorigen Abschnitt erzielte Ergebnis (2.23) verwenden. Mit f wie in (2.24) definiert, sind die Nullstellen jene x -Werte, die die Gleichung

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0 \quad (3.2)$$

erfüllen. Addieren wir auf beiden Seiten $\frac{b^2}{4a} - c$, so nimmt die Gleichung die Form

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c \quad (3.3)$$

an, und nach Division beider Seiten durch a (was wegen $a \neq 0$ möglich ist) vereinfacht sie sich zu

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}, \quad (3.4)$$

was wir auch in der Form

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (3.5)$$

schreiben können. Auf der linken Seite steht ein Quadrat, und im Rahmen der reellen Zahlen ist ein Quadrat immer ≥ 0 . Wie es weiter geht, hängt daher von der rechten Seite ab. Deren Nenner ist immer positiv, aber der Zähler, $b^2 - 4ac$, kann negativ, 0 oder positiv sein. Damit ergibt sich:

- Ist $b^2 - 4ac < 0$, so ist die linke Seite von (3.5) stets größer-gleich Null, die rechte Seite aber negativ. Das kann kein x erfüllen – die Funktion besitzt keine Nullstelle.
- Ist $b^2 - 4ac = 0$, so reduziert sich (3.5) auf die Aussage $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$, daher $x + \frac{b}{2a} = 0$. In diesem Fall besitzt die Funktion genau eine Nullstelle, nämlich $x = -\frac{b}{2a}$.
- Ist $b^2 - 4ac > 0$, so ist die rechte Seite von (3.5) positiv, sodass wir aus ihr die Wurzel ziehen können. Es ist dann $x + \frac{b}{2a}$ entweder gleich $-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$ oder gleich $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$. (Die Betragsstriche rühren daher, dass $\sqrt{a^2} = |a|$ ist.) Da aber $|a|$, je nach dem Vorzeichen von a , entweder $-a$ oder a ist, ist $x + \frac{b}{2a}$ entweder gleich $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ oder gleich $-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. In diesem Fall besitzt die Funktion also zwei Nullstellen, die wir gemeinsam in der Form $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ anschreiben können.

Im Grunde haben wir mit dieser Argumentation nichts anderes gemacht, als die „große Lösungsformel“ für quadratische Gleichungen noch einmal herzuleiten!

Es gibt eine interessante Beziehung zwischen den Nullstellen und der Extremstelle einer quadratischen Funktion:

- Besitzt eine quadratische Funktion der Form (2.24) genau eine Nullstelle, so ist diese mit der Extremstelle identisch. Beispiel: Mit $a = 1$ und $b = c = 0$ ist $f(x) = x^2$. Die einzige Nullstelle ($x = 0$) ist genau jene Stelle, an der f ihr Minimum annimmt.

- Besitzt eine quadratische Funktion der Form (2.24) zwei Nullstellen, so sind diese durch $-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ gegeben. Ihre Summe ist daher gleich $-\frac{b}{a}$ (die beiden Terme mit den Wurzeln fallen aufgrund der unterschiedlichen Vorzeichen weg). Ihr Mittelwert⁸ (die halbe Summe) ist daher gleich $-\frac{b}{2a}$, und das ist gerade die Extremstelle! Daher gilt ganz allgemein: Die Extremstelle ist gleich dem Mittelwert der beiden Nullstellen. Geometrisch ausgedrückt: Die Extremstelle liegt auf der Zahlengeraden genau in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen, d.h. sie hat von ihnen den gleichen Abstand. Beispiel: Mit $a = 1$, $b = 0$ und $c = -1$ ist $f(x) = x^2 - 1$. Die Nullstellen sind $x = -1$ und $x = 1$. Genau in der Mitte liegt die Stelle $x = 0$, und das ist gerade jene Stelle, an der die Funktion ihren kleinsten Wert (nämlich -1) annimmt.

4 Graphen quadratischer Funktionen

Die bisher diskutierten Eigenschaften widerspiegeln sich in leicht erkennbarer Weise in den Graphen⁹ quadratischer Funktionen. Beginnen wir mit der durch

$$g(x) = x^2 \quad (4.1)$$

definierten Funktion g , der einfachsten quadratischen Funktion, die wir oben in (2.1) bereits betrachtet haben. Die Liste ausgewählter Funktionswerte (2.2) – (2.8) zeigt ein für quadratische Funktionen typisches *nichtlineares* Verhalten. Gehen wir von der Minimumstelle 0 aus und vergrößern x , so wachsen die Funktionswerte $g(x)$ zuerst recht langsam, dann aber *stärker als linear*. Auf dem Weg von $x = 0$ bis $x = 1$ hat $g(x)$ um 1 zugenommen, auf dem Weg von $x = 1$ bis $x = 2$ beträgt der Zuwachs 3, auf dem Weg von $x = 2$ bis $x = 3$ beträgt der Zuwachs 5, und je weiter wir gehen, umso größer wird die Zunahme, wenn x um 1 erhöht wird. Beim Schritt von $x = 10$ auf $x = 11$ beträgt sie bereits $11^2 - 10^2 = 121 - 100 = 21$. Im Bereich negativer x verzeichnen wir ein analoges, aber „gespiegeltes“ Verhalten. Fügen wir der Aufzählung noch einige Werte hinzu:

$$g(-0.5) = 0.25 \quad (4.2)$$

$$g(-0.1) = 0.01 \quad (4.3)$$

$$g(-0.01) = 0.0001 \quad (4.4)$$

$$g(0.01) = 0.0001 \quad (4.5)$$

$$g(0.1) = 0.01 \quad (4.6)$$

$$g(0.5) = 0.25 \quad (4.7)$$

Wir sehen, dass die Funktionswerte an Stellen, die in der Nähe der Minimumstelle 0 liegen, sehr klein sind. Das liegt daran, dass das Quadrieren den Betrag kleiner Zahlen nicht vergrößert, sondern verkleinert. So ist etwa das Quadrat von 0.1 gleich 0.01, also gleich einem Zehntel von 0.1. Der Graph der Funktion g ist in Abbildung 1 wiedergegeben. Die Funktionswerte an den Stellen -2 , -1 , 0 , 1 und 2 können sofort anhand des Koordinatenrasters überprüft werden,

⁸ Der Mittelwert zweier Zahlen ist $\frac{\text{erste Zahl} + \text{zweite Zahl}}{2}$.

⁹ Zur Erinnerung: Der Graph einer Funktion f ist die Menge aller Punkte der Zeichenebene mit Koordinaten $(x, f(x))$. Siehe dazu das Skriptum *Funktionsdarstellungen: Term, Graph, Tabelle*.

da sie alle ganzzahlig sind. Betrachten Sie den Graphen und überprüfen Sie, dass die Punkte $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ und $(2, 4)$ auf ihm liegen! Den Wertepaaren (4.2) und (4.7) entsprechen die Punkte $(-0.5, 0.25)$ und $(0.5, 0.25)$. Man kann zumindest näherungsweise erkennen, dass sie auf dem Graphen liegen.

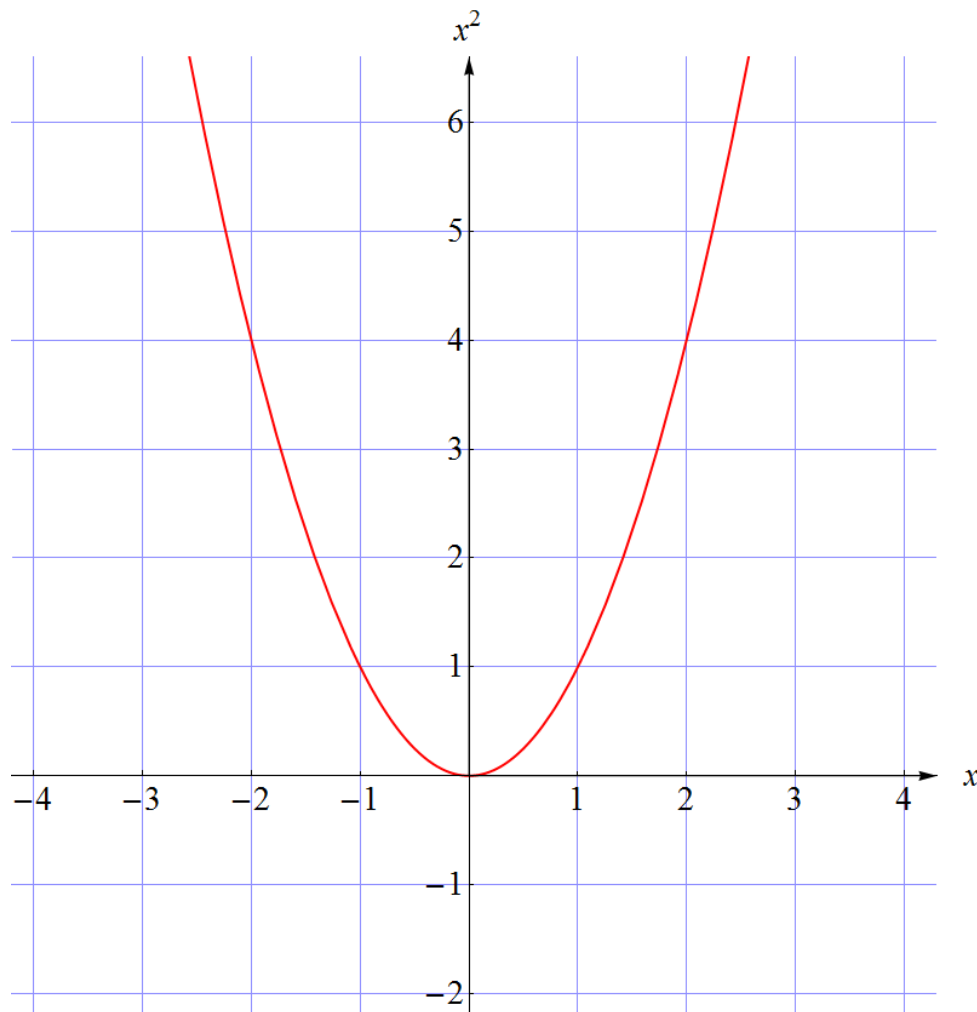


Abbildung 1: Graph der Funktion $g(x) = x^2$. Er wird auch *Normparabel* genannt.

Gehen wir die wichtigsten Charakteristika der Funktion bzw. des Graphen durch:

- Der Graph geht durch den Ursprung $(0, 0)$, und alle seine anderen Punkte liegen oberhalb der ersten Achse¹⁰ (x -Achse). Das entspricht der Tatsache, dass $g(x) = x^2 \geq 0$ für alle reellen x und dass der Funktionswert lediglich an der Stelle 0 gleich 0 ist. Wegen $x^2 > 0$ für alle reellen $x \neq 0$ ist der Funktionswert an allen anderen Stellen positiv.
- Der Punkt $(0, 0)$ ist der „tiefste“ Punkt des Graphen. Das entspricht der Tatsache, dass die Funktion g an der Stelle 0 ihr Minimum annimmt. Der kleinste Funktionswert ist 0.

¹⁰ Da die Variable im allgemeinen Fall nicht x heißen muss, werden wir im Folgenden die Koordinatenachsen als „erste Achse“ und „zweite Achse“ bezeichnen. Um die Sprache nicht unnötig zu verkomplizieren, sprechen wir aber weiterhin von x -Werten und x -Koordinaten.

An keiner von 0 verschiedenen Stelle ist der Funktionswert kleiner als dieser Minimalwert.

- Links von der zweiten Achse fällt der Graph mit zunehmendem x ab, rechts von ihr steigt er mit zunehmendem x an. Das entspricht dem bereits diskutierten Monotonieverhalten: Im Bereich negativer x ist g monoton fallend, im Bereich positiver x ist g monoton wachsend.
- In der Nähe der Minimumstelle 0 „schmiegt“ sich der Graph an die erste Achse. Er hat dort keinen Knick, sondern verläuft ganz „glatt“. Das entspricht der Tatsache, dass die Funktionswerte, wie die Aufzählung (4.2) – (4.7) zeigt, in der Nähe der Stelle 0 sehr klein sind.
- Wandert x , von 0 ausgehend, nach rechts, so steigt der Graph immer steiler an. Dieses nichtlineare Verhalten geht aus der Aufzählung (2.2) – (2.8) hervor. Abbildung 1 zeigt natürlich nur einen Ausschnitt der Zeichenebene und damit nur einen Teil des Graphen. Man kann sich aber leicht vorstellen, wie er in noch größeren Ausschnitten aussieht: Seine beiden hochgerekten „Arme“ werden immer steiler, je mehr man von ihnen sieht.
- Der Graph ist symmetrisch bezüglich der zweiten Achse. Wird er an der zweiten Achse gespiegelt, so geht er in sich selbst über. Das entspricht der Tatsache, dass für jedes x die Funktionswerte $g(-x) = (-x)^2$ und $g(x) = x^2$ übereinstimmen¹¹.

Der in Abbildung 1 gezeigte Graph ist ein Spezialfall einer *Parabel*. Er wird auch *Normparabel* genannt. Ganz allgemein ist eine Parabel eine Kurve, die aus der Normparabel durch Dehnung oder Stauchung in Richtung der Koordinatenachsen, Verschiebung und Drehung hervorgeht. Jede Parabel besitzt eine Symmetrieachse, und jener Punkt, in dem sie ihre Symmetrieachse schneidet, heißt **Scheitelpunkt** oder kurz **Scheitel**. Bei der in Abbildung 1 dargestellten Normparabel liegt der Scheitel im Ursprung, d.h. seine erste Koordinate (x -Koordinate) fällt mit der Minimumstelle zusammen.

Wir gehen nun von unserer einfachen Funktion (4.1) zu allgemeinen quadratischen Funktionen über und formulieren gleich das Hauptresultat der nachfolgenden Überlegungen:

Der Graph jeder quadratischen Funktion ist eine Parabel. Er kann aus der Normparabel durch eine oder mehrere der Operationen

- Dehnung oder Stauchung in Richtung der zweiten Achse (oder, was das Gleiche bewirkt, Stauchung oder Dehnung in Richtung der ersten Achse)
- Verschiebung
- Spiegelung an einer zur ersten Achse parallelen Geraden (oder, was das Gleiche bewirkt, Drehung um 180°)

gewonnen werden.

Die **Symmetrieachse** jeder dieser als Graphen quadratischer Funktionen auftretenden Parabeln ist parallel zur zweiten Achse. Der Scheitelpunkt ist stets der „höchstliegende“ bzw.

¹¹ Eine Funktion f mit der Eigenschaft, dass $f(-x) = f(x)$ für alle x , wird auch *gerade Funktion* genannt. Mehr dazu finden Sie im Skriptum *Der Funktionen-zoo*.

„tiefstliegende“ Punkt des Graphen, d.h. die x -Koordinate des Scheitelpunkts ist gleich der **Extremstelle** (also gleich der Maximum- bzw. Minimumstelle). Je nachdem, ob der Graph die erste Achse in keinem, einem¹² oder zwei Punkten schneidet, hat die entsprechende Funktion keine, eine oder zwei **Nullstellen**.

Um all das einzusehen, betrachten wir schrittweise kompliziertere Funktionsterme quadratischer Funktionen:

- **Graphen von Funktionen der Form $f(x) = a x^2$:**

Beispiel 1: Die durch $f_2(x) = 2 x^2$ definierte Funktion f_2 . Ihr Graph ist in Abbildung 2 (in blauer Farbe) gezeigt. Er geht aus der Normparabel (in Abbildung 2 als Graph der Funktion f_1 in roter Farbe dargestellt) durch eine Dehnung in Richtung der zweiten Achse um den Faktor 2 hervor und ist „schlanker“ als die Normparabel¹³. An jeder Stelle ist der Funktionswert von f_2 doppelt so groß wie jener von f_1 . Überprüfen Sie das in der Abbildung anhand einiger Funktionswerte: So ist $f_2(1) = 2$, während $f_1(1) = 1$.

Beispiel 2: Die durch $f_3(x) = -\frac{x^2}{2}$ definierte Funktion f_3 . Ihr Graph ist in Abbildung 2 (in grüner Farbe) gezeigt. Er geht aus der Normparabel durch eine Spiegelung an der ersten Achse und eine Stauchung in Richtung der zweiten Achse um den Faktor $\frac{1}{2}$ hervor und ist „breiter“ als die Normparabel. An jeder Stelle ist der Funktionswert von f_3 gleich $-\frac{1}{2}$ mal jenem von f_1 . Die Spiegelung kommt durch das Minuszeichen im Funktionsterm zustande. Überprüfen Sie das in der Abbildung anhand einiger Funktionswerte: So ist $f_3(1) = -\frac{1}{2}$, während $f_1(1) = 1$, und $f_3(2) = -2$, während $f_1(2) = 4$.

Allgemein erhalten wir den Graphen einer Funktion der Form $f(x) = a x^2$, indem wir die Normparabel um den Faktor $|a|$ in Richtung der zweiten Achse dehnen (falls $|a| > 1$) oder stauchen (falls $|a| < 1$) und, falls $a < 0$ ist, eine Spiegelung an der ersten Achse durchführen.

- **Graphen von Funktionen der Form $f(x) = x^2 + c$:**

Beispiel: Die durch $f_4(x) = x^2 + 2$ definierte Funktion f_4 . Ihr Graph ist in Abbildung 2 (in brauner Farbe) gezeigt. Er geht aus der Normparabel (Graph von f_1) durch eine Verschiebung in Richtung der zweiten Achse um 2 hervor. An jeder Stelle ist der Funktionswert von f_4 um 2 größer als jener von f_1 . Überprüfen Sie das in der Abbildung anhand einiger Funktionswerte: So ist $f_4(0) = 2$, während $f_1(0) = 0$, und $f_4(1) = 3$, während $f_1(1) = 1$.

¹² Die Bezeichnung „schneiden“ bezieht sich hier auf die Durchschnittsmenge („Schnittmenge“) von Graph und erster Achse. Besteht diese Menge nur aus einem Punkt, so *berührt* der Graph die erste Achse, wie es etwa für die in Abbildung 1 gezeigte Funktion der Fall ist.

¹³ Kleine Nebenbemerkung: Eine Dehnung um den Faktor 2 in Richtung der zweiten Achse macht aus der Normparabel das Gleiche wie eine Stauchung um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ in Richtung der ersten Achse. Begründung: Ist (x, x^2) ein Punkt auf dem Graphen der Normparabel, so sind sowohl $(x, 2x^2)$ als auch $(\frac{x}{\sqrt{2}}, x^2)$ Punkte auf dem Graphen von f_2 . Sie können das auch durch einen Vergleich des blauen mit dem roten Graphen in Abbildung 2 näherungsweise erkennen.

Allgemein erhalten wir den Graphen einer Funktion der Form $f(x) = x^2 + c$, indem wir die Normparabel um c in Richtung der zweiten Achse verschieben. Ist $c > 0$, so entspricht das einer Verschiebung nach „oben“, ist $c < 0$, so entspricht es einer Verschiebung nach „unten“.

• **Graphen von Funktionen der Form $f(x) = (x + d)^2$:**

Beispiel: Die durch $f_5(x) = (x + 2)^2$ definierte Funktion f_5 . Ihr Graph ist in Abbildung 2 (in magenta) gezeigt. Er geht aus der Normparabel (Graph von f_1) durch eine Verschiebung in Richtung der ersten Achse um -2 hervor. Warum? Weil für jede Stelle x gilt: $f_5(x) = (x + 2)^2 = f_1(x + 2)$. Der Funktionswert von f_5 an einer Stelle x ist gleich dem Funktionswert von f_1 an der Stelle $x + 2$, also an jener Stelle, die um 2 „rechts“ von x liegt. Genau das entspricht einer Verschiebung um -2 in Richtung der ersten Achse! Als weiteren Check dieses Sachverhalts vermerken wir, dass der Funktionsterm $(x + 2)^2$ am kleinsten ist, wenn $x = -2$ ist. Die Funktion f_5 besitzt daher an der Stelle $x = -2$ ein Minimum, in Übereinstimmung mit dem in Abbildung 2 gezeigten Graphen. Überprüfen Sie die Lage des Graphen von f_5 anhand einiger Funktionswerte: So ist $f_5(-3) = f_1(-1) = 1$, $f_5(-2) = f_1(0) = 0$, $f_5(-1) = f_1(1) = 1$ und $f_5(0) = f_1(2) = 4$.

Allgemein erhalten wir den Graphen einer Funktion der Form $f(x) = (x + d)^2$, indem wir die Normparabel um $-d$ in Richtung der ersten Achse verschieben. Ist $d > 0$, so entspricht das einer Verschiebung nach „links“, ist $d < 0$, so entspricht es einer Verschiebung nach „rechts“.

• **Graphen allgemeiner quadratischer Funktionen, $f(x) = ax^2 + bx + c$:**

Nun haben wir alle nötigen Informationen gesammelt, um Lage und Form der Graphen beliebiger quadratischer Funktionen zu erschließen. Dazu benutzen wir das früher erzielte Ergebnis (2.23), dass $f(x) = ax^2 + bx + c$ auch in der Form

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \quad (4.8)$$

geschrieben werden kann. Den Graphen einer solchen Funktion bekommen wir aus der Normparabel durch eine kombinierte Anwendung der zuvor besprochenen Operationen. Abbildung 3 zeigt zwei konkrete Beispiele:

Beispiel 1: Die durch $f_6(x) = 2(x - 1)^2 - 3$ definierte Funktion f_6 . Durch Ausmultiplizieren der Klammer können wir sie auch in der Form $f_6(x) = 2x^2 - 4x - 1$ schreiben. Ihr Graph ist in Abbildung 3 (in blauer Farbe) gezeigt. Er geht durch folgende, in der angegebenen Reihenfolge ausgeführte Operationen aus der Normparabel (Graph von f_1) hervor:

- Eine Dehnung in Richtung der zweiten Achse um den Faktor 2 (was seine Form etwas schlanker macht als die Normparabel). Damit bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto 2x^2$.

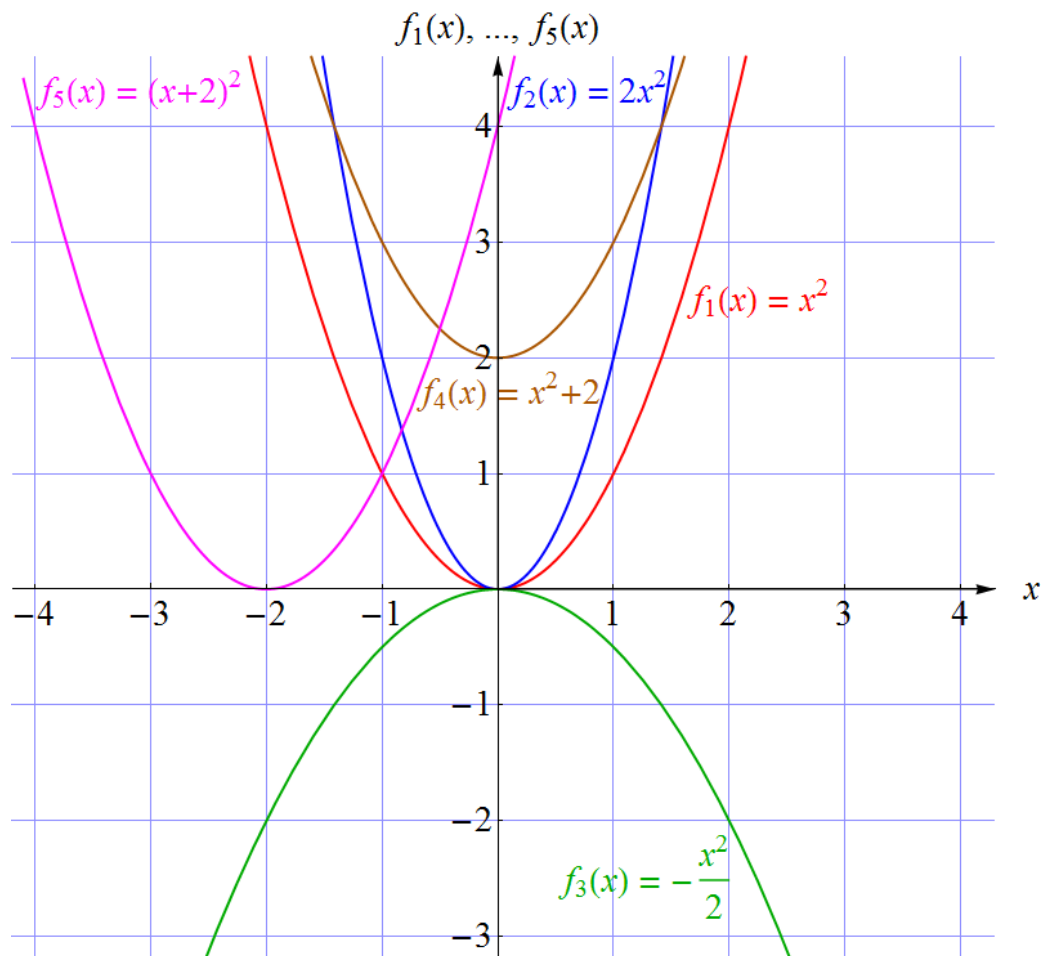


Abbildung 2: Graphen quadratischer Funktionen. Der Graph der Funktion f_1 (in roter Farbe) ist die in Abbildung 1 dargestellte Normparabel. Die Graphen der anderen Funktionen f_2 bis f_5 gehen, wie im Text diskutiert, durch einfache Operationen aus jenem von f_1 hervor.

- Eine Verschiebung um -3 in Richtung der zweiten Achse. Damit bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto 2x^2 - 3$.
- Eine Verschiebung um 1 in Richtung der ersten Achse. Damit bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto 2(x - 1)^2 - 3$, d.h. der Funktion f_6 .

Da der Scheitel die letzten beiden Operationen mitgemacht hat, liegt er nun im Punkt $(1, -3)$. Aus der Lage des Graphen können nun auch die Nullstellen (näherungsweise) abgelesen werden: Sie sind die x -Koordinaten seiner Schnittpunkte mit der ersten Achse. Zur Kontrolle berechnen wir sie: Die zwei Lösungen der Gleichung $2(x - 1)^2 - 3 = 0$ ergeben sich sofort zu $x = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{6})$, numerisch $x_1 \approx -0.22$ und $x_2 \approx 2.22$, was wir durch einen Blick auf Abbildung 3 näherungsweise verifizieren können.

Beispiel 2: Die durch $f_7(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 4$ definierte Funktion f_7 . Durch Ausmultiplizieren der Klammer können wir sie auch in der Form $f_7(x) =$

$-\frac{x^2}{2} - x + \frac{7}{2}$ schreiben. Ihr Graph ist in Abbildung 3 (in grüner Farbe) gezeigt. Er geht durch folgende, in der angegebenen Reihenfolge ausgeführte Operationen aus der Normparabel (Graph von f_1) hervor:

- Eine Spiegelung an der ersten Achse. Damit bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto -x^2$.
- Eine Stauchung in Richtung der zweiten Achse um den Faktor $\frac{1}{2}$ (was seine Form etwas breiter macht als die Normparabel). Damit bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2$.
- Eine Verschiebung um 4 in Richtung der zweiten Achse. Damit bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 4$.
- Eine Verschiebung um -1 in Richtung der ersten Achse. Damit bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 4$, d.h. der Funktion f_7 .

Da der Scheitel die letzten beiden Operationen mitgemacht hat, liegt er nun im Punkt $(-1, 4)$. Aus der Lage des Graphen können nun auch die Nullstellen (näherungsweise) abgelesen werden: Sie sind die x -Koordinaten seiner Schnittpunkte mit der ersten Achse. Zur Kontrolle berechnen wir sie: Die zwei Lösungen der Gleichung $-\frac{1}{2}(x+1)^2 + 4 = 0$ ergeben sich sofort zu $x = -1 \pm 2\sqrt{2}$, numerisch $x_1 \approx -3.83$ und $x_2 \approx 1.83$, was wir durch einen Blick auf Abbildung 3 näherungsweise verifizieren können.

Allgemein erhalten wir den Graphen einer quadratischen Funktion f der Form (4.8) aus jenem der Normparabel durch folgende, in der angegebenen Reihenfolge ausgeführte Operationen:

- Falls $a < 0$ ist: eine Spiegelung an der ersten Achse. In diesem Fall bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto -x^2$. Ist $a > 0$, so unterbleibt dieser Schritt.
- Eine Dehnung (falls $|a| > 1$) oder Stauchung (falls $|a| < 1$) in Richtung der zweiten Achse um den Faktor $|a|$. Im ersten Fall wird der Graph schlanker als die Normparabel, im zweiten Fall wird er breiter. Damit bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto ax^2$.
- Eine Verschiebung um $-\frac{b^2}{4a} + c$ in Richtung der zweiten Achse. Damit bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto ax^2 - \frac{b^2}{4a} + c$.
- Eine Verschiebung um $-\frac{b}{2a}$ in Richtung der ersten Achse. Damit bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$, d.h. der Funktion f .

Da der Scheitel diese Operationen mitmacht, liegt er nun im Punkt $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right)$. Ist $a > 0$, so ist seine x -Koordinate $-\frac{b}{2a}$ eine Minimumstelle. Ist $a < 0$, so ist sie eine Maximumstelle. Halten wir fest, wie die Parameter a , b und c den Graphen bestimmen:

- Ist $a > 0$, so ist der Graph eine „nach oben offene“ Parabel. Ist $a < 0$, so ist der Graph eine „nach unten offene“ Parabel.

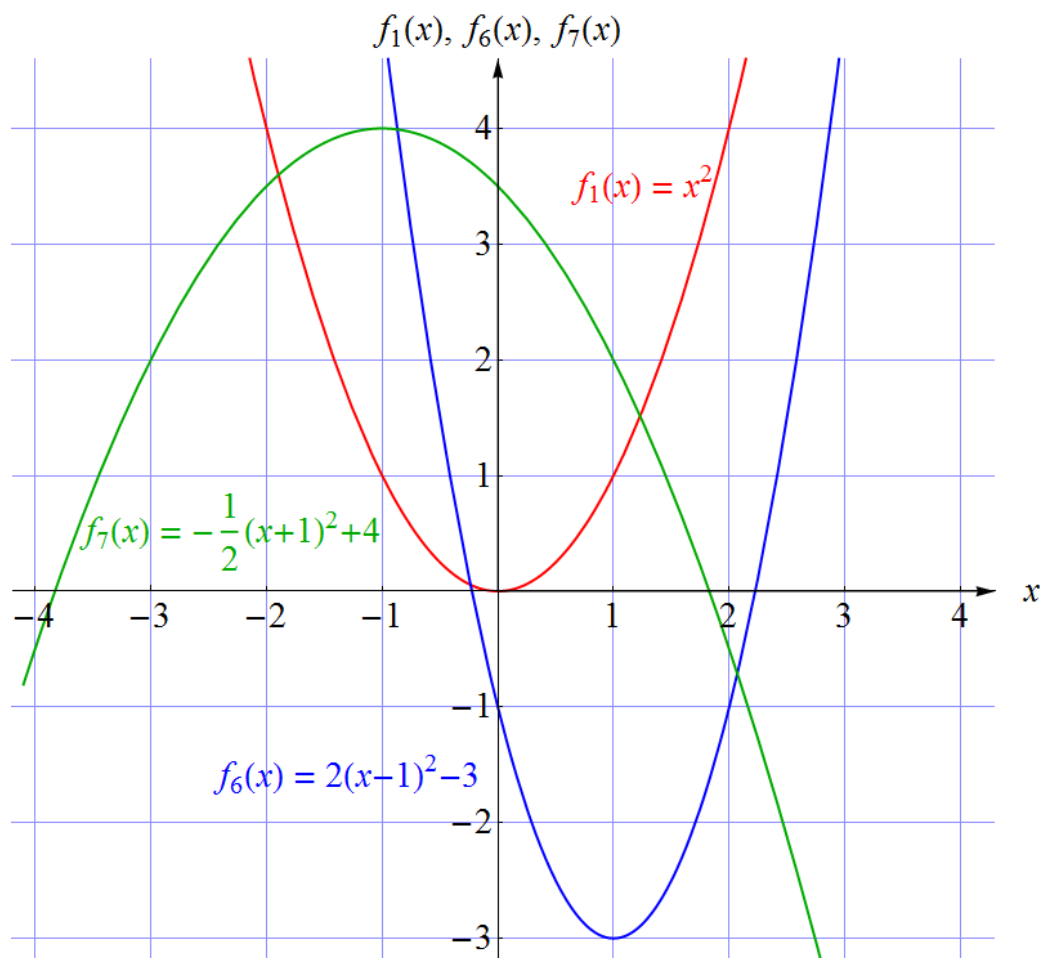


Abbildung 3: Graphen quadratischer Funktionen. Wie in Abbildung 2 ist der Graph der Funktion f_1 (in roter Farbe) die Normparabel. Die Graphen der beiden anderen Funktionen f_6 und f_7 gehen, wie im Text diskutiert, durch einfache Operationen aus ihm hervor.

- Die Form des Graphen wird durch $|a|$ bestimmt. Für $|a| > 1$ ist er schlanker, für $|a| < 1$ ist er breiter als die Normparabel.
- Die Kombinationen $-\frac{b}{2a}$ und $-\frac{b^2}{4a} + c$ bestimmen die Lage des Scheitels.

Um die Lage des Graphen einer in der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ gegebenen Funktion zu finden, muss der Funktionsterm also entweder durch Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat in die Form (4.8) gebracht werden, oder – was einfacher ist – es wird die Formel

$$S = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c \right) \quad (4.9)$$

für die Koordinaten des Scheitels benutzt. Um rechnerisch zusätzliche Information über den Graphen zu erhalten, können noch zwei Schritte durchgeführt werden:

- Der Schnittpunkt des Graphen mit der zweiten Achse ergibt sich sehr einfach durch Berechnung des Funktionswerts an der Stelle $x = 0$. Im allgemeinen Fall ist er durch $(0, c)$ gegeben.

- Die Schnittpunkte des Graphen mit der ersten Achse werden durch die Nullstellen, d.h. durch die Lösungen der entsprechenden quadratischen Gleichung $f(x) = 0$ bestimmt. Aber Achtung: Falls der Graph zur Gänze „oberhalb“ oder „unterhalb“ der ersten Achse liegt, gibt es keine Nullstelle (wie etwa im Fall der Funktion f_4 in Abbildung 2). Falls der Graph die erste Achse berührt, gibt es nur eine Nullstelle (die x -Koordinate des Scheitels). Falls der Graph die erste Achse in zwei Punkten schneidet, so sind deren x -Koordinaten die Nullstellen. In diesem Fall ist aufgrund der symmetrischen Form der Parabeln klar, dass (wie bereits früher in diesem Skriptum besprochen) die x -Koordinate des Scheitels (d.h. die Extremstelle) genau der Mittelwert der beiden Nullstellen ist.

Natürlich können Sie einen Funktionsplotter (am PC oder auch als App am Tablet oder Smartphone) verwenden, um den Graphen einer gegebenen quadratischen Funktion zeichnen zu lassen. Das ist praktisch, sollte aber das Verständnis dafür, *warum* der Graph der eingegebenen Funktion die gezeigte Form hat, nicht ersetzen, sondern fördern! (Zur Förderung des Verstehens durch einen Funktionsplotter finden Sie eine Übungsaufgabe am Ende dieses Skriptums.)

Nachdem wir nun ausführlich die Lage des Graphen einer gegebenen quadratischen Funktion besprochen haben, wenden wir uns noch dem **umgekehrten Problem** zu: Gegeben ist lediglich der Graph, und Sie sollen einen dazu passenden Funktionsterm finden oder aus einer vorgegebenen Liste den richtigen erkennen. Sind Sie in eine solche Situation gestellt, so können Sie eine Reihe von Methoden und Checks durchführen:

- Sollen Sie den richtigen aus einer Liste von Funktionstermen erkennen, so können Sie aus der Grafik Koordinaten von Punkten auf dem Graphen (etwa des Scheitels, der Schnittpunkte mit den Achsen, und, falls ein Koordinatenraster eingezeichnet ist, von Punkten mit ganzzahligen Koordinaten) ablesen und mit den entsprechenden, mit Hilfe der Funktionsterme errechneten Größen (Nullstellen, Koordinaten des Scheitels, ausgewählte Wertepaare $(x, f(x))$) vergleichen. So lassen sich in der Regel sehr schnell die nicht zutreffenden Funktionsterme ausscheiden.
- Eine etwas systematischere Vorgangsweise versucht, die Parameter a , b und c anhand des Graphen (zumindest näherungsweise) abzulesen:
 - Beginnen Sie mit dem Vorzeichen von a : Ist der Graph eine „nach oben offene“ Parabel, so ist $a > 0$. Ist der Graph eine „nach unten offene“ Parabel, so ist $a < 0$.
 - Um a abzulesen, gehen Sie vom Scheitel aus um 1 nach „rechts“. Dann müssen Sie um a nach „oben“ oder „unten“ (je nach dem Vorzeichen von a) gehen, um wieder auf den Graphen zu gelangen¹⁴. Auf diese Weise können Sie a sozusagen „abmessen“.
 - Lesen Sie die Koordinaten (s_x, s_y) des Scheitels ab und vergleichen Sie mit (4.9). Wenn Sie a bereits bestimmt haben, folgt $b = -2s_x a$ und damit $c = s_y + \frac{b^2}{4a} = s_y + s_x^2 a$.

¹⁴ Die Begründung erfolgt am einfachsten mit einer Funktion vom Typ $f(x) = ax^2$. Es ist dann $f(0) = 0$ und $f(1) = a$. Versuchen Sie, dieses Argument für die allgemeine quadratische Funktion (4.8) zu verallgemeinern!

Am Ende dieses Abschnitts noch ein Hinweis: Bisher haben wir Funktionsterme quadratischer Funktionen entweder direkt durch die Koeffizienten in der Form (2.24) ausgedrückt oder, nach einer Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat, in der Form (4.8) angeschrieben. Sie sollten ohne große Probleme zwischen diesen beiden (gleichwertigen) Darstellungen wechseln, d.h. die eine in die andere umrechnen können. Manchmal sind quadratische Funktionen aber auch in der Form

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (4.10)$$

angegeben, wobei a , x_1 und x_2 reelle Zahlen sind. (Beispiel: $f(x) = 3(x - 2)(x + 5)$.) Bevor Sie einen solchen Funktionsterm ausmultiplizieren, um ihn auf die Form (2.24) zu bringen, bedenken Sie, dass die Form (4.10) viel Information beinhaltet: Die Zahl a stimmt mit dem Koeffizienten von x^2 überein (d.h. mit dem Parameter, den wir auch bisher mit a bezeichnet haben). Die Zahlen x_1 und x_2 sind die Nullstellen, denn klarerweise gilt $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Damit haben Sie auch die x -Koordinate des Scheitels, denn diese ist, wie wir bereits wissen, gleich dem Mittelwert $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ der Nullstellen. Die zweite Koordinate des Scheitels ist dann gleich dem entsprechenden Funktionswert. Für viele Zwecke reichen diese Informationen aus, um weiterzukommen. Es ist dann gar nicht nötig, einen in der Form (4.10) gegebenen Funktionsterm in eine andere Darstellung umzurechnen.

5 Schnittmengen der Graphen linearer und quadratischer Funktionen

Sind zwei lineare oder quadratische Funktionen f und g gegeben, so können wir fragen, ob es eine (oder mehrere) Stellen x gibt, an denen die Funktionswerte übereinstimmen, d.h. an denen

$$f(x) = g(x) \quad (5.1)$$

gilt. Ist eine der beiden Funktionen linear und eine quadratisch oder sind beide quadratisch, mit verschiedenen Koeffizienten von x^2 , so stellt (5.1) eine quadratische Gleichung dar, die auch in der Form $f(x) - g(x) = 0$ angeschrieben werden kann. In geometrischer Hinsicht handelt es sich um das Problem, die Schnittmenge der Graphen, d.h. die Schnittmenge einer Geraden und einer Parabel bzw. zweier Parabeln zu finden. Sowohl aufgrund der allgemeinen Eigenschaften quadratischer Gleichungen als auch aufgrund der Parabelform ist klar, dass es keine, eine oder zwei Lösungen (d.h. Schnittpunkte) geben kann.

Beispiel: Gegeben sind die Funktionen u und v mit $u(x) = 2x^2 - 3$ und $v(x) = -x^2 + x + 1$. Man berechne die Schnittpunkte ihrer Graphen!

Lösungsweg: Es sind jene x zu finden, die $u(x) = v(x)$ erfüllen, d.h. $2x^2 - 3 = -x^2 + x + 1$ oder, indem die rechte Seite von beiden Seiten subtrahiert wird,

$$3x^2 - x - 4 = 0. \quad (5.2)$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $x_1 = -1$ und $x_2 = \frac{4}{3}$. (Führen Sie die Berechnung im Detail selbst durch!) Sie sind die x -Koordinaten der gesuchten Schnittpunkte. Die zweiten Koordinaten der Schnittpunkte erhalten wir

durch Einsetzen in jeweils einen der beiden Funktionsterme: Mit $u(x_1) = u(-1) = 2(-1)^2 - 3 = -1$ ergibt sich der eine Schnittpunkt zu $S_1 = (-1, -1)$, und mit $u(x_2) = u(\frac{4}{3}) = 2(\frac{4}{3})^2 - 3 = \frac{5}{9}$ ergibt sich der andere Schnittpunkt zu $S_2 = (\frac{4}{3}, \frac{5}{9})$.

Zur Probe kann noch jeweils der andere Funktionsterm herangezogen werden:

$$\begin{aligned} v(x_1) &= v(-1) = -(-1)^2 + (-1) + 1 = -1 = \text{zweite Koordinate von } S_1 \quad \checkmark \\ v(x_2) &= v(\frac{4}{3}) = -(\frac{4}{3})^2 + \frac{4}{3} + 1 = \frac{5}{9} = \text{zweite Koordinate von } S_2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Zeichnen Sie die beiden Funktionsgraphen (entweder mit dem Bleistift auf einem Blatt Papier oder mit Hilfe eines Funktionsplotters) und überprüfen Sie die Lage der Schnittpunkte!

6 Verhalten quadratischer Funktionen für große Argumente

Zum Abschluss machen wir noch einige Bemerkungen über das Verhalten quadratischer Funktionen für Argumente mit großem Betrag. Ist beispielsweise die Funktion

$$f(x) = 3x^2 + 7x - 12 \quad (6.1)$$

gegeben, so können wir ihre Werte an Stellen mit sehr großem Betrag wie $x = 1 \text{ Million} = 10^6$ oder $x = -1 \text{ Million} = -10^6$ betrachten. So ist etwa

$$f(10^6) = 3 \cdot 10^{12} + 7 \cdot 10^6 - 12 = 3000000000000 + 7000000 - 12. \quad (6.2)$$

Wir sehen, dass der erste Summand den weitaus größten Teil der Summe ausmacht. Sein Anteil beträgt

$$\frac{3 \cdot 10^{12}}{3 \cdot 10^{12} + 7 \cdot 10^6 - 12} \approx 0.999998, \quad (6.3)$$

also ganze 99.9998 Prozent! Ähnliches können wir auch an der Stelle $x = -10^6$ beobachten.

Ganz allgemein wird eine Funktion der Form

$$x \mapsto ax^2 + bx + c \quad (6.4)$$

an Stellen x , deren Betrag hinreichend groß ist, vom quadratischen Term ax^2 dominiert. In diesem Sinn können wir schreiben:

$$ax^2 + bx + c \approx ax^2 \quad \text{falls } |x| \text{ genügend groß ist.} \quad (6.5)$$

Das bedeutet nicht, dass dann die Differenz zwischen $ax^2 + bx + c$ und ax^2 klein wäre (sie ist $bx + c$ und wird, sofern $b \neq 0$ ist, an Stellen mit großem Betrag ebenfalls einen großen Betrag besitzen), aber es bedeutet, dass ax^2 den größten Teil von $ax^2 + bx + c$ ausmacht. Etwas präziser als (6.5) können wir formulieren:

$$\frac{ax^2}{ax^2 + bx + c} \approx 1 \quad \text{falls } |x| \text{ genügend groß ist.} \quad (6.6)$$

Eine Spur blumiger, dafür aber einprägsamer, können wir diesen Sachverhalt auch so ausdrücken: Aus „sehr großer Entfernung betrachtet“ sieht der Graph *jeder* quadratischen Funktion aus wie der Graph einer Funktion vom Typ $x \mapsto ax^2$.

7 Übungsaufgaben

Hier einige Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Schreiben Sie den Term $x^2 - 6x + 2$ durch Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat in der Form (4.8) an!

Lösung:

$$x^2 - 6x + 2 = (x - 3)^2 - 7$$

- Schreiben Sie den Term $3x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ durch Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat in der Form (4.8) an!

Lösung:

$$3x^2 + 3x - \frac{1}{2} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}$$

- Gegeben ist die quadratische Funktion $r(x) = -2x^2 - 5x + 3$. Berechnen Sie ihre Nullstellen!

Lösung:

$$x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = 1$$

- Gegeben ist die quadratische Funktion $s(x) = 9x^2 + 6x - 13$. Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts ihres Graphen!

Lösung:

$$S = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{13}{3}\right)$$

- Bestimmen Sie – zuerst rechnerisch – die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen $p(x) = x^2 + 2x - 3$ und $q(x) = 4x + 5$! Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch einen Plot!

Lösung:

Die Schnittpunkte sind $S_1 = (-2, -3)$ und $S_2 = (4, 21)$.
Erstellen Sie den Plot selbst!

- Bestimmen Sie – zuerst rechnerisch – die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen $p(x) = x^2 + 2x - 3$ und $r(x) = 2x^2 + 5x - 7$! Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch einen Plot!

Lösung:

Die Schnittpunkte sind $S_1 = (-4, 5)$ und $S_2 = (1, 0)$.
Erstellen Sie den Plot selbst!

- Die Funktionen h_1, \dots, h_5 sind gegeben durch

$$h_1(x) = x^2 - 2x - 2 \quad (7.1)$$

$$h_2(x) = 2(x+1)^2 \quad (7.2)$$

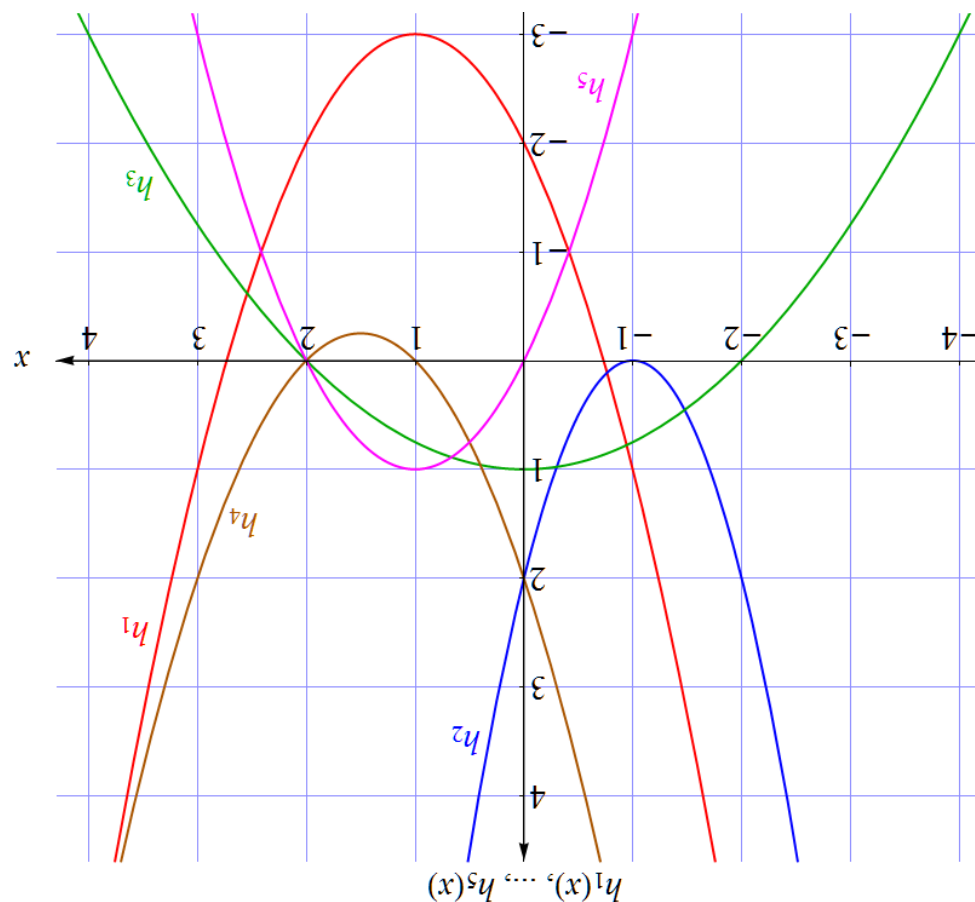
$$h_3(x) = -\frac{x^2}{4} + 1 \quad (7.3)$$

$$h_4(x) = (x-1)(x-2) \quad (7.4)$$

$$h_5(x) = -x^2 + 2x \quad (7.5)$$

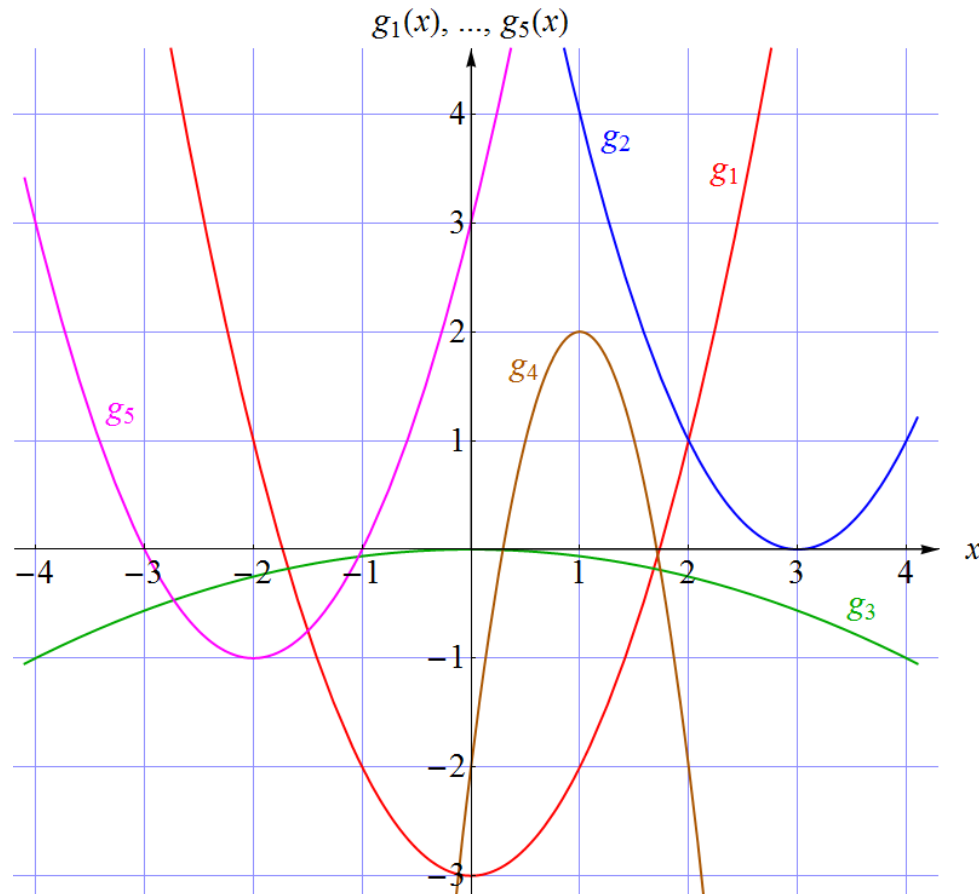
Zeichnen Sie ihre Graphen (ohne Hilfe eines Funktionsplotters)!

Lösungen:



- Mit Hilfe eines Funktionsplotters (am PC oder als App am Tablet oder Smartphone) können Sie Ihr Verständnis für die Eigenschaften und Graphen quadratischer Funktionen fördern, indem Sie einen quadratischen Funktionsterm in einer der besprochenen Darstellungsformen „erfinden“ (wie beispielsweise $2x^2 + 5x - 4$ oder $4(x-1)^2 - 3$ oder $-3(x+1)(x-2)$, variieren Sie die auftretenden Koeffizienten nach Belieben!), dann überlegen (oder berechnen), wie der Graph aussehen wird, und erst *danach* den Graphen plotten und mit Ihrer Vorhersage vergleichen!

- Die folgende Abbildung zeigt fünf Graphen quadratischer Funktionen. Geben Sie Funktionsterme für sie an!



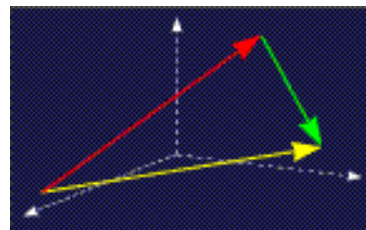
Lösungen:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4 \\ g_2(x) &= x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \\ g_3(x) &= x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2 \\ g_4(x) &= x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3 \\ g_5(x) &= x^2 + 4x + 7 = (x+2)^2 + 3 \end{aligned}$$

Weitere Möglichkeiten, Ihr Wissen über quadratische Funktionen und ihre Graphen zu überprüfen und zu festigen, bieten zahlreiche Ressourcen im Web, unter anderem der *Kacheltest* http://www.mathe-online.at/kacheltests/quadratische_funktionen_und_ihre_graphen/.

Dieses Skriptum wurde erstellt im April 2015 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“

(<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Winkelfunktionen und ihre Graphen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

Dieses Skriptum behandelt die Definitionen, Graphen und wichtigsten Eigenschaften der Winkelfunktionen Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens.

1 Das Bogenmaß

Um anzugeben, „wie weit geöffnet“ (oder „wie groß“) ein Winkel ist, wird im Alltagsleben und in den ersten Jahren des Mathematikunterrichts das **Gradmaß** verwendet, in dem ein voller Winkel 360° beträgt, ein gestreckter Winkel 180° und ein rechter Winkel 90° . Ein gleichseitiges Dreieck besitzt drei (gleiche) Innenwinkel von 60° , und die beiden kleineren (nicht-rechten) Winkel Ihres Geodreiecks betragen 45° . Wird aus einem Kreis durch gerade Schnitte vom Mittelpunkt zum Rand ein Sektor abgetrennt, so können wir einen Winkel auch als relativen Anteil des vollen Kreises ausdrücken: Einem Viertelkreis entspricht ein rechter Winkel, also 90° , einem Drittel einer Torte entspricht ein Winkel von 120° (das ist auch der Winkel zwischen den Zacken des „Mercedes-Sterns“), und drei Viertel einer Pizza entsprechen einem Winkel von 270° . Für genaue Winkelangaben, und um sehr kleine Winkel durch ganze Zahlen ausdrücken zu können, wird 1° in $60'$ (60 Minuten oder Winkelminuten, auch Bogenminuten) und $1'$ in $60''$ (60 Sekunden oder Winkelsekunden, auch Bogensekunden) unterteilt¹ – ein Brauch, der aber zusehends durch Gradangaben im Dezimalsystem verdrängt wird.

Dass der volle Winkel mit 360° veranschlagt wird, ist eine *Konvention*, die lange zurückliegende historische Gründe hat und aufgrund der Tatsache, dass 360 ohne Rest durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40 und 45 geteilt werden kann, recht praktisch ist. Es wurden (und werden) aber auch andere Winkelmaße verwendet. So konnte sich das im Zuge der „Metrifizierung“ Ende des 18. Jahrhunderts eingeführte **Neugradsystem**, in dem der volle Winkel

¹ Wir wollen uns nicht lange mit der Umrechnung zwischen diesem Grad-Minuten-Sekunden-System und der Gradangabe im Dezimalsystem aufhalten. Hier nur ein Beispiel: $20^\circ 13' 27'' = (20 + \frac{13}{60} + \frac{27}{3600})^\circ \approx 20.22417^\circ$.

in 400 gon unterteilt wird², der rechte Winkel also 100 gon beträgt, im Vermessungswesen etablieren.

Für manche mathematischen Zwecke – vor allem, wenn Winkelfunktionen, das Thema dieses Skriptums, ins Spiel kommen – ist jedoch ein anderes Winkelmaß besser geeignet, das **Bogenmaß**. Es ist in gewisser Weise eine besonders „natürliche“ Methode, die nicht von einer willkürlichen Unterteilung des vollen Winkels in soundsoviele Teile ausgeht, sondern einen gegebenen Winkel durch die *Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis* (= Kreis mit Radius 1) ausdrückt. Stellen Sie sich dazu am besten eine Torte oder eine Pizza mit Radius 1 vor! Einem rechten Winkel (der ja einem Viertel der Torte oder der Pizza entspricht) wird ein Bogenmaß von einem Viertel des Einheitskreis-Umfangs zugeordnet. Da der Umfang des Einheitskreises 2π beträgt, ist das Bogenmaß eines rechten Winkels $\frac{2\pi}{4}$, also $\frac{\pi}{2}$, was ungefähr gleich 1.570796 ist. Das Bogenmaß des vollen Winkels beträgt $2\pi \approx 6.283185$, das Bogenmaß des gestreckten Winkels beträgt $\pi \approx 3.141593$, und das Bogenmaß eines Winkels von 60° beträgt $\frac{\pi}{3} \approx 1.047198$. Winkel im Bogenmaß werden in der Regel ohne Einheit angegeben, also etwa – für die Hälfte eines rechten Winkels, im Gradmaß 45° – in der Form

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398. \quad (1.1)$$

Um zu betonen, dass eine Winkelangabe im Bogenmaß erfolgt, kann die Einheit rad (für *Radian*) dazugeschrieben werden, also

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \approx 0.785398 \text{ rad}. \quad (1.2)$$

Aber das ist nicht notwendig. Um diesen Winkel gleichzeitig im Gradmaß und im Bogenmaß anzugeben, können wir schreiben

$$\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398 \quad (1.3)$$

oder

$$\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \approx 0.785398 \text{ rad}. \quad (1.4)$$

Wenn Sie wollen, können Sie sich vorstellen, dass rad einfach 1 bedeutet, aber der Deutlichkeit halber bei einer Winkelangabe im Bogenmaß dazugeschrieben werden kann.

Um eine Winkelangabe vom Gradmaß ins Bogenmaß oder vom Bogenmaß ins Gradmaß umzurechnen, benutzen Sie einfach die Tatsache, dass der volle Winkel im Bogenmaß gleich 2π beträgt, d.h. dass

$$\frac{2\pi}{360^\circ} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{360^\circ}{2\pi} = 1 \quad (1.5)$$

ist³. Ist ein Winkel β von 72° gegeben, so rechnen wir um:

$$\beta = 72^\circ = 72^\circ \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} = 72 \cdot \frac{2\pi}{360} = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2}{5} \pi. \quad (1.6)$$

² 1 gon wurde früher als 1 „Neugrad“ bezeichnet, 1° als 1 „Altgrad“. Die Einheit Gon wurde 1992 eingeführt.

³ Sie können die linken Seiten dieser Beziehungen natürlich durch 2 kürzen. Die obigen Identitäten werden dann zu $\frac{\pi}{180^\circ} = 1$ bzw. $\frac{180^\circ}{\pi} = 1$ oder, wenn Sie eine noch kürzere Formel dafür wünschen, $180^\circ = \pi$.

Erkennen Sie, wie sich die Einheit $^\circ$ „herausgekürzt“ hat? Ist ein Winkel γ im Bogenmaß als $\frac{2}{3}\pi$ gegeben, so rechnen wir um:

$$\gamma = \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ. \quad (1.7)$$

Erkennen Sie, wie hier die Einheit $^\circ$ hereingekommen ist?

Ein kleiner Hinweis: Bitte vergessen Sie bei einem im Gradmaß angegebenen Winkel nicht, die Einheit $^\circ$ dazuzuschreiben! Mit der Winkelangabe $\delta = 60$ ist *nicht* $\delta = 60^\circ$ gemeint, sondern $\delta = 60 \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 3438^\circ$!

Winkel werden im Bogenmaß oft als rationale Vielfache von π angegeben, also etwa in der Form π , $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{2}{3}\pi$. Ob es sinnvoll ist, dafür numerische Näherungswerte anzugeben, hängt vom jeweiligen Zusammenhang ab, und auch die Genauigkeit, mit der solche Werte angeschrieben werden, sollte vernünftig gewählt werden. Tritt etwa als Resultat einer Berechnung der Winkel $\varepsilon = \frac{\pi}{6}$ auf, so ist das ein schönes Ergebnis und kann – sofern keine numerische Näherung verlangt ist – so stehen bleiben. Sie können diesen Winkel natürlich ins Gradmaß umrechnen, $\varepsilon = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$, aber in einer Angabe wie $\varepsilon \approx 0.524$ ist die – unter Umständen wichtige – Information, dass es sich um ein Sechstel des gestreckten Winkels handelt, nicht mehr sichtbar. Werden auf einer Achse eines Koordinatensystems Winkel im Bogenmaß aufgetragen, so ist es meist sinnvoll, als Achsenmarkierungen nicht „runde Zahlen“ wie 0, 0.5, 1, 1.5, 2 zu wählen, sondern „runde Vielfache von π “, also etwa 0, $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3}{2}\pi$, 2π .

Wenn Sie Berechnungen, in denen Winkel vorkommen, mit einem Taschenrechner oder Computerprogramm durchführen, müssen Sie zuerst wissen, ob eine numerische Eingabe (die Sie machen) oder eine Ergebnisausgabe (die Sie ablesen) im Gradmaß oder im Bogenmaß gemeint ist. Bei vielen Taschenrechnern können Sie zwischen den Einstellungen „RAD“ (Bogenmaß), „DEG“ (Gradmaß) und „GRD“, „GRA“ oder „GRAD“ (Neugradsystem) wählen. Machen Sie sich bitte in dieser Hinsicht mit den Rechnern oder Programmen, die Sie benutzen, vertraut!

Einen wichtigen Sachverhalt im Zusammenhang mit dem Bogenmaß müssen wir noch besprechen: Wir haben es zunächst durch die Kurzformel „Winkel im Bogenmaß = Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis“ eingeführt. Neben dieser Charakterisierung gibt es eine andere, damit eng verwandte, die Sie anwenden können, wenn ein Winkel α als Öffnungswinkel des Sektors eines Kreises auftritt, der *kein* Einheitskreis ist: Ist der Radius dieses Kreises gleich r und die Länge des Bogens gleich b , so ist der Winkel im Bogenmaß durch das Verhältnis

$$\alpha = \frac{b}{r} \quad (1.8)$$

gegeben. Warum? Das ergibt sich aus der *Ähnlichkeit* aller Sektoren beliebiger Kreise mit gleichem Öffnungswinkel, wie in Abbildung 1 illustriert. Machen wir einen Check: Der volle Winkel ist demnach das Verhältnis aus Umfang und Radius eines *beliebigen* Kreises, also

$$\frac{2\pi r}{r} = \frac{2\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} = 2\pi. \quad (1.9)$$

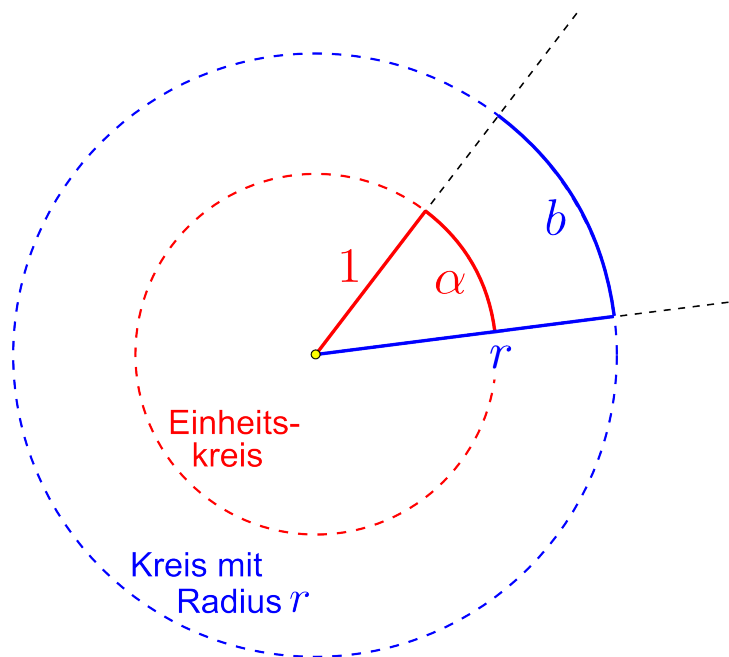


Abbildung 1: Ein Winkel α wird im Bogenmaß als Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis (hier rot) angegeben. Wird ein anderer Kreis herangezogen, der nicht den Radius 1 hat (hier blau), so ist α gleich dem Verhältnis der Länge des zugehörigen Bogens zum Radius, also $\alpha = \frac{b}{r}$. Die beiden dem Winkel entsprechenden Kreissektoren sind zueinander ähnlich.

Wir werden im Folgenden sowohl das Gradmaß als auch das Bogenmaß verwenden. Generell erkennen wir das jeweils verwendete Winkelmaß daran, ob $^\circ$ dabeisteht (dann ist der betreffende Winkel im Gradmaß angegeben) oder nicht (dann ist der betreffende Winkel im Bogenmaß angegeben).

2 Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

Die Form und Größe eines rechtwinkligen Dreiecks sind eindeutig festgelegt, wenn die Längen seiner Seiten⁴ bekannt sind. Natürlich müssen sie den Satz von Pythagoras erfüllen. Werden die Katheten⁵ mit a und b bezeichnet und die Hypotenuse mit c , so lautet der Satz von Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (2.1)$$

Sind a , b und c bekannt, so sind auch die (Innen-)Winkel des Dreiecks eindeutig festgelegt. Bezeichnen wir den der Seite a gegenüberliegenden Winkel mit α , den der Seite b ge-

⁴ Statt „Länge einer Seite“ oder „Seitenlänge“ wird auch einfach „Seite“ gesagt. Wir werden zwischen den Seitenlinien und den Seitenlängen nicht unterscheiden, da praktisch immer klar ist, was gemeint ist.

⁵ In einem rechtwinkligen Dreieck wird die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite als *Hypotenuse*, die beiden anderen Seiten als *Katheten* bezeichnet.

gegenüberliegenden Winkel mit β und den der Seite c gegenüberliegenden Winkel mit γ (siehe Abbildung 2), so ist $\gamma = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, und da die Winkelsumme in jedem Dreieck gleich $180^\circ = \pi$ ist, gilt $\alpha + \beta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$.

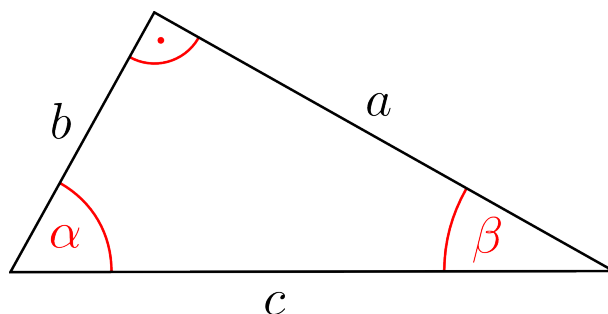


Abbildung 2: Ein rechtwinkliges Dreieck. a und b sind die Katheten, c ist die Hypotenuse. (Die Symbole a , b und c bezeichnen sowohl die Seitenlinien als auch die Seitenlängen.) Oft werden (wie auch hier) die jeweils den Seiten gegenüberliegenden Winkel mit entsprechenden griechischen Buchstaben bezeichnet, also α , β und γ . Da $\gamma = 90^\circ$ ist, ist statt des Namens das Symbol für einen rechten Winkel eingezeichnet (wobei anstelle des kleinen Kreisbogens manchmal auch ein „Eck“ gezeichnet wird). Entsprechend einer oft verwendeten Konvention wurden Seiten und Winkel hier alphabetisch aufsteigend im Gegenuhrzeigersinn benannt.

Sind umgekehrt die Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks bekannt, so ist zwar nicht seine Größe bestimmt, wohl aber seine Form. Das bedeutet, dass alle Seitenverhältnisse, wie $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ usw. (wir bezeichnen die Seiten und Winkel wie zuvor) eindeutig festgelegt sind. Genau genommen muss nur *einer* der beiden nicht-rechten Winkel bekannt sein. Kennen wir etwa den Wert von α , so folgt $\beta = 90^\circ - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha$, womit alle Winkel bekannt sind. Alle rechtwinkligen Dreiecke mit gleichem Winkel α sind zueinander *ähnlich*, d.h. sie gehen durch „Aufblasen“ oder „Schrumpfen“ (und gegebenenfalls eine Spiegelung) auseinander hervor.

Welche Seitenverhältnisse weist nun ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Winkel α bekannt ist, auf? Nehmen wir zum Beispiel das Verhältnis $\frac{a}{c}$. Es hängt nur von α ab und nicht von der Größe des Dreiecks, ist also eine Funktion von α . Interessanterweise lässt es sich im allgemeinen Fall aus α nicht mit Hilfe der Grundrechnungsarten (Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren) berechnen. Nicht einmal, wenn wir das Wurzelziehen als bekannte Operation dazunehmen, gelingt es, $\frac{a}{c}$ durch α auszudrücken. Hier ist also etwas Neues gefordert!

Um eine Bezeichnung dafür zur Hand zu haben, welchen Wert das Verhältnis $\frac{a}{c}$ für einen gegebenen Wert von α annimmt, brauchen wir einen neuen Namen. Wir nennen die Funktion, die jedem Winkel α den Wert des Seitenverhältnisses $\frac{a}{c}$ zuordnet, die **Sinusfunktion** oder kurz **Sinus**, abgekürzt mit \sin . Mit anderen Worten, wir legen fest, dass

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad (2.2)$$

gelten soll⁶. Eine sprachliche Kurzformel ergibt sich nach einem Blick auf Abbildung 2: Die

⁶ Statt $\sin \alpha$ kann auch $\sin(\alpha)$ geschrieben werden, also mit der üblichen Funktionsklammer. Wir werden diese Schreibweise insbesondere dann verwenden, wenn wir den Sinus eines im Gradmaß angegebenen Winkels wie $\sin(30^\circ)$ oder den Sinus eines zusammengesetzten Ausdrucks wie $\sin(90^\circ - \alpha)$ anschreiben. Gleiches gilt auch für die nachfolgend definierten Funktionen \cos , \tan und \cot .

Seite a ist jene Kathete, die dem Winkel α gegenüber liegt – wir nennen sie die *Gegenkathete* von α . Die Seite c ist die Hypotenuse des Dreiecks. Wir können also knapp (ohne auf konkrete Seitennamen Bezug zu nehmen) formulieren:

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}. \quad (2.3)$$

Um das Verhältnis $\frac{b}{c}$ durch α auszudrücken, nennen wir die Funktion, die jedem Winkel α den Wert des Seitenverhältnisses $\frac{b}{c}$ zuordnet, die **Cosinusfunktion** oder kurz **Cosinus** (manchmal auch **Kosinus** genannt), abgekürzt mit \cos . Mit anderen Worten, wir legen fest, dass

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad (2.4)$$

gelten soll. Da b jene Kathete ist, die dem Winkel α „anliegt“, nennen wir sie die *anliegende Kathete* oder *Ankathete* von α . Wir können also knapp (ohne auf konkrete Seitennamen Bezug zu nehmen) formulieren:

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}. \quad (2.5)$$

Um das Verhältnis $\frac{a}{b}$ der beiden Katheten durch α auszudrücken, nennen wir die Funktion, die jedem Winkel α den Wert des Seitenverhältnisses $\frac{a}{b}$ zuordnet, die **Tangensfunktion** oder kurz **Tangens**, abgekürzt mit \tan . Damit gilt also⁷

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \quad (2.6)$$

oder, in einer Formulierung, die keine konkreten Seitennamen enthält,

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}. \quad (2.7)$$

Schließlich nennen wir die Funktion, die jedem Winkel α den Wert des Seitenverhältnisses $\frac{b}{a}$ zuordnet, die **Cotangensfunktion** oder kurz **Cotangens** (manchmal auch **Kotangens** genannt), abgekürzt mit \cot . Damit gilt also⁸

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}. \quad (2.8)$$

Die vier Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens sind nicht voneinander unabhängig, sondern es bestehen zahlreiche Beziehungen zwischen ihnen. Dividieren wir etwa beide Seiten des Satzes von Pythagoras (2.1) durch c^2 , so erhalten wir

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \quad (2.9)$$

⁷ Statt \tan wird manchmal auch die ältere Bezeichnung tg für den Tangens verwendet.

⁸ Statt \cot wird manchmal auch die ältere Bezeichnung ctg für den Cotangens verwendet.

was mit den Definitionen (2.2) und (2.4) die Identität

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (2.10)$$

impliziert. Die Symbole $\sin^2 \alpha$ und $\cos^2 \alpha$ stehen hier für $(\sin \alpha)^2$ und $(\cos \alpha)^2$. Wird $\frac{a}{b}$ mit $1/c$ erweitert, also in der Form $\frac{(a/c)}{(b/c)}$ geschrieben, ergibt sich mit (2.6) die weitere Identität

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad (2.11)$$

und da $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ Kehrwerte voneinander sind (ihr Produkt ist ja gleich 1), erhalten wir mit (2.8)

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}. \quad (2.12)$$

Die Funktionen \tan und \cot hätten wir statt wie in (2.6) und (2.8) gleich auch in der Form (2.11) und (2.12) definieren können.

Wenden wir uns nun dem Winkel β zu: Mit ihm können wir genau das Gleiche machen wie mit dem Winkel α . Was für α die Gegenkathete war, ist für β nun die Ankathete, und umgekehrt. Damit ergibt sich

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \cos \alpha \quad (2.13)$$

und

$$\cos \beta = \frac{a}{c} = \sin \alpha. \quad (2.14)$$

Da im rechtwinkligen Dreieck $\alpha + \beta = 90^\circ$ gilt, folgern wir daraus, dass stets die Identitäten

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad (2.15)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad (2.16)$$

gelten.

Unsere vier Winkelfunktionen sind nun durch (2.10), (2.11) und (2.12) sowie (2.15) – (2.16) miteinander verbunden. Bitte merken Sie sich diese Beziehungen – sie werden oft benötigt! Ist für einen konkreten Winkel der Wert einer der vier Winkelfunktionen bekannt, so können die Werte der drei anderen recht einfach berechnet werden.

Apropos berechnen: Das Problem, wie die Werte der Winkelfunktionen *berechnet* werden, ist damit noch nicht gelöst. Wir haben ja lediglich Namen für bestimmte Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck vergeben. Wir werden das Problem auch hier nicht lösen, sondern überlassen konkrete Berechnungen – wie beispielsweise auch das Wurzelziehen – dem Taschenrechner oder Computer. So finden wir etwa mit Hilfe eines geeigneten Werkzeugs $\sin(17^\circ) \approx 0.292371705$ und $\cos(\frac{\pi}{13}) \approx 0.970941817$.

Berechnen Sie zur Übung mit Ihrem Taschenrechner oder dem von Ihnen verwendeten Computerprogramm $\sin(19^\circ)$ und $\cos(\frac{3\pi}{7})$! Als Ergebnisse sollten Sie erhalten: $\sin(19^\circ) \approx 0.325568154$ und $\cos(\frac{3\pi}{7}) \approx 0.222520934$.

Achten Sie darauf, ob Ihre Eingabe im Gradmaß oder im Bogenmaß erfolgen muss! Finden Sie heraus, ob bzw. wie Sie zwischen diesen beiden Optionen wechseln können!

Hier ein kleiner **Tipp**: Wir werden gleich lernen, dass auch der Winkel 90° zugelassen ist. Für ihn gilt $\sin(90^\circ) = 1$. Weiters ist $\sin(90) \approx 0.893996664$. Beachten Sie: $\sin(90)$ bedeutet $\sin(90 \text{ rad})$. Berechnen Sie nun mit Ihrem Taschenrechner „Sinus von 90° !“ (Je nach Funktionsweise des Rechners müssen Sie dafür entweder zuerst \sin und dann 90 oder zuerst 90 und dann \sin eingeben.) Ist das Ergebnis 1, so interpretiert Ihr Rechner eine Winkleingabe im Gradmaß. Ist das Ergebnis 0.893996664, so interpretiert er eine Winkleingabe im Bogenmaß. (Falls Ihr Rechner keinen Wechsel zwischen Grad- und Bogenmaß vorsieht, müssen Sie, sofern ein Winkel nicht im verlangten Winkelmaß angegeben ist, diesen zuerst wie im vorigen Abschnitt besprochen umrechnen.)

Die Methoden, die diese elektronischen Hilfswerkzeuge benutzen, um konkrete Werte der Winkelfunktionen (näherungsweise, aber im Prinzip beliebig genau) zu ermitteln, werden erst in der höheren Mathematik bereitgestellt, vor allem von der Differentialrechnung. Aber auch ohne Kenntnis dieser Methoden können wir *sehr viel* Nützliches mit Winkelfunktionen tun.

Einige „schöne“ Winkel sind insofern Ausnahmen, als die Winkelfunktionen für sie „schöne“ Zahlenwerte annehmen, die sich durch die Grundrechnungsarten (inklusive Wurzelziehen) ausdrücken lassen. Um sie zu ermitteln, benötigen wir keine technologische Hilfe, sondern nur die konsequente Anwendung unserer Definitionen. So ist beispielsweise

$$\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.17)$$

Warum? Ist in einem rechtwinkligen Dreieck ein nicht-rechter Winkel gleich 45° , so hat es die gleiche Form wie ein Geodreieck. Es gilt dann (mit den gleichen Seiten- und Winkelbezeichnungen wie bisher) $a = b$, und aus dem Satz von Pythagoras (2.1) folgt sofort $2a^2 = c^2$, also $a = b = \frac{c}{\sqrt{2}}$. Mit unseren Definitionen (2.2) und (2.4) (oder den Kurzformeln (2.3) und (2.5)) ergibt sich damit sofort (2.17). Daraus folgt mit (2.11)

$$\tan(45^\circ) = 1, \quad (2.18)$$

eine nicht nur einfache, sondern auch sehr wichtige Beziehung.

Zwei weitere Winkel, deren Werte für Sinus und Cosinus man kennen sollte, sind 30° und 60° . Für sie gilt:

$$\sin(30^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2} \quad (2.19)$$

$$\cos(30^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (2.20)$$

In einer Übungsaufgabe am Ende dieses Skriptums sollen Sie das selbst zeigen!

Wir lassen auch die Winkel 0° und 90° zu. Sie entsprechen dem Grenzfall eines zu einem Strich zusammengeklappten rechtwinkligen Dreiecks. Ist $\alpha = 0$, so ist die Gegenkathete von α zu einem Punkt geschrumpft und die Ankathete mit der Hypotenuse zusammengefallen, und mit $\alpha = 90^\circ$ ist es gerade umgekehrt. Damit ergibt sich

$$\sin(0^\circ) = \cos(90^\circ) = \tan(0^\circ) = \cot(90^\circ) = 0 \quad (2.21)$$

$$\cos(0^\circ) = \sin(90^\circ) = 1. \quad (2.22)$$

Der Tangens von 90° und der Cotangens von 0° sind nicht definiert, da man bei ihrer Berechnung durch 0 dividieren müsste⁹.

3 Winkelfunktionen für beliebige Winkel

Das Konzept der Winkelfunktionen lässt sich auf natürliche Weise für Winkel, die größer als 90° sind, übertragen. Dazu betrachten wir einen Punkt P auf dem Einheitskreis der Zeichenebene (d.h. auf dem Kreis mit Radius 1, dessen Mittelpunkt im Ursprung O liegt¹⁰). Mit α wollen wir den von der positiven ersten Achse aus im Gegenuhrzeigersinn bis zur Verbindungsstrecke OP gemessenen Winkel bezeichnen. (Negative Winkel werden entsprechend im Uhrzeigersinn gemessen.) In Abbildung 3 ist diese Situation für einen Punkt P dargestellt, der im ersten Quadranten des Koordinatensystems liegt (d.h. dessen Koordinaten beide positiv sind) und für den daher $0 < \alpha < 90^\circ$ gilt. Wir benutzen das rechtwinklige Dreieck, dessen Katheten in blau dargestellt sind und dessen Hypotenuse die Länge 1 (Radius des Einheitskreises!) hat, um $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ abzulesen:

- $\sin \alpha$ ist gleich der Gegenkathete von α (dividiert durch 1) und daher gleich der zweiten Koordinate von P .
- $\cos \alpha$ ist gleich der Ankathete von α (dividiert durch 1) und daher gleich der ersten Koordinate von P .

Wir können den Punkt P daher in Koordinatenform $P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ schreiben. In der Abbildung gibt es noch ein zweites, zum ersten ähnliches rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse auf der Verlängerung der Strecke OP zu einer Geraden (der Trägergeraden von OP) liegt. Die Ankathete von α in diesem Dreieck liegt auf der ersten Achse und hat die Länge 1 (Radius des Einheitskreises!). Die Gegenkathete liegt auf der „vertikalen“ Geraden, deren erste Koordinate gleich 1 ist (sie wird auch *Tangens-Schiene* genannt), und reicht von der ersten Achse bis zum Schnittpunkt mit der Trägergeraden von OP . Wir lesen wieder ab:

- $\tan \alpha$ ist gleich der Gegenkathete von α (dividiert durch 1, der Länge der Ankathete) und daher gleich der zweiten Koordinate des Schnittpunkts der Tangens-Schiene mit der Trägergeraden von OP .

Damit ist $\tan \alpha$ gleich dem Anstieg¹¹ der Trägergeraden von OP .

⁹ Manchmal wird – salopp – gesagt, $\tan(90^\circ)$ sei „unendlich“. Obwohl das eine bequeme Ausdrucksweise ist, sollte man sich darüber im Klaren sein, dass sie im Grunde genauso falsch ist wie die Aussage, dass $\frac{1}{0}$ gleich „unendlich“ ist.

¹⁰ Generell ist ein Einheitskreis ein Kreis mit Radius 1. Ist ein Koordinatensystem gegeben, so meint man mit „dem“ Einheitskreis den Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt im Ursprung.

¹¹ Zum Begriff des Anstiegs siehe das Skriptum über *lineare Funktionen und ihre Graphen*.

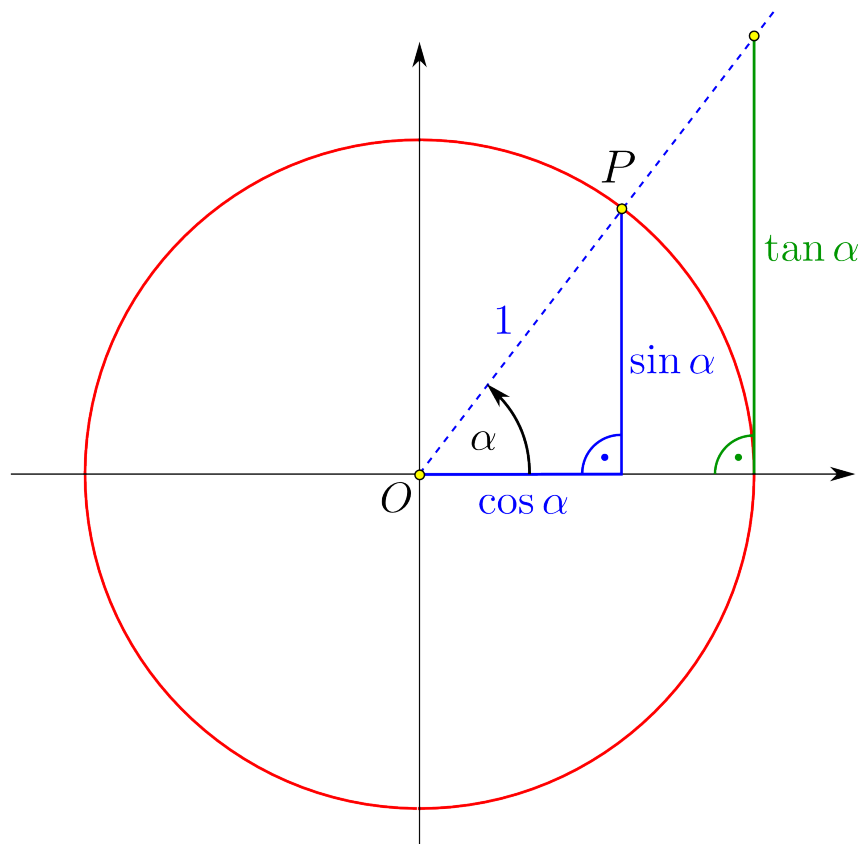


Abbildung 3: Definition der Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens für *beliebige* Winkel. Der Koordinatenursprung ist mit O bezeichnet, der Einheitskreis ist **rot** dargestellt. P ist ein Punkt auf dem Einheitskreis im ersten Quadranten. Der Winkel α wird von der positiven ersten Achse aus im Gegenuhrzeigersinn bis zur Strecke OP gemessen. Er ist kleiner als 90° . Die Koordinaten des Punktes P sind dann $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$. Der Tangens von α ist gleich der zweiten Koordinate des Schnittpunkts der Trägergeraden der Strecke OP mit jener Gerade, deren erste Koordinate gleich 1 ist (der Tangens-Schiene) und damit gleich dem Anstieg der Trägergeraden von OP .

Wir können unser Konzept der Winkelfunktionen nun auf *beliebige* Winkel verallgemeinern: Ist P ein *beliebiger* Punkt auf dem Einheitskreis (für den der Winkel α auch größer als 90° sein darf), so bezeichnen wir mit $\sin \alpha$ die zweite Koordinate von P und mit $\cos \alpha$ die erste Koordinate von P . Mit anderen Worten: Wir definieren Sinus und Cosinus für beliebige Winkel durch die Beziehung

$$P = (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad (3.1)$$

d.h. als **Koordinaten des Punktes P** . Über die Beziehungen (2.11) und (2.12) werden dann $\tan \alpha$ und $\cot \alpha$ festgelegt.

Nun dehnen wir den Zahlenbereich, mit dem Winkel gekennzeichnet werden, noch weiter aus: Wird α , beginnend mit 0° , kontinuierlich vergrößert, so wandert der Punkt P , beginnend mit $P = (1, 0)$, wie die Spitze eines Uhrzeigers (aber im Gegenuhrzeigersinn) auf dem Einheitskreis. Nach einem vollendeten Umlauf ist α auf 360° angewachsen und müsste nun wieder auf 0° zurückspringen. Das ist manchmal sehr unpraktisch, und so entschließen wir uns, *beliebige*

Werte als Winkelangaben zuzulassen. Dabei müssen wir nur bedenken, dass zwei Winkel, deren Differenz im Gradmaß gleich 360° (im Bogenmaß gleich 2π) ist, die *gleiche geometrische Bedeutung* haben. Wir identifizieren beispielsweise

$$365^\circ \longleftrightarrow 5^\circ \quad (3.2)$$

$$\frac{5}{2}\pi \longleftrightarrow \frac{\pi}{2} \quad (3.3)$$

$$-5^\circ \longleftrightarrow 355^\circ \quad (3.4)$$

$$-\frac{\pi}{2} \longleftrightarrow \frac{3}{2}\pi \quad (3.5)$$

Damit machen wir die Winkelfunktionen zu **periodischen Funktionen** – ein Aspekt, der uns später in diesem Skriptum, wenn wir uns ihre Graphen ansehen, noch begegnen wird.

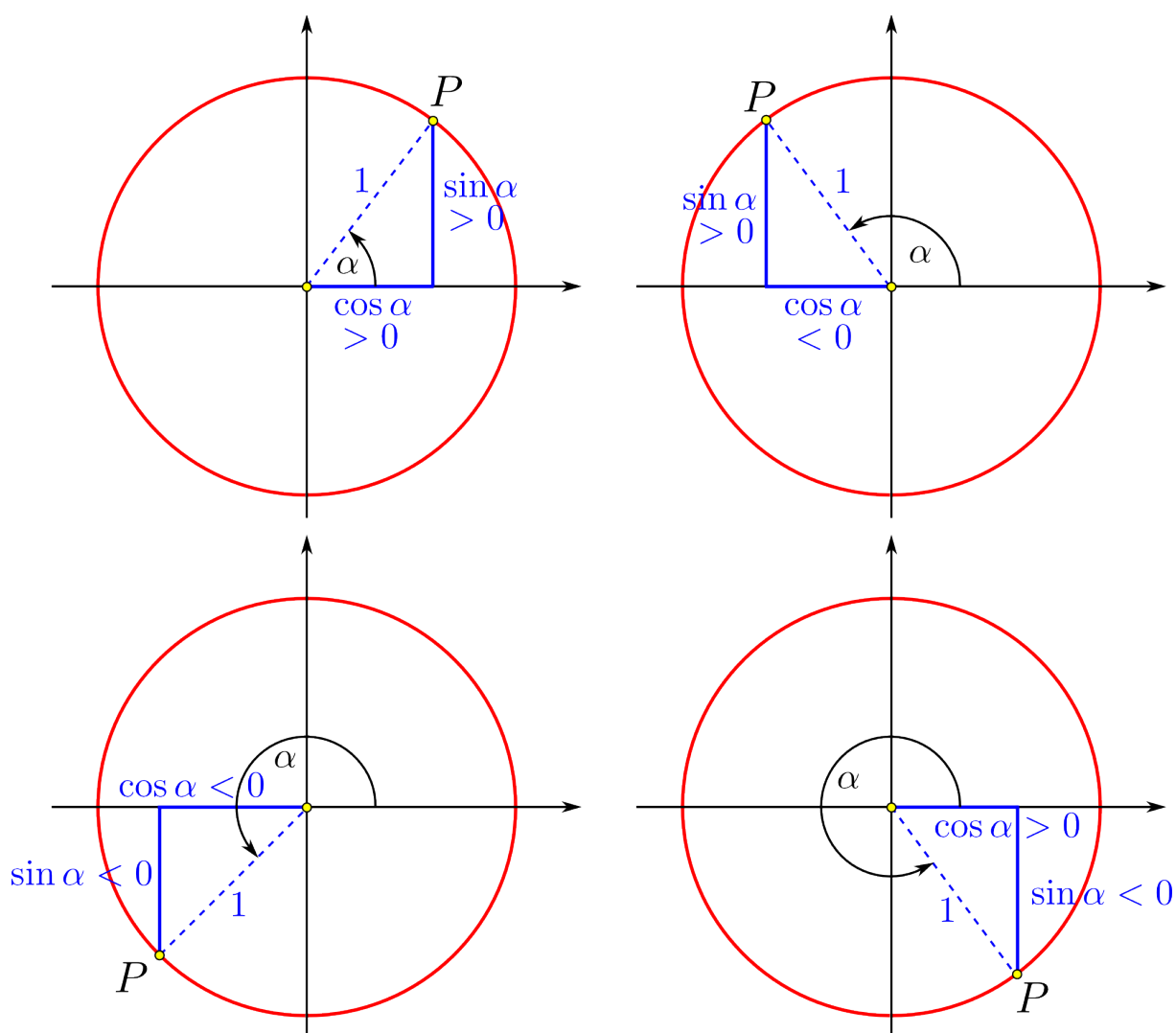


Abbildung 4: Definition der Winkelfunktionen Sinus und Cosinus für beliebige Winkel auf dem Einheitskreis.

Je nachdem, in welchem Quadranten P liegt, können unsere vier Winkelfunktionen nun auch negative Werte annehmen. In Abbildung 4 ist illustriert, wie die Vorzeichen von Sinus und Cosinus zustande kommen, wenn P in einem der vier Quadranten liegt. Der Tangens eines Winkels ist auch im allgemeinen Fall gleich dem **Anstieg der Trägergeraden von OP** (in Abbildung 4 blau strichliert eingezeichnet). Den vier Quadranten entsprechen folgende Vorzeichenkombinationen:

- Abbildung 4 links oben: P liegt im ersten Quadranten, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (im Bogenmaß: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). Die Vorzeichen von $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ sind $(+, +)$. Weiters gilt $\tan \alpha > 0$, da die strichlierte Strecke einen positiven Anstieg hat.
- Abbildung 4 rechts oben: P liegt im zweiten Quadranten, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ (im Bogenmaß: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$). Die Vorzeichen von $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ sind $(-, +)$. Weiters gilt $\tan \alpha < 0$, da die strichlierte Strecke einen negativen Anstieg hat.
- Abbildung 4 links unten: P liegt im dritten Quadranten, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ (im Bogenmaß: $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$). Die Vorzeichen von $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ sind $(-, -)$. Weiters gilt $\tan \alpha > 0$, da die strichlierte Strecke einen positiven Anstieg hat.
- Abbildung 4 rechts unten: P liegt im vierten Quadranten, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ (im Bogenmaß: $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$). Die Vorzeichen von $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ sind $(+, -)$. Weiters gilt $\tan \alpha < 0$, da die strichlierte Strecke einen negativen Anstieg hat.
- Für Winkelangaben $< 0^\circ$ und $> 360^\circ$ werden die Winkelfunktionen periodisch fortgesetzt.

Ist α ein ganzzahliges Vielfaches des rechten Winkels, dann liegt P auf einer der Koordinatenachsen (d.h. auf einer Grenzlinie zwischen zwei Quadranten), und in diesem Fall ist einer der beiden Werte für $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ gleich 0 und der andere 1 oder -1 . Einer der beiden Werte für $\tan \alpha$ und $\cot \alpha$ ist dann gleich 0, der andere ist nicht definiert.

Die von uns früher für Winkel zwischen 0° und 90° erhaltene Identität (2.10) gilt ganz allgemein¹² (sie drückt aus, dass P auf dem Einheitskreis liegt), und auch die Identitäten (2.15) und (2.16) gelten für beliebige Winkel α .

Aufgrund der Definitionen von Sinus und Cosinus als Koordinaten eines Punktes auf dem Einheitskreis liegt es auf der Hand, dass diese beiden Winkelfunktionen zur Beschreibung von **Kreisbewegungen** benutzt werden können. Bewegt sich der Punkt P , beginnend mit $P = (1, 0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$, mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω im Gegenuhrzeigersinn auf dem Einheitskreis, so ist der Winkel α zu einem Zeitpunkt t gleich ωt . Die Winkelgeschwindigkeit ω gibt an, welcher Winkel pro Zeitintervall von einem Pfeil („Zeiger“), der vom Ursprung zum Punkt P verläuft, „überstrichen“ wird¹³. Der Punkt P hat dann die Koordinaten

¹² Aus der Identität (2.10) folgt übrigens, dass $\cos \alpha$ entweder gleich $\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ oder gleich $-\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ ist, je nachdem, in welchem Quadranten P liegt.

¹³ Das ist ganz analog zur Geschwindigkeit, die angibt, welche Strecke pro Zeitintervall zurückgelegt wird. Eine typische Einheit der Geschwindigkeit ist m/s (Meter pro Sekunde), und analog dazu wird eine Winkelgeschwindigkeit entweder (wenn der Winkel im Gradmaß gemessen wird) in Grad pro Sekunde oder (wenn der Winkel im Bogenmaß gemessen wird) in Radiant pro Sekunde, d.h. einfach in Sekunde⁻¹ (s⁻¹) angegeben. Siehe dazu auch Fußnote 22.

$$P(t) = (\cos(\omega t), \sin(\omega t)).$$

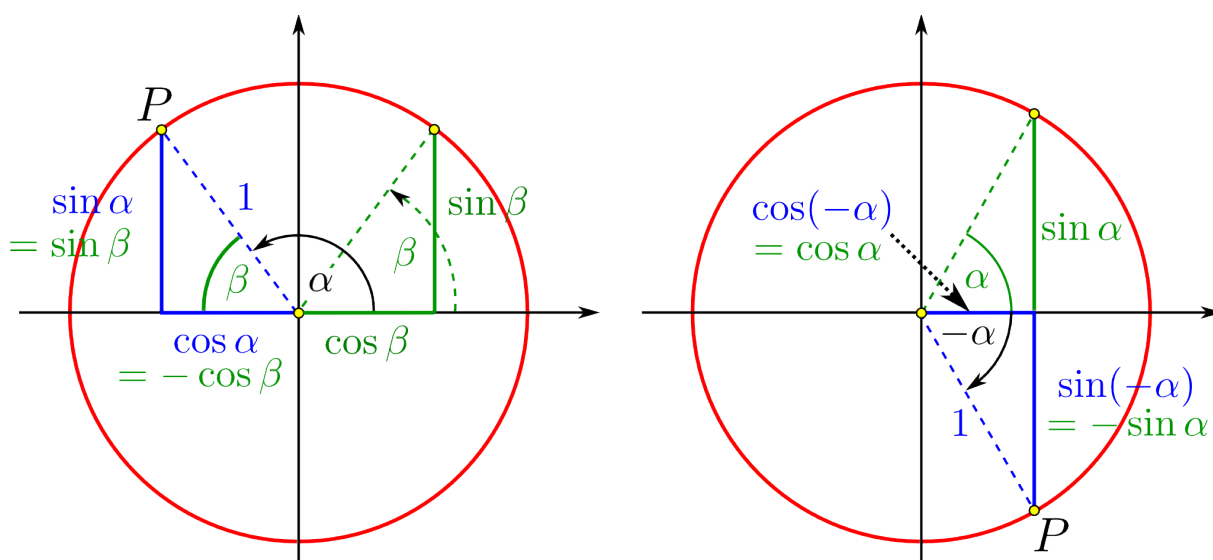


Abbildung 5: Sinus und Cosinus beliebiger Winkel können auf Winkel, die zwischen 0° und 90° liegen, zurückgeführt werden. Hier zwei Beispiele:

- Links: Zur Illustration der Identitäten (3.6) und (3.7).
- Rechts: Zur Illustration der Identitäten (3.8) und (3.9).

Jene Werte der Winkelfunktionen, für die P nicht im ersten Quadranten liegt, können leicht auf rechtwinkelige Dreiecke zurückgeführt werden, wie Abbildung 5 (links) anhand eines Winkels zwischen 90° und 180° zeigt. Der eingezeichnete Hilfswinkel β tritt in einem rechtwinkligen Dreieck auf, womit sich die Koordinaten von P durch $\sin \beta$ und $\cos \beta$, die aus den Definitionen (2.3) und (2.5) folgen, ausdrücken lassen. Da α und β zusammen einen gestreckten Winkel bilden, also $\beta = 180^\circ - \alpha$ gilt, erhalten wir die zwei Identitäten

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad (3.6)$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha, \quad (3.7)$$

die sogar für beliebige Winkel α gelten.

Zwei weitere Identitäten, die für beliebige Winkel gelten, sind

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad (3.8)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad (3.9)$$

wie in Abbildung 5 (rechts) für α zwischen 0° und 90° gezeigt. Wir sagen, dass der Sinus eine **ungerade** Funktion und der Cosinus eine **gerade** Funktion ist¹⁴.

Schließlich gelten die Identitäten

$$\sin(\alpha + 360^\circ) = \sin \alpha \quad (3.10)$$

$$\cos(\alpha + 360^\circ) = \cos \alpha \quad (3.11)$$

¹⁴ Mehr zu diesen beiden Begriffen finden Sie im Skriptum *Der Funktionen-zoo*.

gemäß unserer Vereinbarung, dass die Werte jeder Winkelfunktion für unterschiedlich angegebene Winkel, die aber geometrisch das Gleiche bedeuten, gleich sind. Wir sagen, dass Sinus und Cosinus **periodische Funktionen**¹⁵ mit Periode 360° (im Bogenmaß: 2π) sind. Da sich die Werte von Tangens und Cotangens bereits nach einer halben Umrundung des Einheitskreises wiederholen (überlegen Sie selbst, warum!), gilt

$$\tan(\alpha + 180^\circ) = \tan \alpha \quad (3.12)$$

$$\cot(\alpha + 180^\circ) = \cot \alpha \quad (3.13)$$

für beliebige α . Daher sind auch der Tangens und der Cotangens periodische Funktionen, allerdings mit (kleinster) Periode 180° (im Bogenmaß: π).

Abbildung 6 zeigt die Werte von Sinus und Cosinus für einige häufig auftretende Winkel im Einheitskreis.

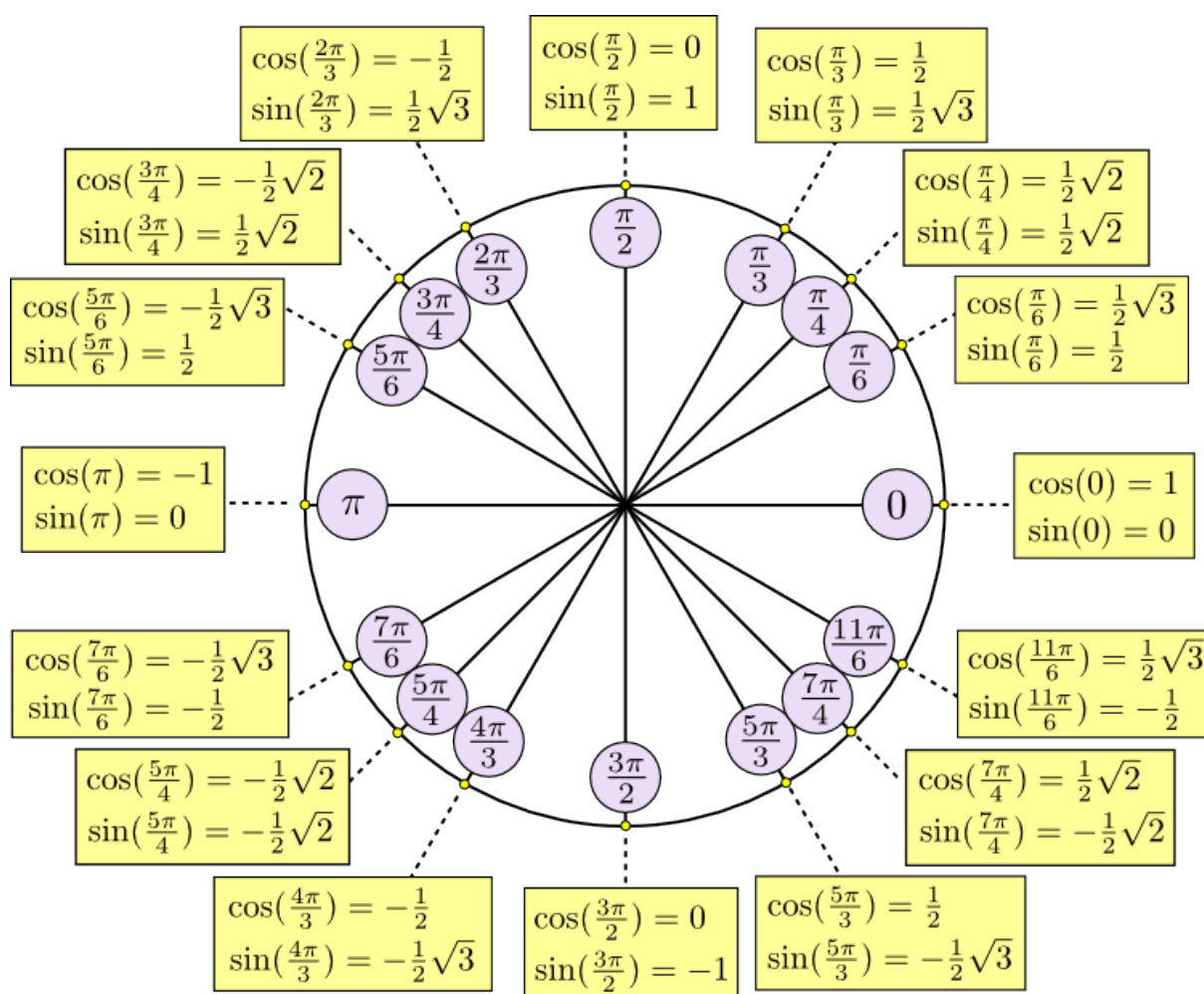


Abbildung 6: Sinus und Cosinus für einige häufig auftretende Winkel im Einheitskreis. Für die Werte im ersten Quadranten vgl. (2.17), (2.19) und (2.20).

¹⁵ Mehr zu diesem Begriff finden Sie im Skriptum *Der Funktionen-zoo*.

4 Winkelfunktionen in beliebigen Dreiecken

In beliebigen (also nicht notwendigerweise rechtwinkligen) Dreiecken gelten zwei Sätze, die für geometrische Berechnungen wichtig sind, und die wir (ohne Beweis) angeben. Mit der gleichen Bezeichnungskonvention, die wir bereits früher für rechtwinklige Dreiecke verwendet haben (die Seiten sind a , b und c , die ihnen jeweils gegenüberliegenden (Innen-)Winkel sind α , β und γ), lauten sie:

Sinussatz:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}, \quad (4.1)$$

was auch in der Form

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}, \quad \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b}{c}, \quad \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{c}{a} \quad (4.2)$$

angeschrieben werden kann¹⁶. In Worten besagt (4.1), dass das Verhältnis „Sinus eines Winkels zur gegenüberliegenden Seite“ für alle drei Winkel gleich ist. (4.2) besagt, dass das Verhältnis zweier Seiten gleich dem Verhältnis der Sinusse der gegenüberliegenden Winkel ist.

Cosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (4.3)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (4.4)$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta. \quad (4.5)$$

Beachten Sie, in welchen Kombinationen die Seiten und Winkel hier vorkommen: Links tritt jeweils eine Seite auf, rechts treten die zwei anderen Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel auf.

Ist einer der Winkel, sagen wir γ , gleich 90° , so ist gemäß (2.21) $\cos \gamma = 0$, womit (4.3) in den Satz von Pythagoras (2.1) übergeht. Wird dann c^2 in den anderen beiden Identitäten durch $a^2 + b^2$ ersetzt, so reduzieren sich diese auf die Definitionen von Sinus und Cosinus im rechtwinkligen Dreieck, besagen also nichts Neues. Der Cosinussatz kann daher als Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras auf beliebige Dreiecke angesehen werden.

Die Formeln (4.3)–(4.5) können nach den Cosinussen der Winkel aufgelöst werden. Daher kann der Cosinussatz dazu benutzt werden, die Winkel in Dreiecken, in denen nur Längen bekannt sind, zu berechnen¹⁷.

¹⁶ Wir erwähnen nebenbei zwei weitere interessante Beziehungen: Für den Flächeninhalt A eines Dreiecks gilt $2A = ab \sin \gamma = bc \sin \alpha = ca \sin \beta$. Für den Radius R des Umkreises gilt $2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

¹⁷ Das verweist auf eine tiefere, für die Grundlagen der Mathematik wichtige Bedeutung des Cosinussatzes: Mit seiner Hilfe lässt sich der Winkelbegriff auf den Längenbegriff zurückführen.

5 Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen

Gerade haben wir gesagt, dass der Cosinussatz dazu benutzt werden kann, die Winkel in Dreiecken, in denen nur Längen bekannt sind, zu berechnen.

Gilt beispielsweise $a = 4$, $b = 5$ und $c = 6$, so folgt aus (4.3), dass $\cos \gamma = \frac{1}{8}$ ist. Das wirft die Frage auf, welche Winkel einen Cosinus von $\frac{1}{8}$ haben.

Auch im Zusammenhang mit dem Sinussatz tritt eine derartige Problemstellung auf:

Ist etwa in einem Dreieck $a = 7$, $b = 3$ und $\alpha = 63^\circ$, so berechnen wir mit (4.2) $\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha = \frac{3}{7} \sin(63^\circ) \approx 0.38186$. Hier stehen wir vor der Frage, welche Winkel einen Sinus von 0.38186 haben.

Die numerische Berechnung von Winkeln, deren Sinus oder Cosinus wir kennen, lassen wir wieder unsere elektronischen Werkzeuge (Taschenrechner oder Computerprogramm) durchführen. Es ist aber nützlich, den Operationen, die diese Werkzeuge durchführen, einen Namen zu geben. Wir nennen Sie die **Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen**, kurz **inverse Winkelfunktionen** oder **Arcusfunktionen**¹⁸. Es sind dies:

- Die Funktion **Arcus Sinus** (Symbol \arcsin oder kurz \asin) weist jeder Zahl c , die zwischen -1 und 1 liegt, jenen (eindeutig bestimmten) Winkel α zu, für den $\sin \alpha = c$ gilt und der zwischen -90° und 90° (im Bogenmaß: zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$) liegt.
- Die Funktion **Arcus Cosinus** (Symbol \arccos oder kurz \acos) weist jeder Zahl c , die zwischen -1 und 1 liegt, jenen (eindeutig bestimmten) Winkel α zu, für den $\cos \alpha = c$ gilt und der zwischen 0° und 180° (im Bogenmaß: zwischen 0 und π) liegt.
- Die Funktion **Arcus Tangens** (Symbol \arctan oder kurz \atan) weist jeder reellen Zahl c jenen (eindeutig bestimmten) Winkel α zu, für den $\tan \alpha = c$ gilt und der zwischen -90° und 90° (im Bogenmaß: zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$) liegt.
- Die Funktion **Arcus Cotangens** (Symbol arccot oder kurz acot) weist jeder reellen Zahl $c \neq 0$ jenen (eindeutig bestimmten) Winkel α zu, für den $\cot \alpha = c$ gilt und der zwischen -90° und 90° (im Bogenmaß: zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$) liegt. Für $c = 0$ ist $\operatorname{acot}(0) = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ definiert.

Der tiefere Grund für diese recht kompliziert anmutenden Beschreibungen liegt darin, dass ein Winkel durch den Wert einer seiner Winkelfunktionen nicht eindeutig bestimmt ist. So gibt es beispielsweise zwei Winkel zwischen 0° und 360° , deren Sinus gleich $\frac{1}{2}$ ist, nämlich 30° und 150° . (Das geht aus der Darstellung des Sinus als zweite Koordinate des entsprechenden Punktes P auf dem Einheitskreis gemäß Abbildung 4 hervor: Es gibt genau zwei Möglichkeiten für P , am Einheitskreis zu liegen und als zweite Koordinate $\frac{1}{2}$ zu haben. Sie entsprechen genau den Winkeln $\alpha = 30^\circ$ und $\alpha = 150^\circ$. Zeichnen Sie diese Situation auf!) Wollen wir das Bilden des Sinus „umkehren“, so müssen wir eine Wahl treffen, welcher dieser beiden Winkel

¹⁸ Vom lateinischen *arcus* für „Bogen“. Erinnern Sie sich, dass ein Winkel im Bogenmaß als Länge des Bogens am Einheitskreis gemessen wird! Funktionen, deren Funktionswerte Winkel sind, werden daher als *Arcusfunktionen* bezeichnet, und ihren Symbolen wird ein *arc* (oft zu *a* verkürzt) vorangestellt.

ausgegeben werden soll, und das Gleiche gilt auch für die anderen Winkelfunktionen¹⁹. Die obige Beschreibung der Arcusfunktionen drückt eine solche Wahl aus.

Auf wissenschaftlichen Taschenrechnern sind die Tasten für die inversen Winkelfunktionen entweder durch ein vorangestelltes „arc“ (oder „a“) oder durch ein hochgestelltes $^{-1}$ gekennzeichnet. Den Arcus Sinus finden Sie also unter einer der Bezeichnungen „arcsin“, „asin“ oder „sin $^{-1}$ “, manchmal auch, indem vor „sin“ eine Taste namens „inv“ gedrückt wird. Um diese Funktionen nutzen zu können, müssen Sie allerdings wissen, ob die Ausgabe im Gradmaß oder im Bogenmaß erfolgt.

Hier ein nützlicher **Tipp**: Um zu testen, in welchem Winkelmaß Ihr Rechner einen Winkel ausgibt, müssen Sie lediglich $\text{asin}(1)$ berechnen. Ist das Ergebnis 90, so handelt es sich um eine Ausgabe im Gradmaß, die als 90° zu verstehen ist. Ist das Ergebnis 1.570796327, so handelt es sich um eine Ausgabe im Bogenmaß, die als $\frac{\pi}{2}$ zu verstehen ist.

Falls Sie mit Hilfe der inversen Winkelfunktionen Dreiecksberechnungen durchführen, so bedenken Sie, dass in einem Dreieck nur (Innen-)Winkel zwischen 0° und 180° auftreten können. Das entspricht gemäß Abbildung 4 der Situation, dass der Punkt P im ersten oder zweiten Quadranten (also oberhalb der ersten Achse) liegt. Ist der Cosinus eines solchen Winkels (also die erste Koordinate von P) bekannt, so ist der Winkel eindeutig bestimmt und wird mit Hilfe der Arcus Cosinus-Funktion berechnet.

Damit können wir das erste der oben gestellten Probleme lösen: Gilt in einem Dreieck $a = 4$, $b = 5$ und $c = 6$, so folgt aus (4.3), dass $\cos \gamma = \frac{1}{8}$ ist. Daher ist $\gamma = \arccos(\frac{1}{8}) \approx 82.819^\circ$ (im Bogenmaß ≈ 1.4455).

Ist hingegen der Sinus eines Winkels zwischen 0° und 180° (also die zweite Koordinate von P) bekannt (und $\neq 1$), so gibt es zwei Winkel zwischen 0° und 180° , die den gleichen Sinus haben. Die Arcus Sinus-Funktion gibt einen dieser beiden Winkel aus (und zwar jenen, der zwischen 0° und 90° liegt). Ist einer der beiden Winkel α , so ist der andere $180^\circ - \alpha$. Welcher der gesuchte ist (oder ob das gestellte geometrische Problem zwei Lösungen hat), muss dann aus dem jeweiligen Kontext erschlossen werden.

Damit können wir das zweite der oben gestellten Probleme lösen: Ist in einem Dreieck $a = 7$, $b = 3$ und $\alpha = 63^\circ$, so berechnen wir mit (4.2) $\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha \approx 0.38186$. Daher gibt es zwei Möglichkeiten für den Winkel β , nämlich $\beta_1 \approx \arcsin(0.38186) \approx 22.4489^\circ$ (im Bogenmaß: ≈ 0.391808) und $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 \approx 157.551^\circ$ (im Bogenmaß: ≈ 2.74978). Da aber $\alpha + \beta_2$ mit ungefähr 221° größer als 180° ist, kann β_2 kein Innenwinkel eines Dreiecks sein und scheidet aus. Das Problem besitzt eine eindeutige Lösung, nämlich $\beta = \beta_1$. Zeichnen Sie die angegebene geometrische Problemstellung auf!

¹⁹ Das ist ganz analog zum Quadrieren und dem Wurzelziehen: Es gibt zwei Zahlen, deren Quadrat 4 ist, nämlich -2 und 2 . Bei der Umkehrung, dem Wurzelziehen, entscheiden wir uns für die positive Zahl, also 2 , und legen fest: $\sqrt{4} = 2$.

Ähnliche Mehrdeutigkeiten gibt es auch für den Tangens und den Cotangens.

Wie die Winkelfunktionen sind auch die Arcusfunktionen nicht voneinander unabhängig. So besteht beispielsweise zwischen der Arcus Sinus- und der Arcus Cosinus-Funktion die Identität

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \quad (5.1)$$

für alle x zwischen -1 und 1 . (Überlegen Sie, warum!)

6 Graphen der Winkelfunktionen

Um die Werte und Vorzeichen der Winkelfunktionen, ihre Periodizität, die Verwandtschaftsverhältnisse für Winkel, die unterschiedlichen Quadranten am Einheitskreis entsprechen, und die Monotonieeigenschaften dieser Funktionen schnell zu überblicken, ist die grafische Darstellung die geeignetste. Wie die Graphen der Sinus- und der Cosinusfunktion aussehen, ergibt sich qualitativ durch ihre Darstellung am Einheitskreis (Abbildung 4): Während P einmal im Gegenuhrzeigersinn um den Einheitskreis läuft, α daher um 360° oder 2π zunimmt, wachsen bzw. fallen $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ je nachdem, in welchem Quadranten sich P gerade befindet. Liegt P auf einer Koordinatenachse, so ist einer der beiden Werte 0 und der andere -1 oder 1 , sodass die Graphen ein „Auf und Ab“ zwischen den Werten -1 und 1 (oder, wenn man sich α als Zeit vorstellt, das Verhalten von „Schwingungen“) zeigen. Der Tangens (als Quotient „Sinus durch Cosinus“ bzw. als Anstieg der Trägergeraden von OP) kann beliebige Werte annehmen und ist dann, wenn P auf der zweiten Achse liegt, nicht definiert. Der Cotangens (als „1 durch Tangens“) kann ebenfalls beliebige Werte annehmen und ist dann, wenn P auf der ersten Achse liegt, nicht definiert.

Die Graphen dieser vier Funktionen sind in Abbildung 7 gezeigt. Da der Winkel (die unabhängige, auf der ersten Achse aufgetragene Variable) im Zusammenhang mit den Graphen meist im Bogenmaß angegeben wird, machen wir das auch so. Stellen wir die wichtigsten Eigenschaften, die sich aus den Verläufen der Graphen ergeben (und die wir zum Teil bereits gefunden haben), zusammen:

- Sinus und Cosinus sind periodische Funktionen mit Periode 2π . Tangens und Cotangens sind periodische Funktionen mit Periode π .
- Sinus und Cosinus nehmen Werte zwischen -1 und 1 an. Tangens und Cotangens können beliebige reelle Werte annehmen.
- Die Graphen von Sinus und Cosinus sind zueinander in Richtung der ersten Achse verschoben, haben aber ansonsten die gleiche Form. Das entspricht der Identität

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha, \quad (6.1)$$

die wir – nun im Bogenmaß ausgedrückt – aus (2.16) und (3.9) erhalten. Sie besagt, dass wir den Graphen der Sinusfunktion erhalten, indem wir den Graphen der Cosinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschieben. Wir können sie auch in der Form

$$\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad (6.2)$$

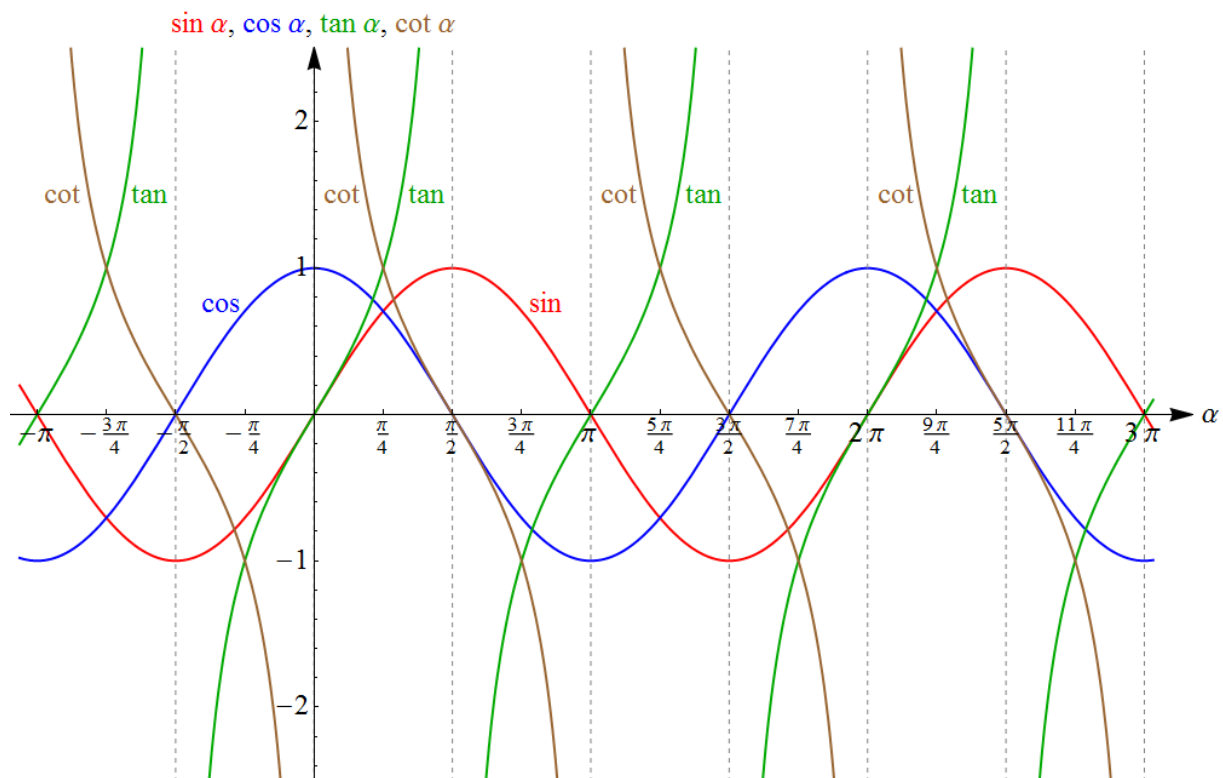


Abbildung 7: Die Graphen der vier Winkelfunktionen Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens. Die unabhängige Variable (der Winkel α) ist im Bogenmaß angegeben.

anschreiben, was besagt, dass wir den Graphen der Cosinusfunktion erhalten, indem wir den Graphen der Sinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschieben.

- Die Nullstellen der Sinusfunktion liegen bei allen ganzzahligen Vielfachen von π . Die Nullstellen der Cosinusfunktion sind entsprechend verschoben. Wo eine der beiden Funktionen eine Nullstelle hat, hat die andere ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum.
- Die strichlierten „vertikalen“ Hilfslinien in Abbildung 7 bei den ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ (also 90°) markieren jene Winkel, für die der Tangens oder der Cotangens nicht definiert ist. Sie sind Asymptoten der entsprechenden Graphenstücke.
- Die Graphen der Winkelfunktionen zeigen, dass es für keine von ihnen eine globale Umkehrfunktion gibt. Ist etwa ein Winkel gesucht, dessen Sinus gleich $\frac{1}{2}$ ist, so entspricht das der Gleichung $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. Um sie grafisch zu lösen, müssen wir die Schnittpunkte des Graphen der Sinusfunktion mit jener („horizontalen“, also zur ersten Achse parallelen) Geraden, deren zweite Koordinate überall gleich $\frac{1}{2}$ ist, ermitteln. Klarerweise gibt es unendlich viele Lösungen, von denen zwei im Bereich zwischen 0 und $\pi = 180^\circ$ liegen, nämlich $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$ und $\alpha = \frac{5\pi}{6} = 150^\circ$, wie wir bereits früher festgestellt haben. Ähnliches gilt auch für die anderen Winkelfunktionen.

7 Abkömmlinge der Sinus- und der Cosinusfunktion

Die im vorigen Abschnitt besprochenen Graphen legen es nahe, Schwingungsvorgänge (wie etwa den zeitlichen Verlauf einer Wechselspannung) durch die Sinus- oder Cosinusfunktion zu beschreiben²⁰. Dazu lassen wir den Winkel α gemäß $\alpha = \omega t$ von der Zeit t abhängen (wie wir das bereits früher bei der Betrachtung der gleichmäßigen Bewegung eines Punktes auf dem Einheitskreis gemacht haben). Hängt eine Größe s gemäß

$$s(t) = A \sin(\omega t) \quad (7.1)$$

von der Zeit ab, wobei A eine positive Konstante ist, so sprechen wir von einer **harmonischen Schwingung**. Die Konstante ω wird in diesem Zusammenhang *Kreisfrequenz* genannt²¹, die Konstante A heißt *Amplitude*. Die *Periodendauer*, d.h. die Zeit, während der eine vollständige Periode durchlaufen wird, ist durch $T = \frac{2\pi}{\omega}$ gegeben, die *Frequenz*²² durch $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$. Wollen wir (7.1) durch die Frequenz oder durch die Periodendauer ausdrücken, so können wir stattdessen auch eine der beiden Formen

$$s(t) = A \sin(2\pi f t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad (7.2)$$

benutzen. Etwas allgemeiner als (7.1) können wir zur Beschreibung einer Schwingung

$$s(t) = A \sin(\omega t + \delta) \quad (7.3)$$

ansetzen, wobei δ die *Anfangsphase* ist, da der Term $\omega t + \delta$, von dem die Sinusfunktion gebildet wird, zur (Anfangs-)Zeit $t = 0$ den Wert δ hat²³.

Treten in einer Anwendungssituation mehrere durch Funktionen der Form (7.3) beschriebene Schwingungen (z.B. Wechselspannungen und Wechselströme) mit unterschiedlichen Amplituden, Frequenzen und Anfangsphasen auf, so ist es nützlich, ein bisschen über die Graphen solcher Funktionen zu wissen. Im Hinblick auf die allgemeine Form (7.3) bezeichnen wir die unabhängige Variable im Folgenden mit t . Wir können uns t als Zeit vorstellen. Um uns nicht

²⁰ Ob man lieber die Sinusfunktion oder die Cosinusfunktion dafür verwendet, ist Geschmackssache, da die beiden Funktionen – wie (6.1) und (6.2) zeigen – ja nur um $\frac{\pi}{2}$ „versetzte“ Versionen voneinander sind.

²¹ Sie misst, wie schnell sich der Winkel, von dem der Sinus gebildet wird, also ωt , mit der Zeit ändert. Eine ganz ähnliche Situation haben wir bereits früher in diesem Skriptum erwähnt (blättern Sie zurück!): Auch beim gleichmäßigen Umlauf eines Punktes auf dem Einheitskreis tritt ein Winkel auf, der proportional zur Zeit anwächst. Die dort aufgetretene Konstante, die Winkelgeschwindigkeit, wurde mit dem gleichen Symbol ω bezeichnet, da sie in formaler Hinsicht die gleiche Rolle spielt wie hier die Kreisfrequenz.

²² Dass der Zusammenhang zwischen Frequenz und Periodendauer durch $f = \frac{1}{T}$ gegeben ist, können Sie sich so überlegen: Während einer Periodendauer T wird 1 Schwingung ausgeführt. Werden in einer Sekunde 10 komplette Schwingungen ausgeführt, so dauert eine Schwingung $\frac{1}{10}$ Sekunde. In dieser Situation ist $T = \frac{1}{10}$ s und $f = 10$ Schwingungen pro Sekunde oder 10 Hz, wobei Hz (für *Hertz*, nach Heinrich Hertz, 1857 – 1894) die zur Angabe von Frequenzen verwendete Abkürzung von s^{-1} ist. Für Winkelgeschwindigkeiten wird diese Abkürzung übrigens nicht empfohlen, obwohl sie theoretisch möglich wäre.

²³ In Physik und Technik wird das Argument einer Sinus- oder Cosinusfunktion, im Fall (7.1) also ωt , im Fall (7.3) $\omega t + \delta$, oft als *Phase* bezeichnet, insbesondere dann, wenn es sich nicht um einen geometrischen Sachverhalt handelt, in dem das Wort „Winkel“ angebracht wäre. Im Laufe einer kompletten Periode (d.h. einer vollständigen Schwingung) wächst die Phase um 2π .

mit physikalischen Einheiten herumzuschlagen, behandeln wir t als dimensionslos²⁴. Nun betrachten wir die durch

$$f_0(t) = \sin t \quad (7.4)$$

$$f_1(t) = 2 \sin t \quad (7.5)$$

$$f_2(t) = \sin(3t) \quad (7.6)$$

$$f_3(t) = 2 \sin(3t) \quad (7.7)$$

$$f_4(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{8}\right) \quad (7.8)$$

$$f_5(t) = 2 \sin\left(3t - \frac{\pi}{8}\right) \quad (7.9)$$

definierten Funktionen f_0, \dots, f_5 , besprechen ihre Eigenschaften und sehen uns ihre (in Abbildung 8 gezeigten) Graphen an²⁵.

- f_0 ist die Sinusfunktion, deren Graph bereits in Abbildung 7 dargestellt wurde. Wie wir bereits wissen, ist sie periodisch mit Periode 2π . Im Hinblick auf die allgemeine Form (7.3) können wir ihr die Amplitude $A = 1$, die Kreisfrequenz $\omega = 1$ (daher die Frequenz $f = \frac{1}{2\pi}$ und die Periodendauer $T = 2\pi$) und die Anfangsphase $\delta = 0$ zuschreiben. Aus ihren Eigenschaften ergeben sich jene der Funktionen f_1 bis f_5 .
- Die Werte der Funktion f_1 sind an jeder Stelle t doppelt so groß wie jene der Sinusfunktion f_0 . Der Graph von f_1 geht aus jenem von f_0 hervor, indem dieser in die Richtung der zweiten Achse um den Faktor 2 gestreckt wird. f_1 ist periodisch mit Periode 2π . Im Hinblick auf die allgemeine Form (7.3) schreiben wir f_1 die Amplitude $A = 2$, die Kreisfrequenz $\omega = 1$ (daher die Frequenz $f = \frac{1}{2\pi}$ und die Periodendauer $T = 2\pi$) und die Anfangsphase $\delta = 0$ zu.
- Der Wert der Funktion f_2 an einer Stelle t ist gleich dem Wert der Sinusfunktion f_0 an der Stelle $3t$, die also dreimal so weit vom Nullpunkt entfernt liegt wie t . Daher geht der Graph von f_2 aus jenem von f_0 hervor, indem dieser in die Richtung der ersten Achse um den Faktor $\frac{1}{3}$ gestaucht wird. f_2 ist periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{3}$. Im Hinblick auf die allgemeine Form (7.3) schreiben wir f_2 die Amplitude $A = 1$, die Kreisfrequenz $\omega = 3$ (daher die Frequenz $f = \frac{3}{2\pi}$ und die Periodendauer $T = \frac{2\pi}{3}$) und die Anfangsphase $\delta = 0$ zu.
- Die Funktion f_3 wird aus der Sinusfunktion f_0 durch eine Verdopplung der Amplitude und eine Verdreifachung der Kreisfrequenz erhalten. f_3 ist periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{3}$.

²⁴ Physikalisch wird die Zeit natürlich in einer Zeiteinheit gemessen, z.B. in Sekunden. Daraus ergibt sich die Einheit der Kreisfrequenz als Sekunde⁻¹ (s⁻¹). Das ist die gleiche Einheit, in der wir die Frequenz messen, und es ist auch die gleiche Einheit, die wir bereits früher für die Winkelgeschwindigkeit identifiziert haben, siehe die Fußnoten 13 und 22. Wenn wir vereinbaren, dass t die „Zahl der Sekunden“ darstellt, wird t zu einer dimensionslosen Variable. Die Zeit, die einem konkreten Wert von t entspricht, ist dann genau genommen nicht t , sondern „ t Sekunden“. Als Folge werden dann die Größen ω und f ebenfalls dimensionslos: Die Winkelgeschwindigkeit ist „ ω s⁻¹“, die Frequenz ist „ f Hz“.

²⁵ Im Skriptum *Quadratische Funktionen und ihre Graphen* wurde anhand der quadratischen Funktionen vorgeführt, wie die Graphen von Funktionen gewonnen werden, die aus einer bekannten Funktion durch derartige Transformationen hervorgehen. Wenn Sie sich nicht mehr daran erinnern, lesen Sie die entsprechenden Stellen noch einmal durch!

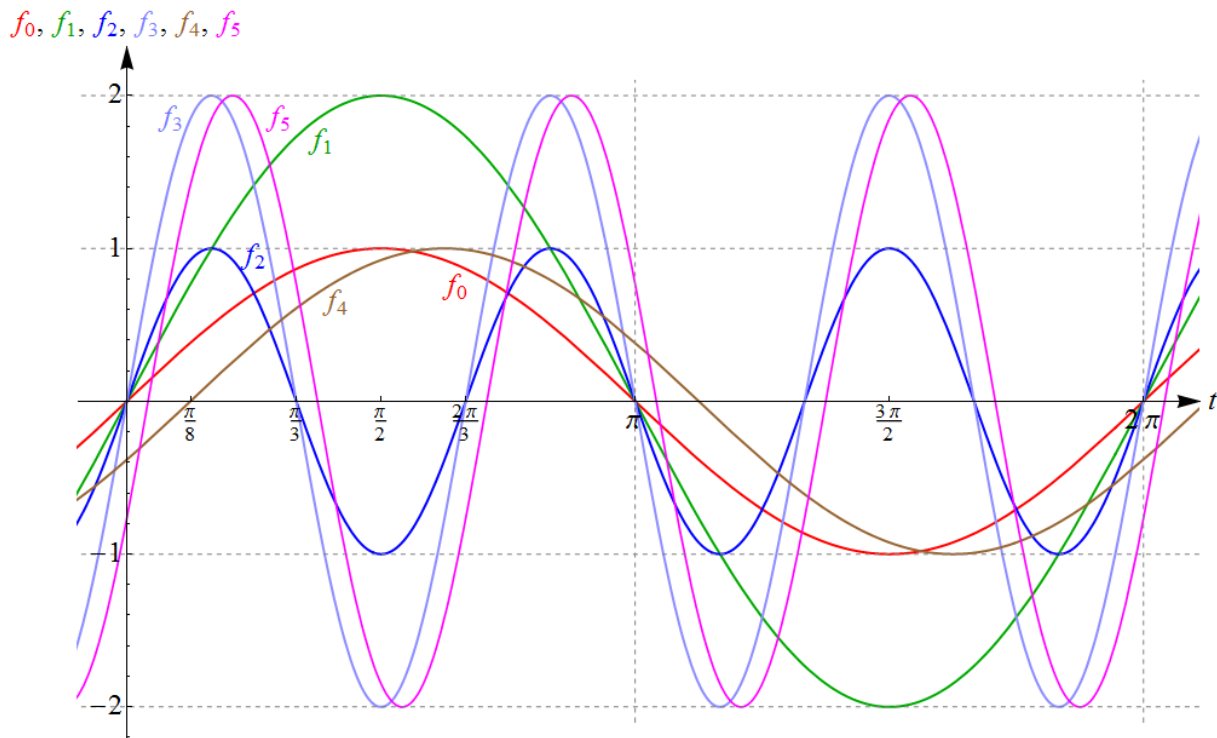


Abbildung 8: Die Graphen der in (7.4) – (7.9) definierten Funktionen.

Im Hinblick auf die allgemeine Form (7.3) schreiben wir f_3 die Amplitude $A = 2$, die Kreisfrequenz $\omega = 3$ (daher die Frequenz $f = \frac{3}{2\pi}$ und die Periodendauer $T = \frac{2\pi}{3}$) und die Anfangsphase $\delta = 0$ zu.

- Der Wert der Funktion f_4 an einer Stelle t ist gleich dem Wert der Sinusfunktion f_0 an der Stelle $t - \frac{\pi}{8}$, der also um $\frac{\pi}{8}$ weiter links liegt als t . Daher geht der Graph von f_4 aus jenem von f_0 hervor, indem dieser um $\frac{\pi}{8}$ in Richtung der ersten Achse (d.h. nach rechts) verschoben wird. f_1 ist periodisch mit Periode 2π . Im Hinblick auf die allgemeine Form (7.3) schreiben wir f_4 die Amplitude $A = 1$, die Kreisfrequenz $\omega = 1$ (daher die Frequenz $f = \frac{1}{2\pi}$ und die Periodendauer $T = 2\pi$) und die Anfangsphase $\delta = -\frac{\pi}{8}$ zu. Wir sagen, dass f_0 und f_4 zueinander *phasenverschoben* sind. Ein Check ergibt sich, indem wir die kleinste positive Nullstelle von f_4 am Graphen ablesen: Sie liegt bei $t = \frac{\pi}{8}$. Die Rechnung bestätigt: $f_4\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin 0 = 0$.
- Die Funktion f_5 wird aus der Sinusfunktion f_0 durch eine Verdopplung der Amplitude, eine Verdreifachung der Kreisfrequenz und eine Phasenverschiebung um $-\frac{\pi}{8}$ erhalten. f_5 ist periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{3}$. Im Hinblick auf die allgemeine Form (7.3) schreiben wir f_5 die Amplitude $A = 2$, die Kreisfrequenz $\omega = 3$ (daher die Frequenz $f = \frac{3}{2\pi}$ und die Periodendauer $T = \frac{2\pi}{3}$) und die Anfangsphase $\delta = -\frac{\pi}{8}$ zu. Die Funktionen f_5 und f_3 besitzen die gleiche Amplitude und die gleiche Kreisfrequenz. Sie unterscheiden sich nur durch den Wert der Anfangsphase δ , sind daher zueinander *phasenverschoben*. Ihre Phasenverschiebung beträgt $\frac{\pi}{8}$. Dementsprechend sind sie auch *zeitverschoben*. Wenn wir f_5 und f_3 als von einem Empfänger gemessene Signale interpretieren, kommt das

durch f_3 beschriebene Signal ein bisschen früher an als das durch f_5 beschriebene. Um den Wert der Zeitverschiebung zu ermitteln, formen wir $3t - \frac{\pi}{8}$ zu $3\left(t - \frac{\pi}{24}\right)$ um. Daraus ergibt sich, dass der Graph von f_5 aus jenem von f_3 durch eine Verschiebung um $\frac{\pi}{24}$ in Richtung der ersten Achse (d.h. nach rechts oder „später“) hervorgeht.

Die Klasse der Funktionen vom Typ (7.3) wird auch als „allgemeine Sinusfunktion“ bezeichnet. Analog dazu können wir zur Beschreibung von Schwingungen auch die Cosinusfunktion benutzen und

$$s(t) = A \cos(\omega t + \delta') \quad (7.10)$$

schreiben. Aus (6.1) folgt, dass (7.10) die gleiche Schwingung wie (7.3) beschreibt, wenn $\delta' = \delta - \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird. Eine dritte, zu (7.10) und (7.3) gleichwertige Form der Beschreibung von Schwingungen besteht darin, $s(t)$ als Linearkombination einer Sinus- und einer Cosinusfunktion, beide ohne δ 's, anzusetzen:

$$s(t) = B \sin(\omega t) + C \cos(\omega t). \quad (7.11)$$

Die Amplitude der Schwingung ist in dieser Darstellungsform durch $\sqrt{B^2 + C^2}$ gegeben. (7.11) beschreibt die gleiche Schwingung wie (7.3), wenn $A = \sqrt{B^2 + C^2}$ gesetzt und δ geeignet gewählt wird.

8 Sinus und Tangens für kleine Winkel

Für Winkel α , die im Bogenmaß angegeben sind und deren Betrag sehr viel kleiner als 1 ist, gilt

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha. \quad (8.1)$$

Das ist eine in vielen Situationen nützliche Näherung, die aus der in Abbildung 9 wiedergegebenen Skizze hervorgeht. Ist $|\alpha| < 0.1$ (was im Gradmaß $|\alpha| < 6^\circ$ entspricht), so ist der relative Fehler kleiner als ein halbes Prozent.

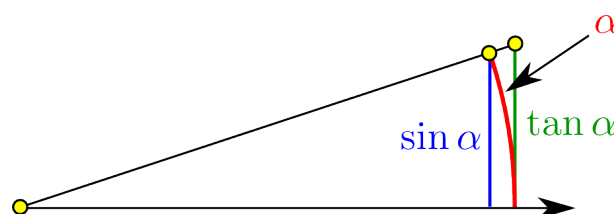


Abbildung 9: Ein im Bogenmaß angegebener Winkel α ist gleich der Länge des Bogens am Einheitskreis (rot). Je kleiner der Betrag von α , umso ähnlicher sind $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ und α .

Dass für kleine Winkel $\sin \alpha \approx \tan \alpha$ gilt, drückt sich in Abbildung 7 dadurch aus, dass die Graphen der Sinus- und der Tangensfunktion bei $\alpha = 0$ zueinander tangential sind.

9 Sekans und Cosekans

Zwei Winkelfunktionen, die vor allem im englischsprachigen Raum benutzt werden und die Ihnen vielleicht einmal bei der Ausgabe eines Computeralgebrasystems oder in der Literatur begegnen, sind:

Der **Sekans** (Betonung auf dem „e“) eines Winkels α ist definiert durch

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad (9.1)$$

der **Cosekans** (Betonung auf dem „o“) eines Winkels α ist definiert durch

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}. \quad (9.2)$$

10 Additionstheoreme

Zum Abschluss erwähnen wir noch, dass es zahlreiche Identitäten gibt, in denen Winkelfunktionen von Summen und Summen von Winkelfunktionen vorkommen. Die wichtigsten dieser **Additionstheoreme** (oder **Summensätze**) lauten:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (10.1)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (10.2)$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \tan(\beta)} \quad (10.3)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (10.4)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right). \quad (10.5)$$

Sie gelten für beliebige Winkel α und β (ausgenommen in (10.3) jene Werte, für die eine der auftretenden Tangensfunktionen nicht definiert ist).

Beispiel für eine praktische Anwendung: Aus (10.1) folgt mit $\alpha = \omega t$ und $\beta = \delta$, dass eine in der Form (7.3) beschriebene harmonische Schwingung auch in der Form (7.11) angeschrieben werden kann. Es folgen dann mit $B = A \cos \delta$ und $C = A \sin \delta$ die Umrechnungsformeln zwischen den Konstanten (A, δ) und den Konstanten (B, C) .

Mit $\beta = \alpha$ erhalten wir aus (10.1) und (10.2) die Identitäten

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (10.6)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad (10.7)$$

die oft verwendet werden, um Ausdrücke, die Winkelfunktionen enthalten, zu vereinfachen.

11 Übungsaufgaben

Hier einige Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Berechnen Sie (näherungsweise, auf 4 signifikante Stellen genau) die durch Symbole in **rot** bezeichneten Seiten und Winkel in Abbildung 10! Geben Sie die gesuchten Winkel auch im Bogenmaß an!

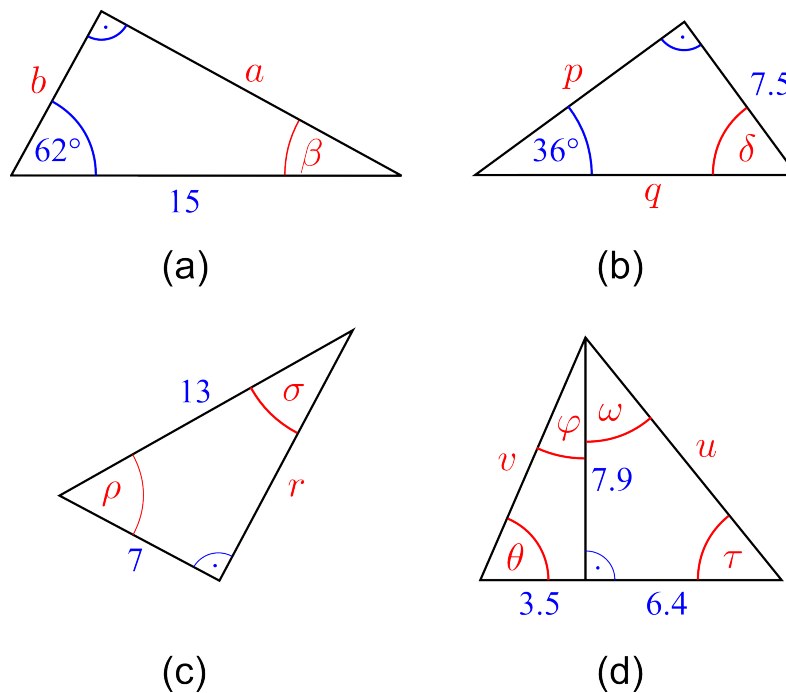


Abbildung 10

Lösungen:

- (a) $\beta = 28^\circ \approx 0.4887$, $a \approx 13.24$, $b \approx 7.042$.
 (b) $\delta = 54^\circ \approx 0.9425$, $q \approx 12.76$, $p \approx 10.32$.
 (c) $r \approx 10.95$, $\sigma \approx 32.58^\circ \approx 0.5686$, $\rho \approx 57.42^\circ \approx 1.002$.
 (d) $v \approx 8.641$, $u \approx 10.17$, $\theta \approx 66.10^\circ \approx 1.154$, $\varphi \approx 23.90^\circ \approx 0.4170$, $\omega \approx 39.01^\circ \approx 0.6809$, $\tau \approx 50.99^\circ \approx 0.8899$.

- Beweisen Sie (2.19) und (2.20)! Tipp: Sie müssen dazu nur ein gleichseitiges Dreieck betrachten und den Satz von Pythagoras benutzen!

Weiterer Tipp:

Zeichnen Sie eine Höhenlinie ein! Sie zerlegt das gleichseitige Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke. Welche Winkel treten in ihnen auf? Berechnen Sie nun die Höhe mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und wenden Sie (2.3) und (2.5) an!

- Eine Straße hat eine Steigung von 12%. Welchen Winkel bildet sie mit der Horizontalen? Lösung:

$$\alpha = \arctan(0.12) \approx 0.1194 \approx 6.84^\circ.$$

- Geben Sie (ohne elektronisches Hilfsmittel, auch ohne Blick in dieses Skriptum) die Vorzeichen von $\sin(220^\circ)$, $\sin(2.58)$, $\cos(100^\circ)$, $\cos(1.1)$, $\tan(130^\circ)$ und $\tan(3.6)$ an!

Lösung:

Die Vorzeichen wechseln einander ab, beginnend mit einem Minus.

- Drücken Sie $\sin(\alpha + 180^\circ)$ durch $\sin \alpha$ aus!

Lösung:

$$\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin \alpha.$$

Ersetzen Sie in (3.6) α durch $-\alpha$ und benutzen Sie (3.8)!

- Argumentieren Sie mit Hilfe des Graphen der Cosinusfunktion und des Graphen der Funktion $x \mapsto x$, dass die Gleichung $\cos x = x$ genau eine Lösung besitzt!

Lösung:

Der Graph der Funktion $x \mapsto x$ ist die Gerade durch den Ursprung mit Anstieg 1. Sie besitzt mit dem Graphen der Cosinusfunktion genau einen Schnittpunkt.

- Um ein Gefühl dafür zu bekommen, wie die in der „allgemeinen Sinusfunktion“ (7.3) vorkommenden Konstanten (Parameter) A , ω und δ den Graphen beeinflussen, legen Sie in *GeoGebra* für jede dieser Konstanten einen Schieberegler an, geben Sie den Funktionsterm ein und variieren Sie die Werte der Konstanten! Benutzen Sie diese Methode, um sich die Graphen der Funktionen

$$g_1(t) = 4 \sin t$$

$$g_2(t) = 0.2 \sin t$$

$$g_3(t) = \sin(0.1 t)$$

$$g_4(t) = \sin(10 t)$$

$$g_5(t) = \sin(t - 0.6)$$

$$g_6(t) = 4 \sin(0.5 t - 0.6)$$

anzusehen!

- Benutzen Sie (10.7), um eine Formel aufzustellen, die $\cos(2\alpha)$ durch $\sin \alpha$ ausdrückt und für beliebige Winkel gilt!

Lösung:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

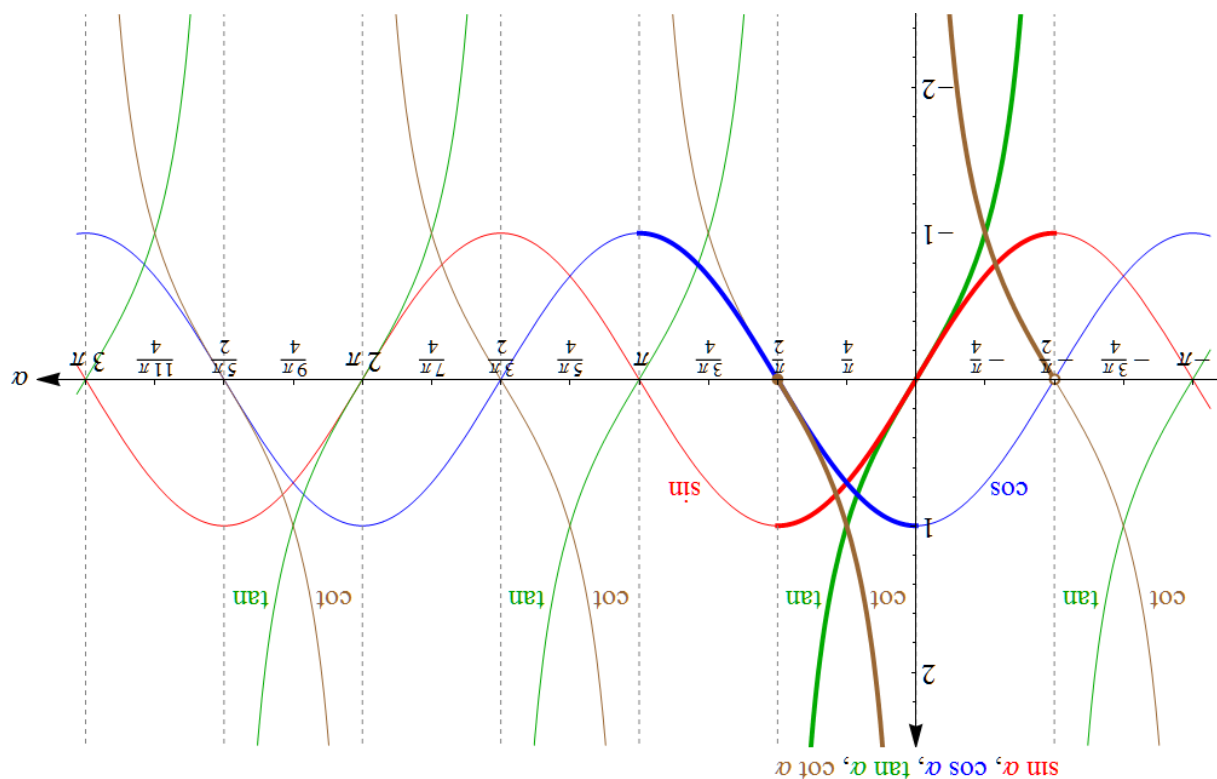
- Benutzen Sie (10.6), um eine Formel aufzustellen, die $\sin(2\alpha)$ durch $\sin \alpha$ ausdrückt und für alle Winkel zwischen -90° und 90° gilt!

Lösung:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

- Nehmen Sie einen Ausdruck von Abbildung 7 (oder zeichnen Sie die Graphen mit der Hand nach) und ziehen Sie jene Teile der Graphen dick nach, die für die jeweilige Umkehrfunktion relevant sind! (Mit anderen Worten: Auf welche Definitionsmenge muss beispielsweise die Sinusfunktion eingeschränkt werden, damit jede Gleichung der Form $\sin \alpha = c$ für ein c zwischen -1 und 1 den Winkel $\alpha = \arcsin(c)$ als einzige Lösung besitzt?) Diese Aufgabe ist wichtig, um zu verstehen, was ein Rechner ausgibt, wenn eine Arcusfunktion ausgeführt wird!

Lösung:



- Von zwei Musikinstrumenten, von denen eines ein bisschen verstimmt ist, gehen Töne mit leicht unterschiedlichen Frequenzen aus. Die beiden akustischen Signale „überlagern“ einander. Mathematisch gesprochen werden sie addiert, was durch die Funktion

$$s(t) = \sin(9t) + \sin(10t)$$

modelliert wird. Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion (z.B. mit *GeoGebra*)! Wie würden Sie beschreiben, was man hört?

Lösung:

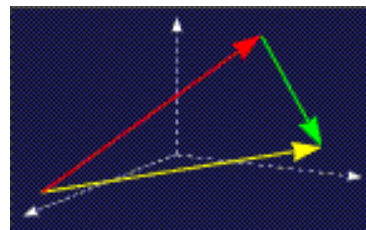
Es handelt sich um eine *Schwebung*.
Man hört einen Ton der Kreisfrequenz 9,5, dessen Lautstärke variiert,
ein so genanntes *amplitudenmoduliertes* Signal.

- Winkel (aber auch andere Größen in Technik und Naturwissenschaft) werden oft mit griechischen Buchstaben bezeichnet. Machen Sie sich mit dem griechischen Alphabet – etwa mit Hilfe der Seite http://de.wikipedia.org/wiki/Griechisches_Alphabet – vertraut! Sie sollten Symbole wie μ , ν , ψ , ϕ (oder φ), θ (oder ϑ), ε , ξ , η , ζ , χ , Σ oder Π richtig benennen und auch richtig schreiben können!
- Legen Sie eine Formelsammlung mit den Ihnen am wichtigsten erscheinenden Beziehungen für Winkelfunktionen an! Sie wird Ihnen in Ihrem Studium gute Dienste leisten!

Weitere Möglichkeiten, Ihr Wissen über Winkelfunktionen und ihre Eigenschaften zu überprüfen und zu festigen, bieten zahlreiche Ressourcen im Web, unter anderem der *Kacheltest* http://www.mathe-online.at/kacheltests/mit_winkelfunktionen_rechnen/.

Dieses Skriptum wurde erstellt im April 2015 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.

Abbildung 6 ist der Darstellung im Skriptum *Mathematik 1* von Thomas Sturm (München, 2009) nachempfunden und wurde im April 2020 eingefügt.



Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Graphen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

Dieses Skriptum behandelt die Definitionen, Graphen und wichtigsten Eigenschaften der Exponential- und Logarithmusfunktionen.

1 Exponentialfunktionen

Eine reelle **Exponentialfunktion** ist eine reelle Funktion, deren Zuordnungsvorschrift vom Typ

$$x \mapsto c \cdot a^{bx} \quad (1.1)$$

ist, wobei a , b und c vorgegebene Zahlen (Konstanten) sind und $a > 0$ ist. Der Name dieser Funktionen bezieht sich darauf, dass die unabhängige Variable (hier als x bezeichnet) im Exponenten¹ (der Hochzahl) steht². Die größtmögliche Definitionsmenge einer reellen³ Exponentialfunktion ist ganz \mathbb{R} . Bei Bedarf kann die Definitionsmenge natürlich als echte Teilmenge von \mathbb{R} festgelegt werden.

Das klingt einfach, aber bei genauer Betrachtung stellt sich die Frage, ob wir überhaupt wissen, was „eine reelle Zahl hoch eine reelle Zahl“ bedeuten soll. Im Skriptum *Potenzen* wurden ja bereits Potenzen behandelt. Allerdings waren diese alle von der Form a^q , wobei q eine rationale Zahl (also entweder eine ganze Zahl oder der Quotient zweier ganzer Zahlen) ist. Für natürliche Zahlen m, n mit $n \neq 0$ wurden Operationen wie a^m , a^{-m} (gleich $\frac{1}{a^m}$), $a^{m/n}$ (gleich $\sqrt[n]{a^m}$) und $a^{-m/n}$ (gleich $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$) betrachtet. Lediglich in einer Fußnote wurde erwähnt, dass Potenzen für beliebige reelle Hochzahlen definiert werden können:

¹ Zur Erinnerung: a^r („ a hoch r “) bezeichnen wir als *Potenz*, a als *Basis* und r als *Exponent* oder *Hochzahl*.

² Sie sind von den *Potenzfunktionen* zu unterscheiden, bei denen die unabhängige Variable die Basis bildet. So ist beispielsweise $x \mapsto x^2$ eine Potenzfunktion und $x \mapsto 2^x$ eine Exponentialfunktion.

³ Wir werden in diesem Skriptum nur reelle Exponentialfunktionen betrachten, den Zusatz „reell“ daher der Einfachheit halber von nun an nicht mehr dazusagen. Exponentialfunktionen können auch im Rahmen der komplexen Zahlen betrachtet werden.

Um etwa $5^{\sqrt{2}}$ zu definieren, kann die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ durch rationale Zahlen angenähert werden, beispielsweise, indem die Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ benutzt wird: 1.4 ist eine grobe Näherung, 1.41 ist schon besser, 1.414 ist noch besser, usw. Werden dann die Zahlen $5^{1.4}$, $5^{1.41}$, $5^{1.414}$ usw. (die ja alle rationale Exponenten haben, so ist etwa $5^{1.4} = 5^{14/10}$ und $5^{1.41} = 5^{141/100}$) berechnet, so kommen sie einer bestimmten Zahl immer näher – diese wird dann als $5^{\sqrt{2}}$ definiert.

Die Berechnung konkreter Zahlenwerte von Potenzen mit reellen Hochzahlen (näherungsweise, aber mit beliebiger Genauigkeit) lassen wir – wie wir es auch bei der Berechnung von Wurzeln oder Winkelfunktionen tun – unsere elektronischen Werkzeuge, also Taschenrechner oder Computerprogramme, durchführen⁴. Auf diese Weise ermitteln wir beispielsweise

$$5^{\sqrt{2}} \approx 9.73851774234. \quad (1.2)$$

Ein wichtiger Sachverhalt besteht nun darin, dass die grundlegenden Rechenregeln für das Bilden von Potenzen auch dann bestehen bleiben, wenn die Exponenten beliebige reelle Zahlen sind. Insbesondere gilt für beliebige reelle Zahlen $a > 0$, r und s

$$a^r a^s = a^{r+s} \quad \text{und} \quad (a^r)^s = a^{rs}, \quad (1.3)$$

und auch die anderen im Skriptum *Potenzen* besprochenen Regeln wie

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} \quad \text{und} \quad (a_1 a_2)^r = a_1^r a_2^r \quad \text{sowie} \quad \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^r = \frac{a_1^r}{a_2^r} \quad (1.4)$$

(für $a_1, a_2 > 0$) gelten nach wie vor.

Um unsere Diskussion der Exponentialfunktionen zu beginnen, betrachten wir mit

$$g(x) = 2^x \quad (1.5)$$

eine einfache Funktion dieses Typs. Sehen wir uns zunächst einige ihrer Funktionswerte an:

$$g(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{8} = 0.125 \quad (1.6)$$

$$g(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad (1.7)$$

$$g(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad (1.8)$$

$$g(0) = 2^0 = 1 \quad (1.9)$$

$$g(1) = 2^1 = 2 \quad (1.10)$$

$$g(2) = 2^2 = 4 \quad (1.11)$$

$$g(3) = 2^3 = 8 \quad (1.12)$$

⁴ Die Methoden, die diese Hilfswerkzeuge benutzen, werden erst in der höheren Mathematik bereitgestellt, vor allem von der Differentialrechnung.

Sie steigen mit zunehmendem Argument⁵ an. Die Funktion g ist **streng monoton wachsend**⁶ und stellt daher eine spezielle Form von **Wachstum** dar. Wir haben im Skriptum *Lineare Funktionen und ihre Graphen* bereits einen Wachstumstyp besprochen, aber dieser hier ist anders: Nach jedem Schritt in (1.6) – (1.12), bei dem der x -Wert um 1 erhöht wurde, ist der Funktionswert *doppelt* so groß wie der vorherige. Wir können uns leicht davon überzeugen, dass das ganz allgemein gilt: $g(x+1) = 2^{x+1} = 2^x 2^1 = 2g(x)$, also

$$g(x+1) = 2g(x), \quad (1.13)$$

was in Worten ausgedrückt besagt, dass eine Erhöhung des x -Werts um 1 zu einer Verdoppelung des Funktionswerts führt. Ein Verhalten dieser Art wird **exponentielle Zunahme** oder **exponentielles Wachstum** genannt und führt rasch zu sehr großen Werten. So ist beispielsweise

$$g(1) = 2^1 = 2 \quad (1.14)$$

$$g(10) = 2^{10} = 1024 \quad (1.15)$$

$$g(100) = 2^{100} = 1267650600228229401496703205376 \approx 1.27 \cdot 10^{30} \quad (1.16)$$

$$g(1000) = 2^{1000} = \text{Zahl mit 302 Stellen!} \approx 1.07 \cdot 10^{301} \quad (1.17)$$

Vergleichen wir dieses Verhalten mit dem durch die Funktion

$$\ell(x) = 5x \quad (1.18)$$

dargestellten *linearen* Wachstum: Wird x um 1 erhöht, so wächst der Funktionswert um 5, denn $\ell(x+1) = 5(x+1) = 5x + 5 = \ell(x) + 5$, also

$$\ell(x+1) = \ell(x) + 5. \quad (1.19)$$

In diesem Fall ist das Wachstum für zunehmende x -Werte wesentlich langsamer:

$$\ell(1) = 5 \cdot 1 = 5 \quad (1.20)$$

$$\ell(10) = 5 \cdot 10 = 50 \quad (1.21)$$

$$\ell(100) = 5 \cdot 100 = 500 \quad (1.22)$$

$$\ell(1000) = 5 \cdot 1000 = 5000 \quad (1.23)$$

Zwar ist $\ell(1)$ noch größer als $g(1)$, aber mit wachsendem x überflügeln die Werte von g sehr bald jene von ℓ und steigen schnell in astronomische Höhen. Der Grund dafür sind die durch (1.13) und (1.19) ausgedrückten unterschiedlichen **Wachstumsregeln**: Wird x schrittweise um 1 erhöht,

⁵ Zur Erinnerung: Als *Argument* einer Funktion bezeichnen wir ihre Variable bzw. einen konkreten Zahlenwert dieser Variable. In (1.5) ist das Argument mit x bezeichnet, in (1.6) – (1.12) nimmt es die Werte $-3, \dots, 3$ an. Statt „Argument“ werden wir oft einfach „ x -Wert“ sagen.

⁶ Eine Funktion f nennen wir *streng monoton wachsend*, wenn aus $x_2 > x_1$ folgt, dass $f(x_2) > f(x_1)$. Dementsprechend nennen wir f *streng monoton fallend*, wenn aus $x_2 > x_1$ folgt, dass $f(x_2) < f(x_1)$. Beide Begriffe können auf Teilbereiche der Definitionsmenge bezogen werden. Mehr dazu finden Sie im Skriptum *Der Funktionen-zoo*.

- so wird im Fall der Funktion g (exponentielles Wachstum) bei jedem Schritt der vorige Funktionswert mit dem Faktor 2 *multipliziert*,
- während im Fall der Funktion ℓ (lineares Wachstum) bei jedem Schritt zum vorigen Funktionswert die Zahl 5 *addiert* wird. (Diese Zahl 5 ist natürlich gerade der *Anstieg* des Graphen von ℓ .)

Machen wir x immer kleiner, so werden die Funktionswerte von g rasch (betragsmäßig) sehr klein:

$$g(0) = 2^0 = 1 \quad (1.24)$$

$$g(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad (1.25)$$

$$g(-10) = 2^{-10} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \approx 0.000977 \quad (1.26)$$

$$g(-100) = 2^{-100} = \frac{1}{2^{100}} \approx 7.89 \cdot 10^{-31} \quad (1.27)$$

$$g(-1000) = 2^{-1000} = \frac{1}{2^{1000}} \approx 9.33 \cdot 10^{-302} \quad (1.28)$$

Sie bleiben aber stets positiv, da $2^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, was ebenfalls ein wichtiger Unterschied zum linearen Wachstum ist.

Ein typisches (oft zur Illustration benutztes) **Beispiel** eines exponentiellen Wachstums ist das (idealisierte) Wachstum einer Bakterienkultur. Verdoppelt sich etwa die Zahl der Bakterien binnen eines Tages, so ist sie nach x Tagen um den Faktor $g(x)$, also 2^x , angewachsen. Die großen Funktionswerte in (1.16) und (1.17) zeigen, dass exponentielle Wachstumsmodelle mitunter schon für nicht allzu große Argumente an natürliche Grenzen stoßen, jenseits derer sie nicht mehr anwendbar sind.

Aber nicht für jede Exponentialfunktion wachsen die Funktionswerte mit steigendem x . So ist beispielsweise die durch

$$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad (1.29)$$

definierte Funktion h ebenfalls eine Exponentialfunktion. Die zwei Zahlenwerte

$$h(1000) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1000} = 2^{-1000} \approx 9.33 \cdot 10^{-302} \quad (1.30)$$

$$h(-1000) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1000} = 2^{1000} \approx 1.07 \cdot 10^{301} \quad (1.31)$$

illustrieren, dass die Funktionswerte von h für wachsende x schnell sehr *klein* werden und für abnehmende x schnell sehr groß. Da wir ganz allgemein

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x} \quad (1.32)$$

schreiben können, hätten wir h auch genauso gut in der Form

$$h(x) = 2^{-x} \quad (1.33)$$

definieren können. Zwischen h und der in (1.5) definierten Funktion g besteht daher der Zusammenhang

$$h(x) = g(-x). \quad (1.34)$$

Wird x um 1 erhöht, so wird der Funktionswert von h mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ multipliziert, also *halbiert*:

$$h(x+1) = 2^{-(x+1)} = 2^{-x-1} = 2^{-x} 2^{-1} = 2^{-x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} h(x). \quad (1.35)$$

Ein derartiges Verhalten nennen wir **exponentielle Abnahme**, **exponentielles Abklingen** oder **exponentiellen Zerfall**.

Ein typisches (oft zur Illustration benutztes) **Beispiel** eines exponentiellen Abklingens ist der radioaktive Zerfall. Sinkt etwa die Zahl der angeregten Atomkerne in einer radioaktiven Probe binnen eines Tages auf die Hälfte, so ist sie nach x Tagen um den Faktor $h(x)$, also 2^{-x} , was ja das Gleiche wie $(\frac{1}{2})^x$ ist, kleiner geworden. Auch das Modell des exponentiellen Abklingens stößt irgendwann an eine Gültigkeitsgrenze. In unserem Beispiel ist spätestens dann, wenn kein zerfallsfähiger Atomkern mehr vorhanden ist, die Grenze des Modells erreicht.

Die bisher betrachteten Exponentialfunktionen (1.5) und (1.29) bzw. (1.33) sind beide von der Form (1.1):

- Die in (1.5) definierte Funktion g ist von der Form (1.1), wenn $c = 1$, $a = 2$ und $b = 1$ gesetzt wird.
- Die in (1.29) definierte Funktion h ist von der Form (1.1), wenn $c = 1$, $a = \frac{1}{2}$ und $b = 1$ gesetzt wird. Da die *gleiche* Funktion auch in der Form (1.33) angeschrieben werden kann, erhalten wir sie auch, indem wir $c = 1$, $a = 2$ und $b = -1$ setzen.

Die zwei oben verwendeten Formen, $h(x)$ anzuschreiben, nämlich wahlweise als $(\frac{1}{2})^x$ oder als 2^{-x} , zeigen, dass die Konstanten a und b nicht eindeutig bestimmt sind: Eine gegebene Exponentialfunktion kann auf unterschiedliche Weise angeschrieben werden. Das ist der zweiten Regel in (1.3) zu verdanken. Mit ihrer Hilfe können wir, falls eine Funktion f der Form (1.1), also

$$f(x) = c \cdot a^{bx}, \quad (1.36)$$

gegeben ist, umformen

$$a^{bx} = (a^b)^x \quad (1.37)$$

und, indem wir die Abkürzung $A = a^b$ einführen, statt (1.36) einfach

$$f(x) = c \cdot A^x \quad (1.38)$$

schreiben⁷. Mit anderen Worten: Der Term einer Exponentialfunktion lässt sich immer auf eine Form bringen, in der $b = 1$ ist. Obwohl man also den Faktor b im Exponenten von (1.36) genau

⁷ Das ist genau der Weg, der von (1.33) zu (1.29) führt: $2^{-x} = (2^{-1})^x = (\frac{1}{2})^x$.

genommen nicht brauchen würde, ist es für viele Anwendungen bequem, ihn beizubehalten (wie das Beispiel unserer Funktion h zeigt: Mit 2^{-x} lässt sich leichter rechnen als mit $(\frac{1}{2})^x$).

Der Vorfaktor c in (1.36) hingegen besitzt eine klare und einfache Bedeutung: Setzen wir $x = 0$, so reduziert sich $c \cdot a^{bx}$ auf $c \cdot a^0 = c$. Daher gilt

$$f(0) = c. \quad (1.39)$$

Die Konstante c ist der Funktionswert der Exponentialfunktion (1.36) an der Stelle 0. Lassen wir Werte $c \neq 1$ zu, so können wir das Bakterienwachstum und den radioaktiven Zerfall vollständiger modellieren:

- Verdoppelt sich die Zahl der Bakterien in einer Kultur binnen eines Tages und beträgt sie zu Beginn 1000, so ist sie x Tage später durch

$$N(x) = 1000 \cdot 2^x \quad (1.40)$$

gegeben. Das ist eine Exponentialfunktion mit $c = 1000$, $a = 2$ und $b = 1$. Wir müssen x nicht auf ganzzahlige Werte beschränken: Wollen wir die Zahl der Bakterien nach 36 Stunden, also nach eineinhalb Tagen, ermitteln, so setzen wir $x = 1.5$ und berechnen $N(1.5) = 1000 \cdot 2^{1.5} \approx 2828.4$, wobei es uns natürlich nicht stören darf, dass das Ergebnis keine ganze Zahl ist. (Eine Bakterie auf oder ab liegt sicher unterhalb der Genauigkeitsgrenze eines solchen Modells.)

- Machen wir es uns nun ein bisschen schwieriger: Man gebe den zeitlichen Verlauf für den Fall an, dass sich eine Bakterienkultur, deren Zahl zu Beginn 3000 beträgt, während 8 Stunden um 70% vergrößert. Das bedeutet: Innerhalb von 8 Stunden muss die Zahl der Bakterien um den Faktor 1.7 anwachsen. Die Lösung lautet: x Stunden nach dem Beginn ist die Zahl der Bakterien durch

$$N(x) = 3000 \cdot 1.7^{x/8} \quad (1.41)$$

gegeben⁸. Ein Check ergibt $N(8) = 3000 \cdot 1.7^{8/8} = 3000 \cdot 1.7$, also das 1.7-fache des Anfangswerts $N(0) = 3000$, wie verlangt. Bitte merken Sie sich diese Vorgangsweise!

- Halbiert sich die Zahl der angeregten Atomkerne in einer radioaktiven Probe binnen eines Tages und beträgt sie zu Beginn $5 \cdot 10^{12}$, so ist sie nach x Tagen durch

$$N(x) = 5 \cdot 10^{12} \cdot 2^{-x} \quad (1.42)$$

gegeben. Das ist eine Exponentialfunktion mit $c = 5 \cdot 10^{12}$, $a = 2$ und $b = -1$. Auch hier müssen wir x nicht auf ganzzahlige Werte beschränken: Wollen wir die Zahl der angeregten Atomkerne nach zwölfteinhalb Tagen ermitteln, so setzen wir $x = 12.5$ und berechnen $N(12.5) = 5 \cdot 10^{12} \cdot 2^{-12.5} \approx 8.63 \cdot 10^8$.

Nach diesen Beispielen können wir die Monotonieeigenschaften der Exponentialfunktionen (1.36) ganz allgemein formulieren. Zunächst der Fall, wenn $b = 1$ ist:

⁸ Beachten Sie, dass das Symbol x in (1.40) und in (1.41) nicht dasselbe bedeutet! Im ersten Fall ist x die Zahl der Tage, im zweiten Fall die Zahl der Stunden. Um die strukturelle Ähnlichkeit der beiden Ausdrücke zu unterstreichen, wird dasselbe Symbol für die Variable verwendet.

- Ist $a > 1$, so ist die Funktion $x \mapsto a^x$ streng monoton wachsend in ganz \mathbb{R} .
Beispiel: $x \mapsto 2^x$.
- Ist $a = 1$, so ist die Funktion $x \mapsto a^x$ konstant (denn dann gilt ja $x \mapsto 1$ für alle x).
- Ist $0 < a < 1$, so ist die Funktion $x \mapsto a^x$ streng monoton fallend in ganz \mathbb{R} .
Beispiel: $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x \equiv 2^{-x}$. (Das Zeichen \equiv bedeutet „identisch“ und wird auch für „offensichtlicherweise gleich, nur unterschiedlich angeschrieben“ verwendet.)

Ist $b \neq 1$, so hängt das Monotonieverhalten auch vom Vorzeichen dieser Konstante ab:

- Ist $a > 1$, so ist die Funktion $x \mapsto a^{bx}$
 - im Fall $b > 0$ streng monoton wachsend in ganz \mathbb{R} . Beispiel: $x \mapsto 2^{3x}$,
 - im Fall $b = 0$ konstant (denn dann gilt ja $x \mapsto 1$ für alle x) und
 - im Fall $b < 0$ streng monoton fallend in ganz \mathbb{R} . Beispiel: $x \mapsto 2^{-3x}$.
- Ist $0 < a < 1$, so ist die Funktion $x \mapsto a^{bx}$
 - im Fall $b > 0$ streng monoton fallend in ganz \mathbb{R} . Beispiel: $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \equiv 2^{-3x}$,
 - im Fall $b = 0$ konstant (denn dann gilt ja $x \mapsto 1$ für alle x) und
 - im Fall $b < 0$ streng monoton wachsend in ganz \mathbb{R} . Beispiel: $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{-3x} \equiv 2^{3x}$.

Auch das Gesetz des exponentiellen Zunehmens oder Abklingens lässt sich ganz allgemein für eine Funktion der Form (1.36) formulieren: Wird x um 1 erhöht, so wird $f(x+1)$ aus $f(x)$ so gewonnen:

$$f(x+1) = c \cdot a^{b(x+1)} = c \cdot a^{bx+b} = c \cdot a^{bx} a^b = a^b f(x), \quad (1.43)$$

also durch Multiplikation mit dem (von x unabhängigen) Faktor a^b , der zwar immer positiv ist, aber kleiner, gleich oder größer als 1 sein kann. Oder etwas allgemeiner: Wird x um $\Delta x > 0$ erhöht, so finden wir $f(x+\Delta x)$ aus $f(x)$ so:

$$f(x+\Delta x) = c \cdot a^{b(x+\Delta x)} = c \cdot a^{bx+b\Delta x} = c \cdot a^{bx} a^{b\Delta x} = a^{b\Delta x} f(x), \quad (1.44)$$

also durch Multiplikation mit dem (von x unabhängigen) Faktor $a^{b\Delta x}$, der zwar immer positiv ist, aber kleiner, gleich oder größer als 1 sein kann. Nun stellen wir uns vor, dass x die Zeit darstellt, und definieren zwei wichtige Begriffe:

- Beschreibt die in (1.36) definierte Funktion f ein exponentielles Wachstum (es ist dann immer $a^{b\Delta x} > 1$) und ist Δx so gewählt, dass $a^{b\Delta x} = 2$ ist, so wird $f(x+\Delta x)$ aus $f(x)$ durch Verdopplung gewonnen. Wir nennen dann Δx die **Verdopplungszeit**.
- Beschreibt die in (1.36) definierte Funktion f ein exponentielles Abklingen (es ist dann immer $a^{b\Delta x} < 1$) und ist Δx so gewählt, dass $a^{b\Delta x} = \frac{1}{2}$ ist, so wird $f(x+\Delta x)$ aus $f(x)$ durch Halbierung gewonnen. Wir nennen dann Δx die **Halbwertszeit**.

Beim Umgang mit Exponentialfunktionen bekommt man es schnell mit mathematischen Fragestellungen zu tun, die eine weitere Theorieentwicklung erfordern. Betrachten wir dazu eine typische

Wachstumsaufgabe: Eine Bakterienkultur nimmt zu Beginn auf einer Petrischale eine Fläche von 3 mm^2 ein. Die Fläche wächst pro Stunde um den Faktor 1.2.

- (a) Wie groß ist die Fläche allgemein nach t Stunden?
- (b) Wie groß ist die Verdopplungszeit?

Den Teil (a) der Aufgabe können wir mit dem bisher Gesagten leicht lösen (wobei wir die Variable jetzt nicht mit x bezeichnen, sondern mit t , da dieses Symbol in der Angabe verwendet wurde): Ist die von der Kultur eingenommene Fläche nach t Stunden gleich $F(t) \text{ mm}^2$, so gilt

$$F(t) = 3 \cdot 1.2^t. \quad (1.45)$$

F ist eine Exponentialfunktion vom Typ (1.36) mit $c = 3$, $a = 1.2$ und $b = 1$. Machen wir einen Check:

Anfangswert: $F(0) = 3 \cdot 1.2^0 = 3$.

Wachstumsregel: $F(t+1) = 3 \cdot 1.2^{t+1} = 3 \cdot 1.2^t \cdot 1.2 = 1.2 F(t)$.

Der Teil (b) der Aufgabe allerdings stellt uns vor ein neues Problem: Ist Δt die gesuchte Verdopplungszeit, so muss gelten $F(t + \Delta t) = 2 F(t)$, also

$$3 \cdot 1.2^{t+\Delta t} = 6 \cdot 1.2^t \quad (1.46)$$

oder, nach Division beider Seiten durch 3,

$$1.2^{t+\Delta t} = 2 \cdot 1.2^t. \quad (1.47)$$

Schreiben wir die linke Seite in der Form $1.2^t \cdot 1.2^{\Delta t}$, so können wir beide Seiten durch 1.2^t dividieren und erhalten mit

$$1.2^{\Delta t} = 2 \quad (1.48)$$

eine Gleichung für Δt . Die linke Seite $1.2^{\Delta t}$ ist gerade der in (1.44) auftretende, dort $a^{b\Delta x}$ genannte Faktor. (Setzen Sie für ihn $a = 1.2$ und $b = 1$ ein, und schreiben Sie Δt anstelle von Δx !) Gleichung (1.48) stellt uns also vor die Frage, wie die Zahl 2 als Potenz von 1.2 geschrieben werden kann:

$$1.2^{\text{wieviel}} = 2. \quad (1.49)$$

Um (1.48) nach Δt lösen zu können, d.h. um die Frage (1.49) nach dem „wieviel“ beantworten zu können, ist – wie angekündigt – eine weitergehende Theorieentwicklung nötig.

2 Logarithmusfunktionen

Gleichung (1.48) ist vom Typ

$$a^x = y, \quad (2.1)$$

wobei $a > 0$ und $y > 0$ gegebene reelle Zahlen sind und $a \neq 1$ ist. Die Variable x steht im Exponenten, und daher nennen wir eine derartige Gleichung **Exponentialgleichung**. Da jede Funktion vom Typ $x \mapsto a^x$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$ streng monoton ist, kann es *höchstens eine* Lösung geben. (Ist x eine Lösung und gehen wir zu einem größeren oder kleineren x -Wert über, so ändert sich die linke Seite und kann nicht mehr gleich der gegebenen Zahl y sein.) Man kann nun zeigen, dass es (für $y > 0$, was ja vorausgesetzt wurde) *immer* eine Lösung x gibt.

Wir verzichten auf einen genauen Beweis und argumentieren intuitiv: Ist $a > 1$, so wird die linke Seite von (2.1) für wachsende x -Werte immer größer (und übersteigt schließlich jede noch so große vorgegebene Zahl) und für fallende x -Werte immer kleiner (und fällt schließlich unter jede vorgegebene positive, noch so kleine Zahl). Für $a < 1$ ist es genau umgekehrt. „Zwischen“ den großen und kleinen Werten gibt es immer ein x , das passt, für das also a^x gleich der gegebenen positiven Zahl y ist. Ein formaler Beweis benutzt die Tatsache, dass Exponentialfunktionen *stetig* sind, d.h. dass kleine Änderungen von x zu kleinen Änderungen von a^x führen.

Wir gehen also davon aus, dass Gleichung (2.1) *genau eine* Lösung x besitzt, und diese würden wir gern finden. Allerdings kann sie im allgemeinen Fall nicht durch die bereits behandelten und als bekannt vorausgesetzten Rechenoperationen (Grundrechnungsarten und das Bilden von Potenzen) ausgedrückt werden! Wieder ist etwas Neues gefragt. Und wieder (so wie beim Wurzelziehen oder beim Berechnen von Potenzen mit nicht-rationalen Exponenten) überlassen wir die Arbeit, konkrete numerische Werte auszugeben, unseren Taschenrechnern oder Computerprogrammen. Aber wir benötigen einen Namen und eine mathematische Bezeichnung für das, was diese elektronischen Tools tun. Wir schreiben die (eindeutige) Lösung der Gleichung (2.1) in der Form

$$x = \log_a(y) \quad (2.2)$$

an und nennen sie den **Logarithmus von y zur Basis a** . „Den Logarithmus zu berechnen“ („logarithmieren“) bedeutet also, „den Exponenten zu berechnen“, und zwar in dem durch eine Gleichung vom Typ (2.1) angegebenen Zusammenhang, nämlich y als Potenz von a zu schreiben. $\log_a(y)$ ist die Antwort auf die Frage

$$a^{\text{wieviel}} = y. \quad (2.3)$$

Wird die Basis a festgehalten und jedem $y > 0$ die Lösung von (2.1) zugeordnet, so erhalten wir die **Logarithmusfunktion zur Basis a** :⁹

$$y \mapsto \log_a(y). \quad (2.4)$$

Jede dieser Funktionen \log_a besitzt \mathbb{R}^+ , also die Menge aller positiven reellen Zahlen, als Definitionsmenge.

⁹ Wenn Sie wollen, können Sie statt (2.4) natürlich auch $x \mapsto \log_a(x)$ schreiben. Wir haben y als Variablenamen gewählt, um den Zusammenhang zur Gleichung (2.1) nicht unkenntlich zu machen.

In manchen konkreten Fällen können wir Logarithmen auch ohne elektronische Hilfe ermitteln, und Berechnungen dieser Art dienen unter anderem dazu, uns mit Logarithmen und ihren Rechengesetzen vertraut zu machen.

- So gehen wir beispielsweise davon aus, dass

$$3^2 = 9 \quad (2.5)$$

gilt und schließen daraus

$$\log_3(9) = 2. \quad (2.6)$$

- Ausgehend von

$$125^{1/3} = 5 \quad (2.7)$$

(was wiederum aus $5^3 = 125$ folgt) schließen wir

$$\log_{125}(5) = \frac{1}{3}. \quad (2.8)$$

- In analoger Weise schließen wir aus $4^{-2} = \frac{1}{16}$, dass

$$\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2 \quad (2.9)$$

gilt. Wie dieses Beispiel zeigt, können Logarithmen negativ sein. Das ist nicht zu verwechseln damit, dass Logarithmen nur für positive Argumente definiert sind, d.h. dass der Logarithmus einer negativen Zahl nicht gebildet werden kann!

- Da stets $a^0 = 1$ und $a^1 = a$ gilt, schließen wir, dass

$$\log_a(1) = 0 \quad (2.10)$$

und

$$\log_a(a) = 1 \quad (2.11)$$

für jede Basis a .

Die Definition des Logarithmus kann kurz in der Form

$$a^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a(y) \quad (2.12)$$

ausgedrückt werden. Bitte prägen Sie sich diesen allgemeinen Zusammenhang ein!

Fortsetzung der **Wachstumsaufgabe**: Nun sind wir in der Lage, auch den Teil (b) der Wachstumsaufgabe des vorigen Abschnitts, der uns zur Gleichung (1.48) bzw. (1.49) geführt hat, zumindest formal zu lösen: Die gesuchte Größe Δt ist durch

$$\Delta t = \log_{1.2}(2) \quad (2.13)$$

gegeben. Die Verdopplungszeit, also die Zeit, in der sich die von der Bakterienkultur eingenommene Fläche verdoppelt, ist $\log_{1.2}(2)$ Stunden. Aber wir wüssten

natürlich gern, welchen numerischen Wert $\log_{1.2}(2)$ – zumindest näherungsweise – hat. Manche Mathematikprogramme können $\log_{1.2}(2)$ direkt berechnen, aber ein typischer wissenschaftlicher Taschenrechner besitzt keine Taste für den Logarithmus zur Basis 1.2! Um die Aufgabe zu Ende zu führen, müssen wir uns noch ein wenig gedulden!

Da die Logarithmusfunktionen letztlich durch „Umkehrung“ von den Exponentialfunktionen abstammen¹⁰, erben sie in gewisser Weise auch deren Rechengesetze, aber jetzt durch die Exponenten ausgedrückt: Nehmen wir an, dass $a^r = y$ und $a^s = z$, also $r = \log_a(y)$ und $s = \log_a(z)$ ist. Mit der ersten Regel in (1.3) folgt $yz = a^r a^s = a^{r+s}$ und daher $\log_a(yz) = r + s$. Insgesamt gilt also

$$\log_a(yz) = \log_a(y) + \log_a(z) \quad (2.14)$$

für beliebige $y, z > 0$ und beliebige Basen $a > 0$, $a \neq 1$. In Worten knapp formuliert: Der Logarithmus eines Produkts ist die Summe der Logarithmen. Das ist das **zentrale Rechengesetz des Logarithmus**. Es stellt in gewisser Weise die Umkehrung der ersten Regel in (1.3) dar und gilt auch für mehr Faktoren: Wird etwa in (2.14) z durch ein Produkt uv ersetzt und dieselbe Regel auch auf $\log_a(uv)$ angewandt, so erhalten wir

$$\log_a(yuv) = \log_a(y) + \log_a(u) + \log_a(v). \quad (2.15)$$

Aus (2.14) folgt eine nützliche Regel zur Berechnung des Logarithmus einer Potenz mit natürlicher Hochzahl¹¹:

$$\log_a(y^2) = \log_a(y) + \log_a(y) = 2 \log_a(y) \quad (2.16)$$

$$\log_a(y^3) = \log_a(y^2) + \log_a(y) = 2 \log_a(y) + \log_a(y) = 3 \log_a(y) \quad (2.17)$$

$$\dots \quad \dots \quad (2.18)$$

$$\log_a(y^n) = n \log_a(y) \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \quad (2.19)$$

Sie lässt sich auf beliebige reelle Hochzahlen verallgemeinern, indem wir die zweite Regel in (1.3) auf $a^r = y$ anwenden und $r = \log_a(y)$ verwenden: Mit $y^s = (a^r)^s = a^{rs}$ ergibt sich $\log_a(y^s) = rs$ und daher

$$\log_a(y^s) = s \log_a(y) \quad (2.20)$$

für beliebige reelle Zahlen s . Der Logarithmus einer Potenz y^s ist also gleich dem Produkt der Hochzahl s mit dem Logarithmus von y . Mit $s = -1$ ergibt sich als Spezialfall daraus

$$\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y), \quad (2.21)$$

¹⁰ Mathematisch sauberer ausgedrückt: Die Logarithmusfunktion $y \mapsto \log_a(y)$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$. Plastischer ausgedrückt: Wird für ein gegebenes $a > 0$, $a \neq 1$ zwischen x und y der Zusammenhang $a^x = y$ verlangt, so ist die Logarithmusfunktion zur Basis a die Zuordnung $y \mapsto x$, während die Exponentialfunktion zur Basis a die Zuordnung $x \mapsto y$ ist. Die Größe x kann dabei beliebige reelle Werte annehmen, während y nur positive Werte annimmt.

¹¹ Diese Regel gilt auch für eine Potenz mit Hochzahl 0: $\log_a(y^0) = 0 \cdot \log_a(y) = 0$. Da $y^0 = 1$ ist, ist das nichts anderes als die Aussage (2.10).

und in Kombination mit (2.14) erhalten wir die Rechenregel

$$\log_a \left(\frac{z}{y} \right) = \log_a(z) - \log_a(y) \quad (2.22)$$

für die Berechnung des Logarithmus eines Quotienten. Weiters schließen wir aus (2.20) unter Verwendung von (2.11), dass

$$\log_a(a^s) = s \quad (2.23)$$

für alle $a > 0$, $a \neq 1$ und für alle reellen Zahlen s , was auch direkt mit (2.12) begründet werden kann. (2.23) drückt aus, dass „Logarithmieren und Exponenzieren einander aufheben“. Diese „Aufhebung“ wird in umgekehrter Richtung durch

$$a^{\log_a(y)} = y \quad (2.24)$$

ausgedrückt, was für alle $a, y > 0$, $a \neq 1$ gilt. Das Schema (2.12), die Rechengesetze (2.14) – (2.22) und die Identitäten (2.23) und (2.24) gelten für *beliebige* Basen $a > 0$ mit $a \neq 1$. Sie sind das Um und Auf für das Rechnen mit Logarithmen – Sie sollten sie gut kennen und ohne Nachschlagen anwenden können!

Anmerkung: Durch das Gesetz (2.14) wird das Multiplizieren zweier reeller Zahlen (y und z) auf eine Addition (ihrer Logarithmen) zurückgeführt. Dieser Sachverhalt wurde – bevor Taschenrechner und Computerprogramme allgemein zur Verfügung standen – in Form des *Rechenschiebers* und umfangreicher Tabellenwerke, der *Logarithmentafeln*, zur Erleichterung des praktischen Rechnens ausgenutzt. Um zwei Zahlen mit Hilfe einer Logarithmentafel zu multiplizieren, wurden ihre Logarithmen (meist zur Basis 10) nachgeschlagen, addiert, und danach wurde das Ergebnis „entlogarithmiert“, d.h. es wurde in der Tabelle jene Zahl gesucht, deren Logarithmus es ist.

Manchmal ist es nötig, unter Verwendung dieser Regeln **Terme, die Logarithmen enthalten, umzuformen**. Hier zwei Beispiele (wobei angenommen wird, dass alle vorkommenden Variablen positiv sind):

- Man drücke $\log_3 \left(9 u^4 \sqrt{\frac{v^3}{w^5}} \right)$ durch möglichst einfache Logarithmen aus:

$$\begin{aligned} \log_3 \left(9 u^4 \sqrt{\frac{v^3}{w^5}} \right) &= \log_3 \left(9 u^4 \frac{v^{3/2}}{w^{5/2}} \right) = \\ &= \log_3(9) + \log_3(u^4) + \log_3(v^{3/2}) - \log_3(w^{5/2}) = \quad (2.25) \\ &= 2 + 4 \log_3(u) + \frac{3}{2} \log_3(v) - \frac{5}{2} \log_3(w) \end{aligned}$$

- Man drücke $3 \log_7(2 r^2) - 2 \log_7(4 r s)$ als einzelnen Logarithmus (ohne Vorfaktor) aus:

$$\begin{aligned} 3 \log_7(2 r^2) - 2 \log_7(4 r s) &= \log_7((2 r^2)^3) - \log_7((4 r s)^2) = \\ &= \log_7 \left(\frac{(2 r^2)^3}{(4 r s)^2} \right) = \log_7 \left(\frac{8 r^6}{16 r^2 s^2} \right) = \quad (2.26) \\ &= \log_7 \left(\frac{r^4}{2 s^2} \right) \end{aligned}$$

Ebenso wie die Exponentialfunktionen sind die Logarithmusfunktionen streng monoton, und zwar ist \log_a

- für $a > 1$ streng monoton wachsend und
- für $0 < a < 1$ streng monoton fallend.

Da es nicht nur *eine* Logarithmusfunktion gibt, sondern *unendlich viele* (für jede Basis eine), stellt sich die Frage, **wie sie miteinander zusammenhängen**. Nun erinnern wir uns daran, dass die Konstanten a und b der allgemeinen Exponentialfunktion (1.1) bzw. (1.36) nicht eindeutig bestimmt sind. Um ein weiteres Beispiel anzuführen: Die Funktionen $x \mapsto 9^{4x}$ (also (1.1) mit $a = 9$ und $b = 4$) und $x \mapsto 3^{8x}$ (also (1.1) mit $a = 3$ und $b = 8$) sind identisch, denn es gilt ja $9^{4x} = (3^2)^{4x} = 3^{2 \cdot 4x} = 3^{8x}$. Dieser Mehrdeutigkeit entspricht die Tatsache, dass die Logarithmusfunktionen zu unterschiedlichen Basen eng miteinander verwandt sind und leicht ineinander umgerechnet werden können. Um uns näher anzusehen, wie das funktioniert, gehen wir von zwei beliebigen positiven Zahlen a und A aus, die wir als Basen für Logarithmusfunktionen benutzen wollen. Dann können wir immer a als Potenz von A schreiben, denn mit $B = \log_A(a)$ folgt $a = A^B$. Nun nehmen wir eine weitere (beliebige) positive Zahl y und schreiben sie als Potenz von a , also $y = a^x$. Dann ist $x = \log_a(y)$. Andererseits ist $y = a^x = (A^B)^x = A^{Bx}$, woraus $Bx = \log_A(y)$, also $x = \frac{1}{B} \log_A(y)$ folgt. Mit $B = \log_A(a)$ gelangen wir zur Identität

$$\log_a(y) = \frac{\log_A(y)}{\log_A(a)}, \quad (2.27)$$

die für beliebige $a, A, y > 0$, $a \neq 1$, $A \neq 1$ gilt. Das bedeutet, dass die Funktionen

$$y \mapsto \log_a(y) \quad \text{und} \quad y \mapsto \frac{\log_A(y)}{\log_A(a)} \quad (2.28)$$

identisch sind: Die Logarithmusfunktionen \log_a und \log_A sind Vielfache voneinander, der Umrechnungsfaktor ist einfach $\log_A(a)$. Das erlaubt es uns beispielsweise, jeden Logarithmus zu einer beliebigen Basis in einen Logarithmus zur Basis 10 umzuwandeln:

$$\log_a(y) = \frac{\log_{10}(y)}{\log_{10}(a)}. \quad (2.29)$$

Dieser Sachverhalt führt dazu, dass Ergebnisse von Rechenaufgaben mit Logarithmen ganz unterschiedlich aussehen können und dennoch das Gleiche bedeuten. Hier ein konkretes Beispiel:

$$\log_7(13) = \frac{\log_{10}(13)}{\log_{10}(7)}. \quad (2.30)$$

Wenn ein Taschenrechner also Logarithmen zur Basis 10 berechnen kann, so können wir die Umrechnungsformel (2.29) benutzen, um Logarithmen zu jeder anderen Basis zu ermitteln! Und tatsächlich haben die meisten Taschenrechner nur Tasten für Logarithmen zu ganz wenigen Basen. Die bevorzugten Basen sind:

- Die Basis 10: Der Logarithmus zur Basis 10 heißt **dekadischer Logarithmus** oder **Zehnerlogarithmus**. Er wird meist mit dem Symbol \lg bezeichnet, also

$$\lg = \log_{10} , \quad (2.31)$$

und ist insofern praktisch, als wir aufgrund unseres dekadischen Zahlensystems eine gewisse Erfahrung mit Zehnerpotenzen haben. So ist ohne langes Nachdenken klar, dass $\lg(1 \text{ Million}) = 6$ ist, denn es gilt ja $1 \text{ Million} = 10^6$. $\lg(25)$ ist jene Hochzahl x , für die $10^x = 25$ ist. Sie ist zwar eine irrationale Zahl, aber immerhin ist klar, dass sie zwischen 1 und 2 liegt, denn, um es etwas blumig auszudrücken: 10^1 ist etwas zu klein, um 25 zu sein, und 10^2 ist etwas zu groß, um 25 zu sein. Mit einem elektronischen Werkzeug berechnen wir $\lg(25) \approx 1.39794$, was nichts anderes bedeutet, als dass $10^{1.39794} \approx 25$ ist.

- Die Basis e , die wir im nächsten Abschnitt genauer besprechen werden. Hier nur so viel: Die Zahl e (genannt die *Eulersche Zahl*) ist eine irrationale Zahl, näherungsweise gegeben durch $e \approx 2.718281828$. Der Logarithmus zur Basis e heißt **natürlicher Logarithmus** und wird mit dem Symbol \ln (*logarithmus naturalis*) bezeichnet, also

$$\ln = \log_e . \quad (2.32)$$

- Die Basis 2: Der Logarithmus zur Basis 2 heißt **binärer Logarithmus** oder **Zweierlogarithmus** und wird oft mit dem Symbol \lg (*logarithmus dualis*) bezeichnet, also

$$\lg = \log_2 . \quad (2.33)$$

Der Logarithmus zur Basis 2 ist in all jenen Anwendungen nützlich, in denen Potenzen von 2 eine besondere Rolle spielen, so etwa in der Informationstheorie, in der die Zahl 2 als kleinste Anzahl zueinander alternativer Entscheidungen („ja“, „nein“) auftritt.

Die Umrechnungsformeln, um einen Logarithmus zu einer *beliebigen* Basis a durch diese bevorzugten Logarithmen auszudrücken, lauten mit (2.27) also:

$$\log_a(y) = \frac{\lg(y)}{\lg(a)} = \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = \frac{\lg(y)}{\lg(a)} . \quad (2.34)$$

Wenn Sie (etwa auf der Taste eines Taschenrechners, in der Befehlsliste einer Computersprache oder in einem Text) das Symbol „log“ ohne Angabe einer Basis sehen, so ist damit in der Regel entweder der Zehnerlogarithmus oder der natürliche Logarithmus gemeint.

Aufgrund der engen Verwandtschaft der Logarithmusfunktionen ist es bei der Lösung mancher Probleme (wie der Exponentialgleichungen, auf die wir weiter unten eingehen werden) möglich, diejenige Basis zu verwenden, die einem am sympathischsten ist bzw. die vom benutzten Werkzeug gekannt wird.

Fortsetzung der **Wachstumsaufgabe**: Damit sind wir in der Lage, den Teil (b) der im vorigen Abschnitt gestellten Wachstumsaufgabe, den wir bereits in der Form (2.13) gelöst haben, mit einem gewöhnlichen Taschenrechner, der eine „lg“-Taste

und/oder eine „ln“-Taste besitzt, zu Ende zu führen: Mit (2.34) berechnen Sie wahlweise entweder mit dem Zehnerlogarithmus

$$\Delta t = \log_{1.2}(2) = \frac{\lg(2)}{\lg(1.2)} \approx 3.802 \quad (2.35)$$

oder mit dem natürlichen Logarithmus

$$\Delta t = \log_{1.2}(2) = \frac{\ln(2)}{\ln(1.2)} \approx 3.802. \quad (2.36)$$

Die gesuchte Verdopplungszeit beträgt 3.802 Stunden oder (in vernünftiger Genauigkeit angegeben) 3 Stunden und 48 Minuten.

3 Exponentialfunktion und Logarithmus zur Basis e

Die **Eulersche Zahl** e spielt in der Mathematik und ihren Anwendungen eine besonders wichtige Rolle, die sich allerdings erst dann voll auswirkt, wenn das Differenzieren und das Integrieren ins Spiel kommen. Da diese Zahl aber oft im Zusammenhang mit den Exponential- und Logarithmusfunktionen verwendet wird, müssen wir an dieser Stelle – auch ohne Differentialrechnung – auf sie eingehen.

In der Schule wird die Zahl e in der Regel so eingeführt: Wird $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ berechnet, so streben die Werte, die man dabei bekommt, mit immer größer werdendem n gegen eine bestimmte Zahl, und diese wird mit dem Buchstaben e bezeichnet¹². Sehen wir uns die ersten dieser Zahlen an:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 &= 2^1 = 2 \\ \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25 \\ \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 &= \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \approx 2.370370 \\ \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 &= \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} = 2.44140625 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Die Zahl e , der diese Werte zustreben, ist eine irrationale Zahl, näherungsweise durch

$$e \approx 2.71828182845904523536028747135 \quad (3.2)$$

gegeben. Um ein Gefühl zu vermitteln, was daran besonders sein soll, charakterisieren wir sie noch auf eine andere Weise: Für jede Basis $a > 0$ ist $a^0 = 1$, und für eine Zahl x , deren Betrag

¹² Die Schreibweise, die die Mathematik für diese Situation bereitstellt, ist $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, wobei das Symbol $\lim_{n \rightarrow \infty}$ den Grenzwert einer Folge bezeichnet.

klein ist¹³ ($|x| \ll 1$), ist a^x ungefähr gleich 1. Wollen wir es etwas genauer wissen, so ergibt sich mit den Mitteln der Differentialrechnung

$$a^x \approx 1 + \log_e(a) x \quad \text{für } |x| \ll 1. \quad (3.3)$$

Ob Sie es glauben oder nicht: Hier tritt *automatisch* die Zahl e als Basis auf! Wenn man also eine Exponentialfunktion haben möchte, für die die simple Regel „ $a^x \approx 1 + x$ für $|x| \ll 1$ “ gilt, so muss man a so wählen, dass $\log_e(a) = 1$ ist, und das ist wegen (2.11) dann der Fall, wenn $a = e$ ist. Es gilt also:

$$e^x \approx 1 + x \quad \text{für } |x| \ll 1. \quad (3.4)$$

Letztlich gründet sich die Bedeutung der Zahl e auf diese Eigenschaft, mit zahlreichen Konsequenzen für die höhere Mathematik.

Wie bereits erwähnt – siehe (2.32) –, nennen wir den Logarithmus zur Basis e den *natürlichen Logarithmus* und kürzen \log_e als \ln ab.

Aufgrund der Stellung von e als „natürlicher“, also bevorzugter Basis werden exponentielle Prozesse oft mit dieser Basis ausgedrückt. Hat man für irgendeine Basis $a > 0$ die Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ vor sich, so kann sie leicht in eine Exponentialfunktion zur Basis e umgerechnet werden. Das sollten wir jetzt schon können: Wir stellen die Frage, wie a^x als Potenz von e dargestellt werden kann, also $e^{\text{wieviel}} = a^x$, und das gesuchte „wieviel“ ist natürlich durch $\log_e(a^x) \equiv \ln(a^x) = x \ln(a)$ gegeben. Es gilt also

$$a^x = e^{x \ln(a)} \quad (3.5)$$

für beliebige $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Das ist eine wichtige Beziehung, die Sie sich merken sollten!¹⁴

4 Exponentialgleichungen

Exponentialgleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable in einem oder mehreren Exponenten vorkommt¹⁵. Eine Exponentialgleichung wie beispielsweise¹⁶

$$3^x = 12 \quad (4.1)$$

kann auf zweierlei Weise gelöst werden:

- Variante 1: Direkte Anwendung der Definition des Logarithmus. Die (einzige) Lösung von (4.1) ist

$$x = \log_3(12). \quad (4.2)$$

¹³ Das Zeichen \ll bedeutet „sehr viel kleiner als“. Dementsprechend steht \gg für „sehr viel größer als“.

¹⁴ Wird x durch $b x$ ersetzt, so ergibt sich die allgemeinere Beziehung $a^{b x} = e^{b x \ln(a)}$.

¹⁵ Siehe dazu auch das Skriptum *Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen*.

¹⁶ Eine andere Exponentialgleichung dieser Form ist uns mit (1.48) bereits begegnet.

Man kann nun noch überlegen, ob weitere Vereinfachungen möglich sind. Mit $12 = 3 \cdot 4$ können wir unter Verwendung der Regel (2.14)

$$x = \log_3(12) = \log_3(3 \cdot 4) = \log_3(3) + \log_3(4) = 1 + \log_3(4) \quad (4.3)$$

schreiben. Mit $4 = 2^2$ und der Regel (2.20) kann das weiter zu

$$x = 1 + \log_3(2^2) = 1 + 2 \log_3(2) \quad (4.4)$$

vereinfacht werden. Ein schönes Ergebnis, das wir, falls nötig oder sinnvoll, mit Hilfe der Regel (2.27) bzw. (2.34) durch eine andere Basis ausdrücken können.

- Variante 2: Logarithmieren beider Seiten. Das ist eine Methode, die sofort auf ein Ergebnis führt, das durch eine gewünschte Basis (in der Regel 10 oder e) ausgedrückt ist. Wir entscheiden uns für den Zehnerlogarithmus und wenden diesen auf beide Seiten von (4.1) an. Dies führt auf

$$\lg(3^x) = \lg(12). \quad (4.5)$$

Mit der Regel (2.20) wird die linke Seite zu $x \lg(3)$, womit sich

$$x \lg(3) = \lg(12) \quad \text{und daher} \quad x = \frac{\lg(12)}{\lg(3)} \approx 2.26186 \quad (4.6)$$

ergibt.

Eine etwas kompliziertere Exponentialgleichung ist

$$2^{4x-3} 4^{2x-1} - 8^x = 0. \quad (4.7)$$

Auch hier gibt es zwei Lösungsvarianten:

- Variante 1: Wir schreiben (4.7) in die Form

$$2^{4x-3} 4^{2x-1} = 8^x \quad (4.8)$$

um, verwenden $4 = 2^2$ und $8 = 2^3$ und vereinfachen:

$$2^{4x-3} (2^2)^{2x-1} = (2^3)^x \quad (4.9)$$

$$2^{4x-3} 2^{2(2x-1)} = 2^{3x} \quad (4.10)$$

$$2^{4x-3+2(2x-1)} = 2^{3x} \quad (4.11)$$

$$2^{8x-5} = 2^{3x} \quad (4.12)$$

Nach Anwendung des Logarithmus zur Basis 2 auf beide Seiten von (4.12) folgt

$$8x - 5 = 3x \quad (4.13)$$

und damit

$$x = 1. \quad (4.14)$$

Damit ist die (einzige) Lösung von (4.7) gefunden.

- Variante 2: Wir schreiben (4.7) in die Form

$$2^{4x-3} 4^{2x-1} = 8^x \quad (4.15)$$

um und wenden einen Logarithmus (beliebiger Basis) auf beide Seiten an. Wir entscheiden uns für den natürlichen Logarithmus, erhalten

$$\ln(2^{4x-3} 4^{2x-1}) = \ln(8^x) \quad (4.16)$$

und formen unter Verwendung der Regeln (2.14) und (2.20) weiter um:

$$\ln(2^{4x-3}) + \ln(4^{2x-1}) = \ln(8^x) \quad (4.17)$$

$$(4x - 3) \ln(2) + (2x - 1) \ln(4) = x \ln(8). \quad (4.18)$$

Wir könnten nun sogleich fröhlich nach x auflösen, aber die Berechnung vereinfacht sich, wenn wir berücksichtigen, dass $\ln(4) = \ln(2^2) = 2 \ln(2)$ und $\ln(8) = \ln(2^3) = 3 \ln(2)$ gilt. Damit nimmt (4.18) die Form

$$(4x - 3) \ln(2) + 2(2x - 1) \ln(2) = 3x \ln(2) \quad (4.19)$$

an, was nach Division beider Seiten durch $\ln(2)$ sofort auf die Lösung

$$x = 1 \quad (4.20)$$

führt, die klarerweise mit dem Ergebnis von Variante 1 übereinstimmt.

Generell sollten Sie sich beim Lösen einer Exponentialgleichung deren Struktur genau ansehen und versuchen, Vereinfachungsmöglichkeiten, die auf den Rechenregeln für Exponentialfunktionen und Logarithmen beruhen, zu erkennen.

5 Logarithmische Gleichungen

Logarithmische Gleichungen sind Gleichungen, bei denen die Variable unter einem Logarithmus (oder mehreren Logarithmen) steht¹⁷. Ein Beispiel ist die Gleichung

$$\lg(4x + 3) = 2. \quad (5.1)$$

Wir lösen sie, indem wir auf beide Seiten die Operation „10 hoch“ anwenden. Unter Verwendung der Identität (2.24) vereinfacht sie sich zu

$$4x + 3 = 10^2 \quad (5.2)$$

und besitzt daher als (einzige) Lösung

$$x = \frac{1}{4} (10^2 - 3) = \frac{97}{4} = 24.25. \quad (5.3)$$

¹⁷ Siehe dazu auch das Skriptum *Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen*.

Bei logarithmischen Gleichungen bekommen wir zunächst nur *Lösungskandidaten*¹⁸. Um sicherzugehen, dass beim Einsetzen eines Lösungskandidaten in die ursprüngliche Gleichung nur Logarithmen von positiven Zahlen gebildet werden, müssen wir die Probe machen. Im Fall von Gleichung (5.1) besteht unser Lösungskandidat (5.3) den Check, da $4x + 3 > 0$ für $x = \frac{97}{4}$.

Wie beim Lösen von Exponentialgleichungen empfiehlt es sich auch bei logarithmischen Gleichungen, nach Vereinfachungsmöglichkeiten zu suchen, die auf den Rechenregeln für Exponentialfunktionen und Logarithmen beruhen. So wird etwa die logarithmische Gleichung

$$\ln(x+1) + \ln(x-1) = 2 \quad (5.4)$$

gelöst, indem zuerst die linke Seite unter Anwendung der Regel (2.14) umgeschrieben wird:

$$\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln((x+1)(x-1)) = \ln(x^2 - 1). \quad (5.5)$$

Damit nimmt die Gleichung (5.4) die Form

$$\ln(x^2 - 1) = 2 \quad (5.6)$$

an, was nach Anwendung der Operation „e hoch“ auf beide Seiten

$$x^2 - 1 = e^2 \quad (5.7)$$

ergibt. Diese quadratische Gleichung besitzt die beiden Lösungen

$$x_1 = -\sqrt{e^2 + 1} \approx -2.89639 \quad \text{und} \quad x_2 = \sqrt{e^2 + 1} \approx 2.89639. \quad (5.8)$$

Nun müssen wir wieder die Probe machen: Da der Logarithmus nur für positive Argumente definiert ist, muss für jede Lösung x von (5.4) sowohl $x+1$ als auch $x-1$ positiv sein. Beides ist für x_1 nicht erfüllt. Daher ist nur x_2 Lösung von (5.4). Dass x_1 *keine* Lösung von (5.4) ist, rührt daher, dass wir die Umformung $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln(x^2 - 1)$ vorgenommen haben: Gleichung (5.6) ist zwar eine Folge von (5.4), d.h. sie muss für jedes x gelten, das (5.4) erfüllt, sie ist aber nicht äquivalent zu (5.4), da sie mehr Lösungen besitzt (nämlich x_1 und x_2)!

6 Logarithmische Skalen

Die Logarithmusfunktionen mit Basen $a > 1$ sind zwar streng monoton wachsend, aber ihr Wachstum ist sehr *langsam*. Das sieht man am besten anhand des Zehnerlogarithmus ein: Aus der allgemeinen Beziehung $\lg(10^s) = s$ folgt

$$\lg(10) = 1 \quad (6.1)$$

$$\lg(100) = 2 \quad (6.2)$$

$$\lg(1000) = 3 \quad (6.3)$$

$$\text{usw.} \quad (6.4)$$

¹⁸ Das ist ganz analog zum Fall der *Wurzelgleichungen*, die im gleichnamigen Skriptum behandelt werden.

Eine Verzehnfachung des Arguments führt lediglich zu einem um 1 größeren Funktionswert. Selbst $\lg(1 \text{ Milliarde})$ ist nur 9. Für die Logarithmusfunktion zu einer Basis $a > 1$ gilt $\log_a(a y) = \log_a(y) + 1$, d.h. eine Ver- a -fachung des Arguments führt nur zu einem um 1 größeren Funktionswert.

Dieses langsame Wachstum kann benutzt werden, um Größen, deren Werte über viele Größenordnungen (z.B. Zehnerpotenzen) streuen, Kennzahlen zuzuordnen, die nicht allzu stark variieren, die ohne große Zehnerpotenzen angeschrieben werden können und die in einer Visualisierung (etwa als Werte auf einer Achse) bequem untergebracht werden können. So rangiert etwa die bei einem Erdbeben freigesetzte seismische Energie zwischen 10^6 Joule (leichtes Beben, für Menschen praktisch nicht spürbar) und 10^{19} Joule (katastrophales Beben). Um eine handlichere Kennzahl zur Hand zu haben, wird die *Magnitude* eines Bebens mit Hilfe der als Vielfache von 1 Joule angegebenen Energie E durch

$$M = \frac{\lg(E) - 4.8}{1.5} \quad (6.5)$$

definiert¹⁹. Ihre Werte rangieren nun lediglich (ungefähr) zwischen 1 und 9.5. Eine Erhöhung der Magnitude um 1 entspricht ungefähr einer Ver-32-fachung der Energie, eine Erhöhung der Magnitude um 0.2 entspricht ungefähr einer Verdopplung der Energie!

Wird in einer grafischen Darstellung anstelle einer Größe deren Logarithmus verwendet, so sprechen wir von einem **logarithmischen Maßstab**. Ein schönes Beispiel eines „doppelt-logarithmischen“ Diagramms ist in Abbildung 1 (unten) im Vergleich zu einer nicht-logarithmischen Darstellung der gleichen Daten (oben) zu sehen.

Logarithmen können auch benutzt werden, um nichtlineare Beziehungen auf lineare (und damit einfacher zu handhabende) Zusammenhänge zurückzuführen:

- So übersetzt sich die für zwei Größen x und y geltende Beziehung $y = c e^{bx}$ (c und b sind Konstanten) unter Verwendung von $Y = \ln(y)$ anstelle von y in den linear-inhomogenen Zusammenhang $Y = bx + \ln(c)$ zwischen x und Y .
- Ein Potenzgesetz der Form $u = k v^n$ zwischen zwei Größen u und v (k und n sind Konstanten) übersetzt sich unter Verwendung von $U = \lg(u)$ und $V = \lg(v)$ anstelle von u und v in den linear-inhomogenen Zusammenhang $U = nV + \lg(k)$ zwischen U und V .

¹⁹ Das ist eine stark vereinfachte Version, aber sie illustriert das Prinzip.

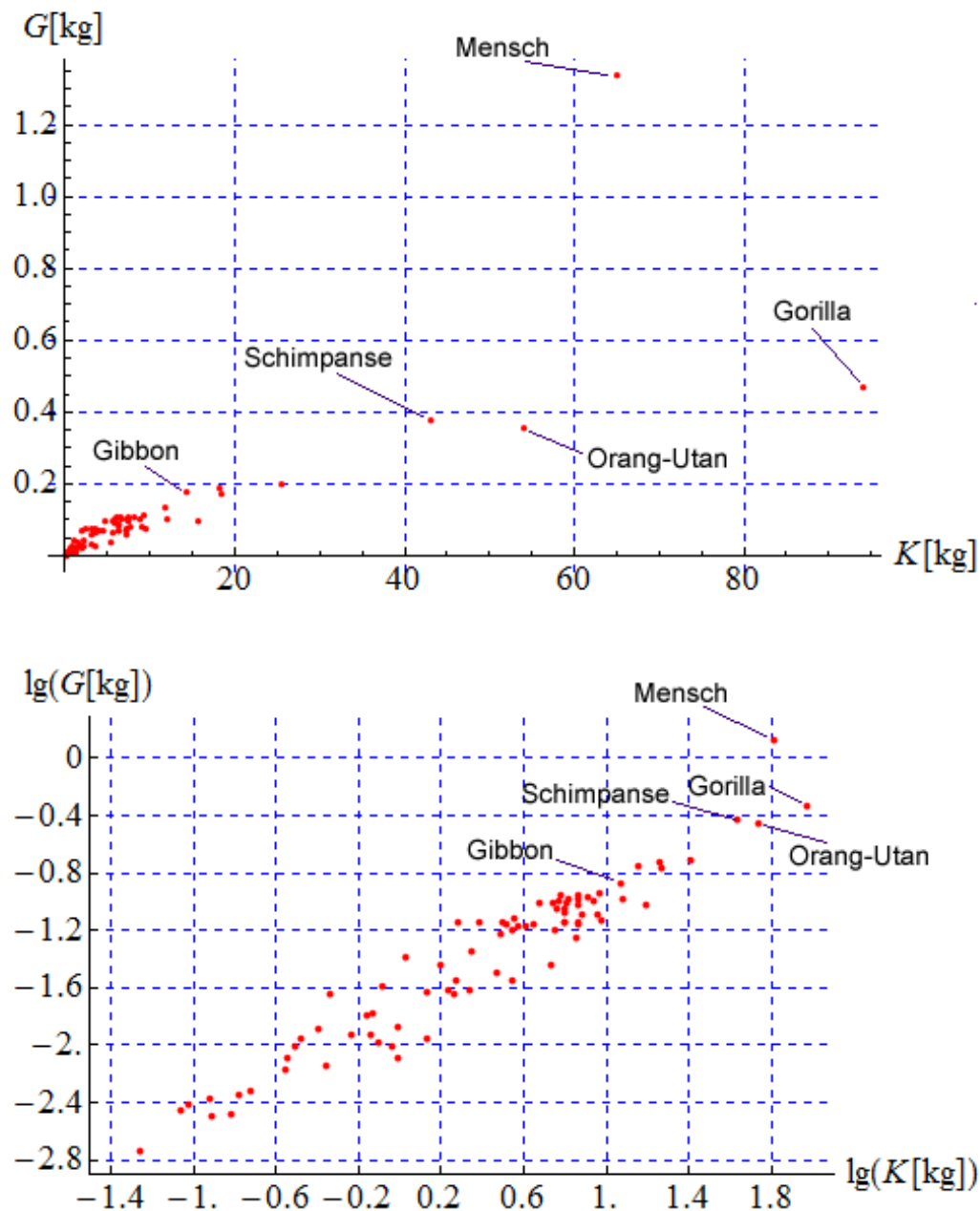


Abbildung 1: Der Zusammenhang zwischen Körpermasse K und Gehirnmasse G bei unterschiedlichen Primatenarten (Affen, Menschenaffen und Menschen), oben in nicht-logarithmischem Maßstab und unten in doppelt-logarithmischem Maßstab dargestellt. Der Unterschied zeigt eindrucksvoll die Vorteile der logarithmischen Darstellung. Im oberen Diagramm sind die kleineren Arten alle in der Nähe des Ursprungs zusammengedrängt. Bei der Interpretation des unteren Diagramms ist zu bedenken, dass eine Differenz von 1 einem Faktor 10 zwischen den nicht-logarithmierten Größen entspricht. So ist der Logarithmus der Gehirnmasse des Menschen um ungefähr 0.5 größer als der von Menschenaffen mit vergleichbarer Körpermasse. Das entspricht etwa einem Faktor $10^{0.5} \approx 3$ zwischen den Gehirnmassen von Menschenaffe und Mensch, wie auch aus dem oberen Diagramm abgelesen werden kann.

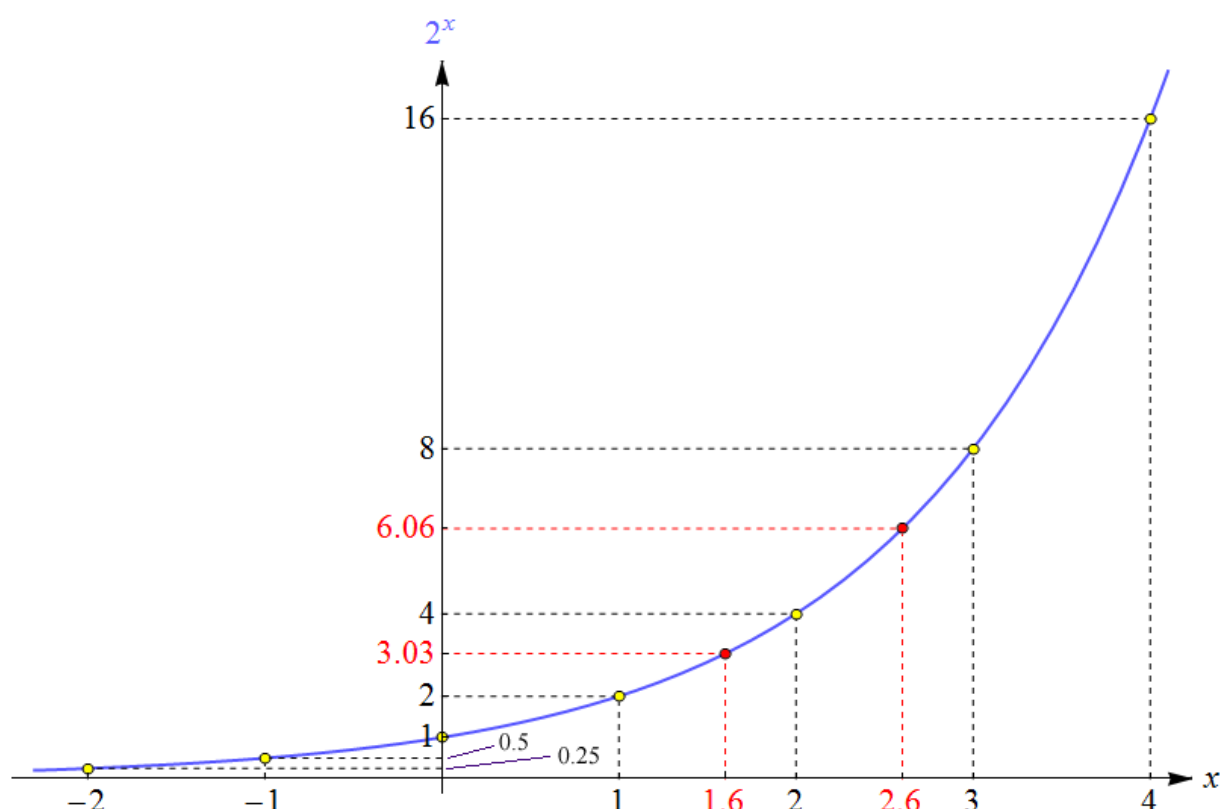


Abbildung 2: Der Graph der Exponentialfunktion $x \mapsto 2^x$. Eine Erhöhung von x um 1 führt zu einer Verdopplung des Funktionswerts (und dementsprechend führt eine Verminderung von x um 1 zu einer Halbierung des Funktionswerts). Diese Eigenschaften gelten für *jedes* reelle x , wie hier für die ganzen Zahlen zwischen -2 und 4 sowie für die zwei Werte 1.6 und 2.6 illustriert.

7 Graphen der Exponentialfunktionen

Die – uns nun bereits bekannten – wichtigsten Eigenschaften der Exponentialfunktionen zeigen sich sehr deutlich in deren Graphen.

Abbildung 2 zeigt den Graphen der Exponentialfunktion $x \mapsto 2^x$ und illustriert, dass für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ der Funktionswert an der Stelle $x+1$ gleich dem Doppelten des Funktionswerts an der Stelle x ist (vgl. (1.13)).

Abbildung 3 zeigt die Graphen der Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ für $a = 2$, $a = e$ und $a = 10$ sowie zusätzlich den Graphen der Funktion $x \mapsto 1 + x$, um zu illustrieren, dass e tatsächlich eine besondere Basis ist.

Abbildung 4 schließlich zeigt die Graphen der Exponentialfunktionen $x \mapsto a^{-x}$ für $a = 2$, $a = e$ und $a = 10$ (was gleichbedeutend ist mit den Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ für $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{e}$ und $a = \frac{1}{10}$).

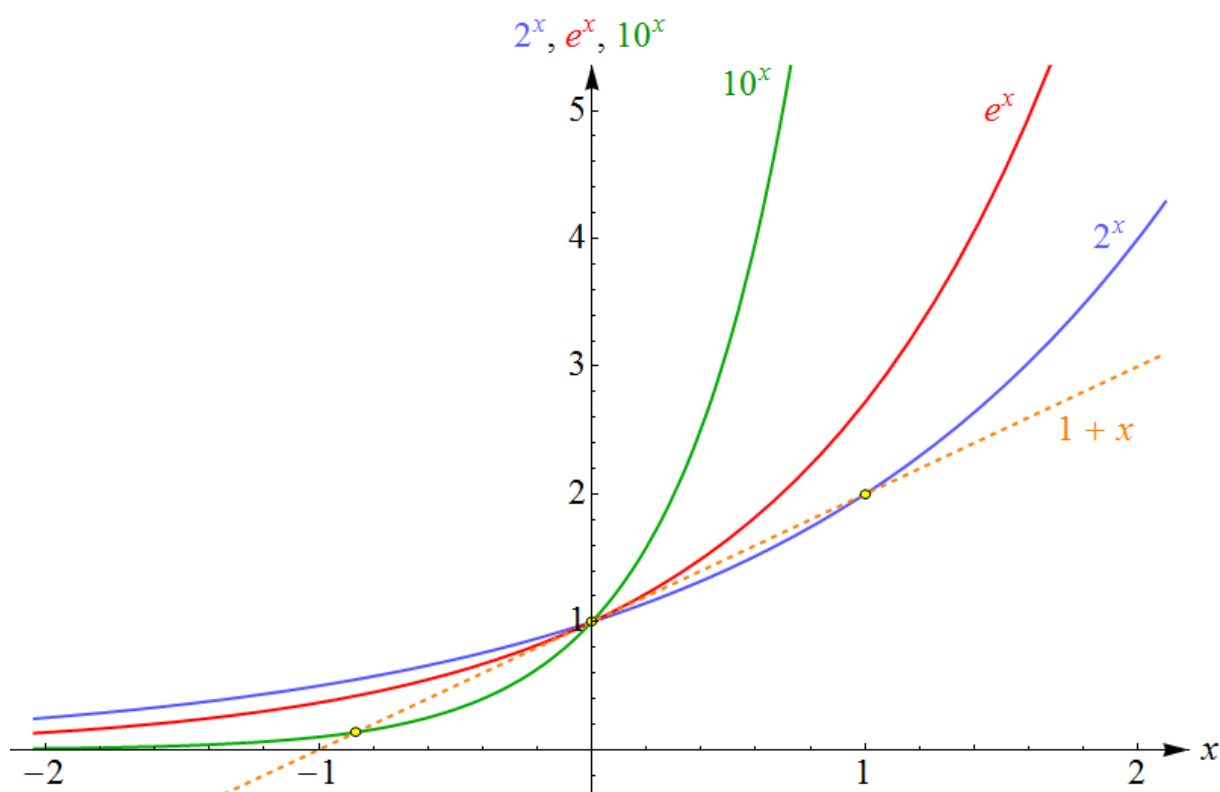


Abbildung 3: Die Graphen der Exponentialfunktionen $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto e^x$ und $x \mapsto 10^x$. Es ist deutlich zu erkennen, dass das Wachstum umso schneller verläuft, je größer die Basis ist. Um die Näherungsformel (3.4), die die „natürliche Basis“ e zu etwas Besonderem macht, zu illustrieren, ist zusätzlich der Graph der Funktion $x \mapsto 1 + x$ eingezeichnet. Im Punkt $(0, 1)$ ist er tangential zum Graphen der Exponentialfunktion zur Basis e , *nicht* aber tangential zu den Graphen der Exponentialfunktionen mit anderen Basen.

8 Graphen der Logarithmusfunktionen

Wie sehen die Graphen der Logarithmusfunktionen aus? Wir führen ihre Verläufe auf jene der Exponentialfunktionen zurück: Wie die Merkregel (2.12) sehr schön zusammenfasst, ist die (für positive Argumente definierte) Logarithmusfunktion $y \mapsto \log_a(y)$ die Umkehrfunktion der (für beliebige reelle Argumente definierten) Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$. Ist (x, y) ein Punkt des Graphen der Exponentialfunktion, so ist (y, x) ein Punkt des Graphen der Logarithmusfunktion. Nun hat die Vertauschung der Koordinaten aber eine einfache geometrische Bedeutung: Die Punkte (x, y) und (y, x) gehen durch eine Spiegelung an der ersten Mediane (der 45° -Geraden, d.h. der Geraden durch den Ursprung mit Anstieg 1) auseinander hervor. Daher kann der Graph einer Logarithmusfunktion aus jenem der Exponentialfunktion zur gleichen Basis durch eine Spiegelung an der ersten Mediane gewonnen werden²⁰.

Dabei ist zu bedenken, dass die Graphen der Exponential- und der Logarithmusfunktion nun in das *gleiche* Diagramm eingezeichnet werden. Mit unseren Variablenbezeichnungen ist dessen erste Achse die x -Achse, die zweite Achse die y -Achse. In diesem Sinn interpretieren wir die

²⁰ Diese Beziehung zwischen dem Graphen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion gilt ganz allgemein.

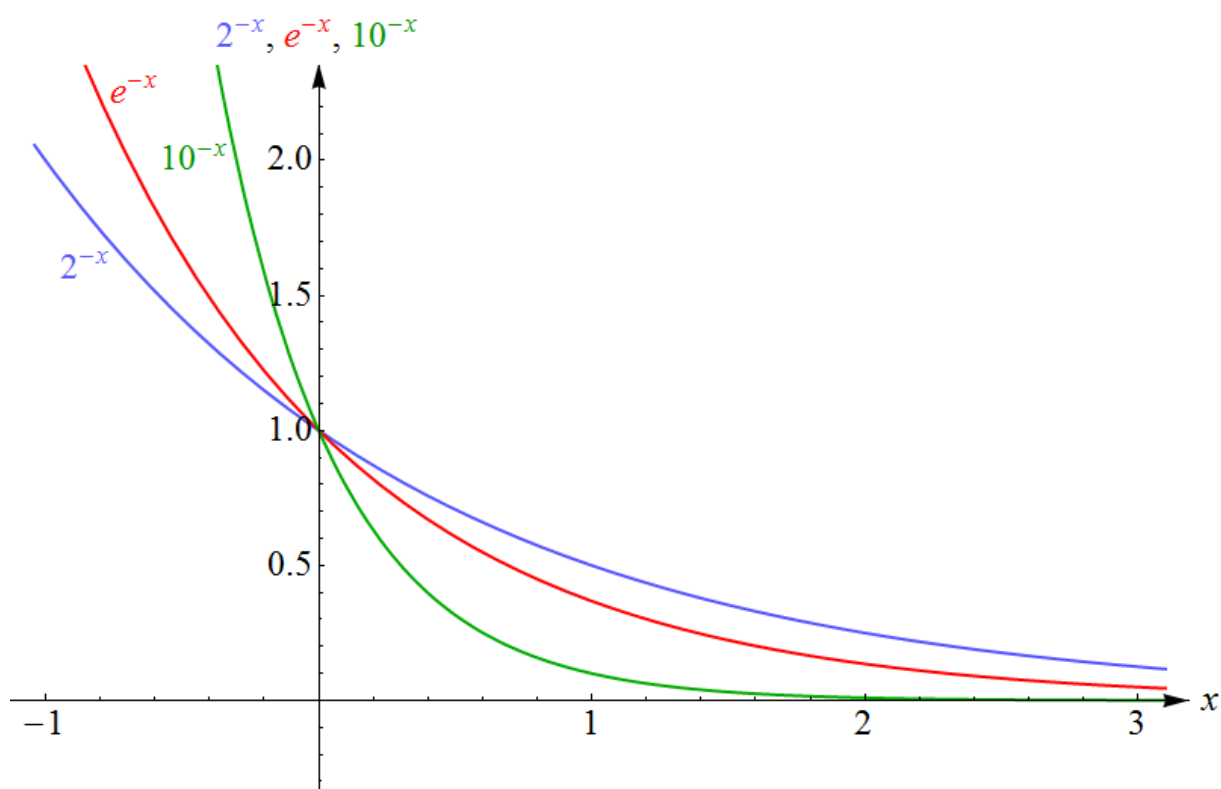


Abbildung 4: Die Graphen der Exponentialfunktionen

$x \mapsto 2^{-x}$, gleichbedeutend mit $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$,
 $x \mapsto e^{-x}$, gleichbedeutend mit $x \mapsto \left(\frac{1}{e}\right)^x$, und
 $x \mapsto 10^{-x}$, gleichbedeutend mit $x \mapsto \left(\frac{1}{10}\right)^x$.

Sie entstehen aus den Graphen von Abbildung 3 durch Spiegelung an der zweiten Achse.

Logarithmusfunktion als Abbildung

$$x \mapsto \log_a(x), \quad (8.1)$$

also mit der *gleichen* unabhängigen Variable x wie die Exponentialfunktion (im Unterschied zur oben verwendeten Schreibweise $y \mapsto \log_a(y)$, die den Charakter des Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion besser ausgedrückt hat).

Abbildung 5 zeigt die Graphen der Logarithmusfunktionen zu den Basen 2, e und 10, sowie die Graphen der Exponentialfunktionen, aus denen sie durch Spiegelung an der ersten Mediane hervorgehen. Dem Diagramm entnehmen wir auch die Eigenschaft, dass (ganz allgemein für $a > 1$) die Werte von $\log_a(x)$ für sehr kleine (positive) x beliebig klein (also „beliebig negativ“) werden – ein Sachverhalt, der manchmal durch die Formel

$$\lim_{x \downarrow 0} \log_a(x) = -\infty \quad (8.2)$$

ausgedrückt wird. Damit wird auch verdeutlicht, dass die Logarithmusfunktionen an der Stelle 0 nicht definiert sind.

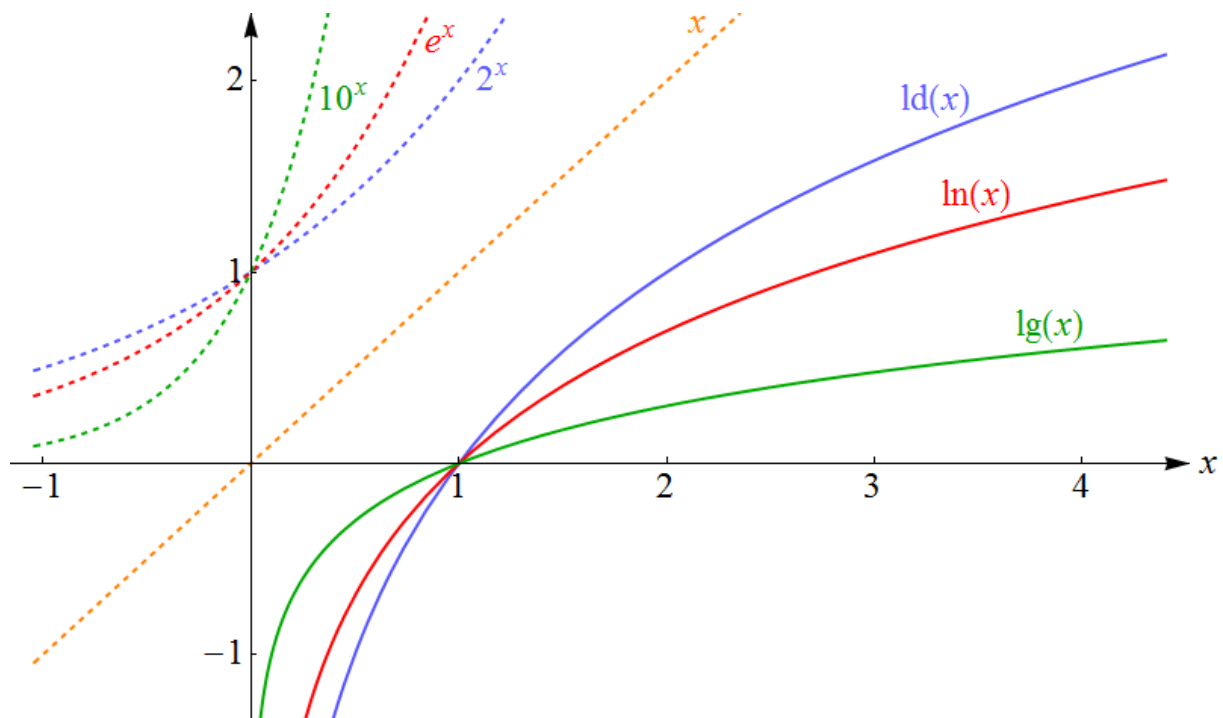


Abbildung 5: Die Graphen der Logarithmusfunktionen zu den Basen 2, e und 10. Sie entstehen aus den Graphen von Abbildung 3 (hier strichliert wiedergegeben) durch Spiegelung an der ersten Mediane, d.h. am Graphen der Funktion $x \mapsto x$, der ebenfalls (strichliert) dargestellt ist. Aus den Graphen der Logarithmusfunktionen geht hervor,

- dass sie nur für positive Argumente definiert sind,
- dass sie streng monoton wachsend sind,
- dass ihre Werte für Argumente x mit $0 < x < 1$ negativ sind,
- dass sie an der Stelle $x = 1$ alle den Wert 0 annehmen (vgl. (2.10)) und
- dass ihre Werte für Argumente $x > 1$ positiv sind.

Für wachsende x im Bereich $x > 1$ zeigen sie ein sehr langsames Wachstum.

9 Übungsaufgaben

Hier einige Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Die Bevölkerungszahl B einer Ortschaft beträgt bei der Gründung 2400 und wächst jedes Jahr um 5%.
 - (a) Geben Sie die Bevölkerungszahl $B(x)$ nach x Jahren an!
 - (b) Berechnen Sie die Bevölkerungszahl nach 7 Jahren!

Lösungen:

$$\begin{aligned} \text{(a) } B(x) &= 2400 \cdot 1.05^x \\ \text{(b) } B(7) &= 2400 \cdot 1.05^7 \approx 3377 \end{aligned}$$

- Eine Bakterienkultur, deren Zahl zu Beginn 4500 beträgt, wächst innerhalb von 9 Stunden um 23%. Geben Sie ihre Größe $N(x)$ nach x Stunden
 - (a) als Exponentialfunktion zur Basis 1.23
 - (b) als Exponentialfunktion zur Basis 2
 - (c) als Exponentialfunktion zur Basis e
 - (d) als Exponentialfunktion zur Basis 10

an!

Lösungen:

$$\begin{aligned}
 4500 \cdot 1.23^{x/9} &\approx 4500 \cdot 1.23^{x/9} = N(x) \quad (a) \\
 4500 \cdot e^{x \ln(1.23)/9} &\approx 4500 \cdot e^{x \ln(1.23)/9} = N(x) \quad (c) \\
 4500 \cdot 2^{x/(9 \lg 2)} &\approx 4500 \cdot 2^{x/(9 \lg 2)} = N(x) \quad (b) \\
 4500 \cdot 10^{x/(9 \lg 10)} &\approx 4500 \cdot 10^{x/(9 \lg 10)} = N(x) \quad (d)
 \end{aligned}$$

- Nach welcher Zeit verdoppelt sich die Bakterienkultur der vorigen Aufgabe?

Lösungen:

$$\text{Nach } 9 \frac{\lg(2)}{\lg(1.23)} \text{ Stunden} \approx 30 \text{ Stunden und } 8 \text{ Minuten.}$$

- Exponentielle Zerfallsprozesse werden in Naturwissenschaft und Technik oft in der Form $f(t) = f_0 e^{-\lambda t}$ ausgedrückt, wobei $\lambda > 0$ die sogenannte **Zerfallskonstante** ist. Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen Zerfallskonstante und Halbwertszeit!

Lösung:

$$\text{Halbwertszeit} = \frac{\ln(2)}{\lambda}. \quad \text{Beachten Sie: } \lambda \text{ hat die Dimension } \text{Zeit}^{-1}.$$

- Drücken Sie $\log_3 \left(9 \frac{x^2 y^3}{z^4} \right) - 2 \log_9 \left(9 \frac{y^3 z^4}{x^2} \right)$ durch möglichst einfache Logarithmen aus!

Lösung:

$$4 \log_3(x) - 8 \log_3(z)$$

- Drücken Sie $4 \lg(3a^2) + 2 \lg \left(\frac{b}{\sqrt{a}} \right)$ als einzelnen Logarithmus (ohne Vorfaktor) aus!

Lösung:

$$\lg(81a^2b^2)$$

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $27 \cdot 3^{2x+1} - 9^{-x+5} = 0$

Lösung:

$$\frac{7}{3} = x \text{ ist Lösung (die einzige)}$$

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $\lg(2x+1) + \lg(x-1) = -1$

Lösung:

$$\frac{1}{5} + \sqrt{\frac{20}{5}} = x \text{ ist Lösung (die einzige)}$$

- Im Text wird erwähnt, dass sich die für zwei Größen x und y geltende Beziehung $y = c e^{bx}$ (c und b sind Konstanten) unter Verwendung von $Y = \ln(y)$ anstelle von y in den linear-inhomogen Zusammenhang $Y = bx + \ln(c)$ zwischen x und Y übersetzt. Zeigen Sie das!

Lösungstipp:

Wenden Sie auf beide Seiten der Beziehung $y = c e^{bx}$ den natürlichen Logarithmus an und benutzen Sie die in diesem Skriptum besprochenen Rechenregeln!

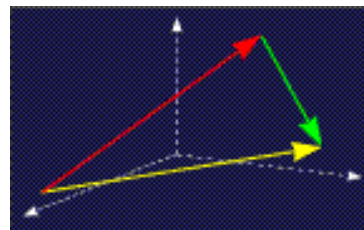
- Im Text wird erwähnt, dass sich ein Potenzgesetz der Form $u = k v^n$ zwischen zwei Größen u und v (k und n sind Konstanten) unter Verwendung von $U = \lg(u)$ und $V = \lg(v)$ anstelle von u und v in den linear-inhomogen Zusammenhang $U = nV + \lg(k)$ zwischen U und V übersetzt. Zeigen Sie das!

Lösungstipp:

Wenden Sie auf beide Seiten der Beziehung $u = k v^n$ den Zehnerlogarithmus an und benutzen Sie die in diesem Skriptum besprochenen Rechenregeln!

Dieses Skriptum wurde erstellt im Mai 2015 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“

(<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Der Funktionenzoo

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

Dieses Skriptum gibt eine Übersicht über die wichtigsten Typen mathematischer Funktionen und über Operationen, die benutzt werden, um weitere Funktionen zu gewinnen. In einem letzten Abschnitt können Sie bei Bedarf Begriffe, die Eigenschaften von Funktionen und ihren Graphen betreffen, nachlesen.

1 Einige Tipps vorab

Im Rahmen Ihrer Ausbildung (vielleicht auch in Ihrem Beruf) werden Sie immer wieder auf mathematische Funktionen stoßen, von denen Sie gewisse Dinge wissen möchten. Wo liegen die Nullstellen? Wie ist es um das Monotonieverhalten bestellt? Gibt es Pole (Unendlichkeitsstellen)? Wie ist das Verhalten für große Argumente? Um sich über die Eigenschaften einer Funktion zu orientieren, stehen elektronische Werkzeuge zur Verfügung, mit denen Sie sich möglichst früh anfreunden sollten:

- Wie bereits aus den bisherigen Skripten hervorgegangen ist, kann man einem Funktionsgraphen viele Eigenschaften der Funktion, die er darstellt, „ansehen“ (oder aus seinem Verlauf zumindest näherungsweise erschließen). Machen Sie sich mit **elektronischen Werkzeugen** vertraut, **die Funktionsgraphen darstellen** und am besten gleich als Graphikdateien exportieren **können** (wie zum Beispiel *Mathematica* oder *GeoGebra*)! Sie werden in diesem Skriptum einige Abbildungen von Funktionsgraphen finden. An anderen Stellen heißt es einfach: „Sehen Sie sich den Graphen der Funktion ... an!“ In diesen Fällen benutzen Sie bitte ein Werkzeug Ihrer Wahl! Sie können durchaus auch spielerisch Funktionsterme „erfinden“ und variieren und sich die entsprechenden Graphen ansehen, um ein Gefühl für die Vielfalt zu bekommen, die sich ergibt, sobald man den gewohnten Bereich der einfachsten und ausführlich besprochenen Typen (wie lineare und quadratische Funktionen, Sinus und Cosinus, Exponential- und Logarithmusfunktionen) verlässt.

- Um einzelne Funktionseigenschaften, die Sie benötigen (wie beispielsweise die Lage von Nullstellen) rechnerisch schnell ermitteln zu können, sollten Sie sich auch mit dem einen oder anderen **Computeralgebrasystem** vertraut machen. (Auch dafür können wir als Beispiele *Mathematica* und *GeoGebra* nennen.) Orientieren Sie sich vor allem darüber, wie mit derartigen Werkzeugen Terme vereinfacht und Gleichungen gelöst werden! Später werden auch das Differenzieren und Integrieren (die wir in diesem Skriptum nicht benutzen) dazukommen.

Direkt vom Web-Browser aus oder mittels einer Smartphone-App können Sie auch *Wolfram Alpha* für kleinere Aufgaben dieser Art benutzen (die mathematischen Berechnungen übernimmt dann *Mathematica*).

2 Funktionstypen

Einige der für technische Anwendungen relevanten Typen reeller Funktionen wurden bereits in früheren Skripten behandelt. In der folgenden Zusammenstellung werden diese kurz wiederholt (in zwei Fällen wird lediglich auf die entsprechenden ausführlichen Skripten verwiesen), und es werden einige neue Typen, von denen bisher nicht oder nur am Rande die Rede war, hinzugefügt. Einige spezielle Begriffe, die nicht in früheren Skripten vorkamen, werden im letzten Abschnitt dieses Skriptums erklärt – konsultieren Sie ihn nach Bedarf!

- **Lineare Funktionen:** Eine lineare Funktion ist eine Funktion, deren Zuordnungsvorschrift vom Typ

$$x \mapsto kx + d \quad (2.1)$$

ist, wobei k und d vorgegebene reelle Zahlen sind. Ist $d = 0$, so wird die Funktion auch linear-homogen, ansonsten linear-inhomogen genannt. Der Graph einer Funktion dieses Typs ist eine Gerade mit Anstieg k . Mehr über lineare Funktionen und den Begriff des Anstiegs finden Sie im Skriptum *Lineare Funktionen und ihre Graphen*.

- **Quadratische Funktionen:** Eine quadratische Funktion ist eine Funktion, deren Zuordnungsvorschrift vom Typ

$$x \mapsto ax^2 + bx + c \quad (2.2)$$

ist, wobei a , b und c vorgegebene reelle Zahlen sind und $a \neq 0$ ist. Der Graph einer Funktion dieses Typs ist eine Parabel, deren Form und Lage von a , b und c abhängen. Mehr über quadratische Funktionen finden Sie im Skriptum *Quadratische Funktionen und ihre Graphen*.

- **Potenzfunktionen:** Eine Potenzfunktion ist eine Funktion, deren Zuordnungsvorschrift vom Typ

$$x \mapsto ax^r \quad (2.3)$$

ist, wobei a und r vorgegebene reelle Zahlen sind. In den meisten Anwendungen ist r eine natürliche, ganze oder rationale Zahl. Das Rechnen mit Potenzen wurde im Skriptum *Potenzen* besprochen. Je nach dem Wert von r ist die größtmögliche Definitionsmenge

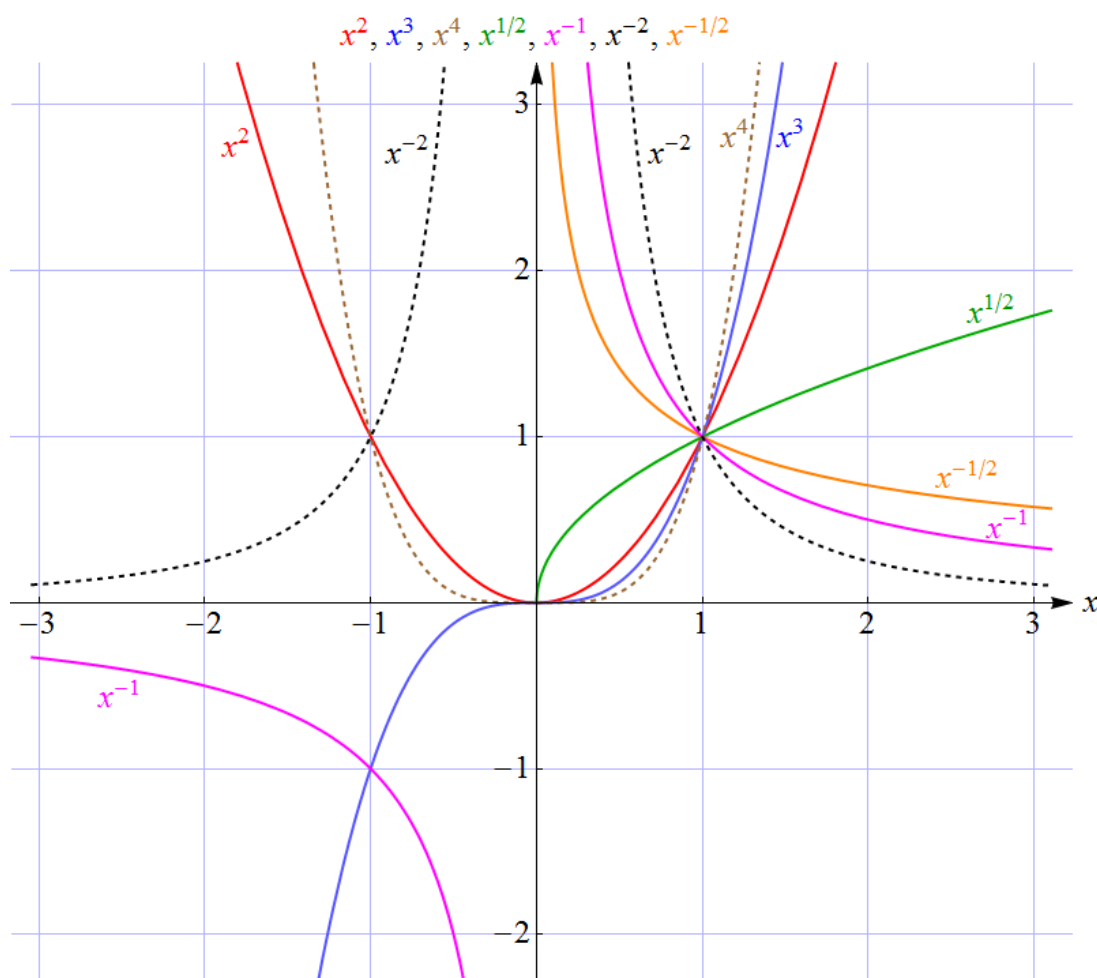


Abbildung 1: Die Graphen einiger Potenzfunktionen:

$x \mapsto x^2$ (Graph = Normparabel), $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^4$, alle auf ganz \mathbb{R} definiert.

$x \mapsto x^{1/2}$ (Wurzelfunktion, Graph = halbe Normparabel, gedreht),
auf $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ definiert.

$x \mapsto x^{-1}$, $x \mapsto x^{-2}$, beide auf $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert.

$x \mapsto x^{-1/2}$, auf $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ definiert.

einer Funktion dieses Typs ganz \mathbb{R} , \mathbb{R}^* (reelle Zahlen ohne 0), \mathbb{R}^+ (positive reelle Zahlen) oder \mathbb{R}_0^+ (nicht-negative reelle Zahlen). Auch die Wurzelfunktion¹

$$x \mapsto \sqrt{x} \equiv x^{1/2} \quad (2.4)$$

und die Funktion

$$x \mapsto \frac{1}{x} \equiv x^{-1} \quad (2.5)$$

(Bilden des Kehrwerts) sind Potenzfunktionen. Eine Potenzfunktion mit ganzzahligem geraden r ist eine gerade Funktion, eine Potenzfunktion mit ganzzahligem ungeraden r ist eine ungerade Funktion. (Für die Begriffe *gerade* und *ungerade* siehe (4.1) und (4.2).) Beispiele einiger Graphen von Potenzfunktionen sind in Abbildung 1 wiedergegeben.

¹ Das Zeichen \equiv bedeutet „identisch“ und wird auch für „offensichtlicherweise gleich, nur unterschiedlich angeschrieben“ verwendet.

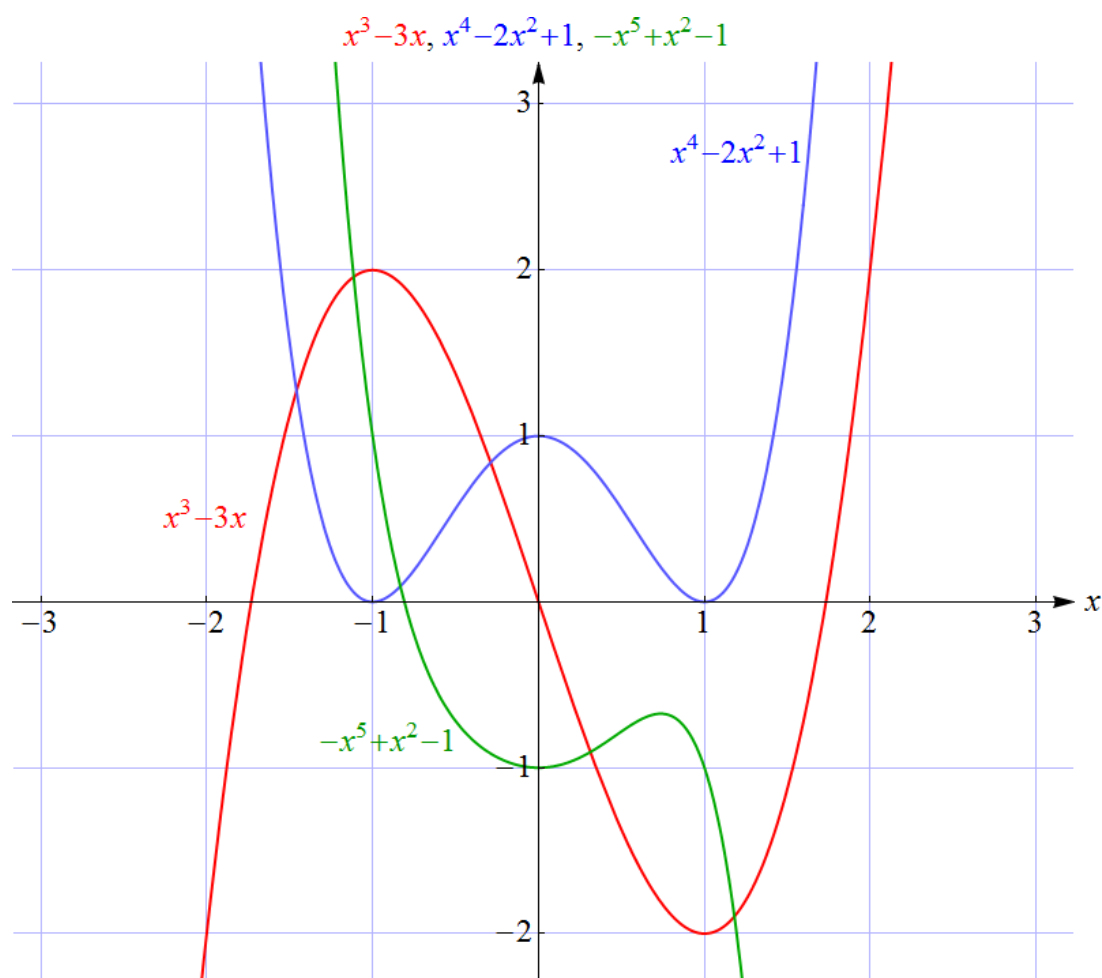


Abbildung 2: Die Graphen dreier Polynomfunktionen:

$x \mapsto x^3 - 3x$ (Polynom dritten Grades, ungerade).

$x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$ (Polynom vierten Grades, gerade).

$x \mapsto -x^5 + x^2 - 1$ (Polynom fünften Grades, weder gerade noch ungerade).

- **Polynomfunktionen**²: Eine Polynomfunktion (kurz: Polynom) ist eine Funktion, deren Zuordnungsvorschrift vom Typ

$$x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (2.6)$$

ist, wobei a_0, a_1, \dots, a_n vorgegebene reelle Zahlen (die Koeffizienten) sind und $a_n \neq 0$ ist. Die natürliche Zahl n (der größte auftretende Exponent) heißt der *Grad* der Polynomfunktion. Spezialfälle sind konstante³ und lineare Funktionen ($n = 0$ und $n = 1$) und quadratische Funktionen ($n = 2$). Polynomfunktionen vom Grad 3 (Funktionen „dritten Grades“) werden auch kubische Funktionen genannt. Eine Polynomfunktion vom Grad

² Siehe dazu auch das Skriptum *Polynome*.

³ Eine konstante Funktion $\neq 0$ ist eine Polynomfunktion vom Grad 0. Der Nullfunktion $x \mapsto 0$ ordnet man formal den Grad $-\infty$ zu, damit für *alle* Polynomfunktionen die schöne Regel gilt: Der Grad eines Produkts ist die Summe der Grade.

$n \geq 1$ hat höchstens n Nullstellen⁴. Das Verhalten einer Polynomfunktion für große $|x|$ kann durch den „führenden Term“ $a_n x^n$ approximiert werden⁵. Für eine Polynomfunktion mit ungeradem Grad folgt daraus, dass ihre Werte an den Stellen x und $-x$ für hinreichend großes x verschiedene Vorzeichen haben und dass es daher immer zumindest eine Nullstelle gibt⁶. Weiters besitzt eine Polynomfunktion vom Grad $n \geq 1$ höchstens $n - 1$ lokale Extremstellen. Der Graph einer Polynomfunktion vom Grad $n \geq 1$ kann eine Gerade in höchstens n Punkten schneiden. Eine Polynomfunktion, für die nur die Koeffizienten a_j mit geradem j von 0 verschieden sind, ist gerade. Eine Polynomfunktion, für die nur die Koeffizienten a_j mit ungeradem j von 0 verschieden sind, ist ungerade. Die Graphen der Polynome mit großem Grad können sehr unterschiedliche Formen besitzen. Besonders nützlich für Anwendungen ist, dass sehr viele Funktionen (innerhalb eines geeignet gewählten beschränkten x -Bereichs) beliebig genau durch Polynome mit entsprechend hohem Grad angenähert werden können. Polynome spielen daher bei der Modellierung ganz unterschiedlicher Sachverhalte eine besonders wichtige Rolle. Beispiele einiger Graphen von Polynomfunktionen sind in Abbildung 2 wiedergegeben.

- **Rationale Funktionen:** Eine rationale Funktion (auch: gebrochen rationale Funktion) ist ein Quotient zweier Polynomfunktionen, also vom Typ

$$x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}, \quad (2.7)$$

wobei p und q Polynomfunktionen sind. Üblicherweise ist der Quotient (im Sinne der Division von Polynomen) „vollständig gekürzt“, was genau dann der Fall ist, wenn p und q keine gemeinsamen Nullstellen besitzen⁷. Die größtmögliche Definitionsmenge einer rationalen Funktion ist die Menge aller reellen Zahlen, die keine Nullstellen des Nenners q sind. Das Verhalten einer rationalen Funktion für große $|x|$ ergibt sich, indem Zähler und Nenner durch ihre führenden Terme ersetzt werden: Ist p ein Polynom vom Grad m und q ein Polynom vom Grad n , so ist der Quotient dieser führenden Terme von der Form $\frac{a_m x^m}{b_n x^n}$, also proportional zu x^{m-n} . Daraus folgt, dass eine rationale Funktion f

- mit $m < n$ im Unendlichen gegen 0 geht (die erste Achse ist dann eine Asymptote des Graphen von f),

⁴ In diesem Zusammenhang sei erwähnt, dass Polynome oft in faktorisierter Form angegeben werden, beispielsweise als $x \mapsto (x - 1)(x^2 - x + 1)$, was die Bestimmung der Nullstellen erleichtert. Ein solcher Funktionsterm muss nur dann ausmultipliziert werden (in diesem Beispiel $(x - 1)(x^2 - x + 1) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$), wenn es zur Lösung einer Aufgabe nötig ist.

⁵ Und zwar in dem Sinn, dass der Quotient aus Polynom und führendem Term im Unendlichen gegen 1 strebt. Achtung: Die Differenz aus Polynomfunktion und führendem Term wird im Allgemeinen nicht gegen 0 streben! Der führende Term von $5x^2 + 3x + 2$ ist $5x^2$, und im Unendlichen strebt $3x + 2$ nicht gegen 0.

⁶ Genau genommen muss für dieses Argument noch verwendet werden, dass Polynomfunktionen stetig sind. Da sich ihre Graphen „in einem Zug“ ohne abzusetzen zeichnen lassen, wird zu je zwei Funktionswerten auch jeder zwischen ihnen liegende Wert angenommen.

⁷ Beispiel: $\frac{3(x^2 - 1)}{(x - 1)(x - 2)}$ ist nicht vollständig gekürzt. Wegen $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ kann durch $x - 1$ gekürzt werden, was auf die vollständig gekürzte Version $\frac{3(x + 1)}{x - 2}$ führt.

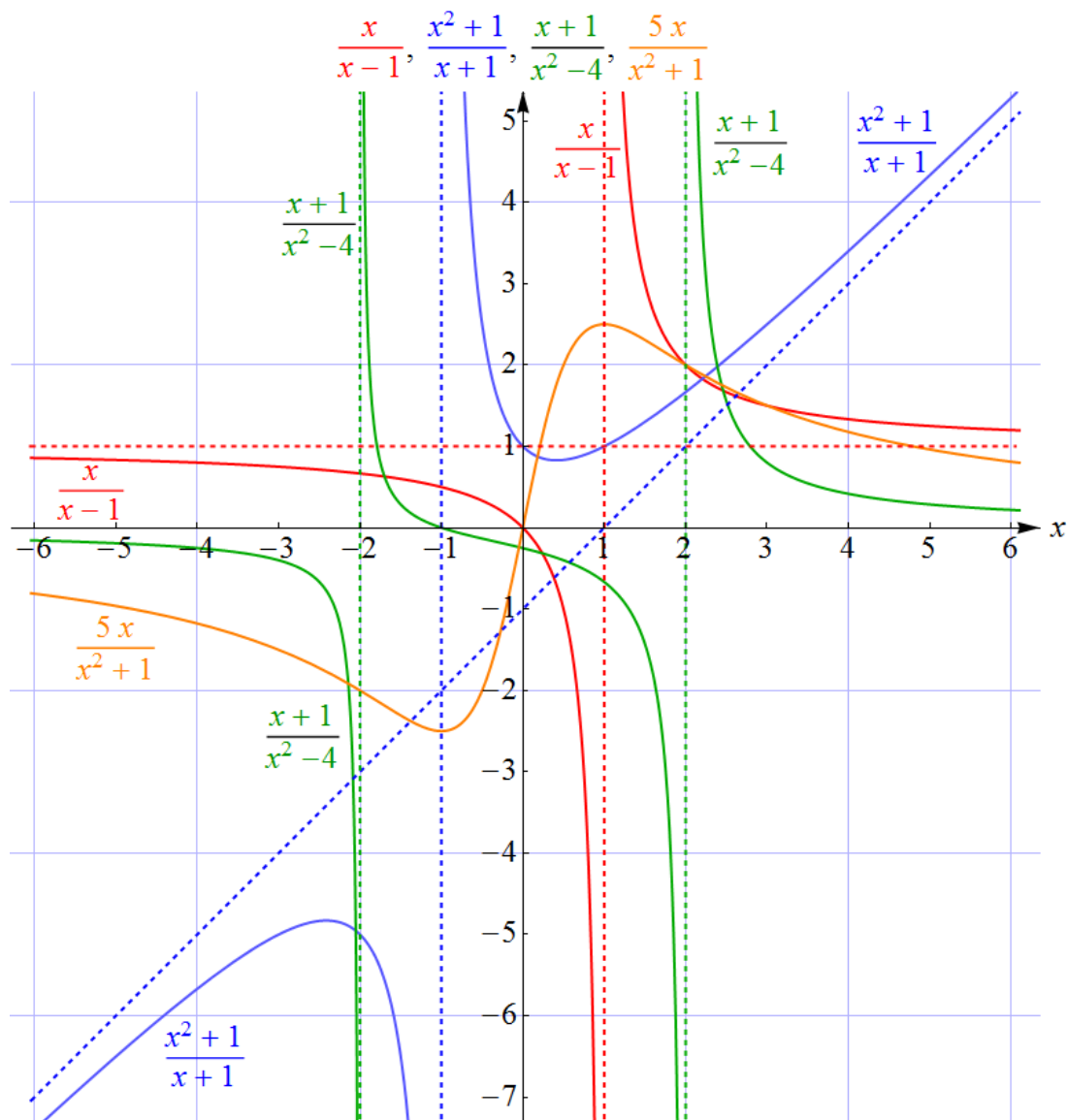


Abbildung 3: Die Graphen von vier rationalen Funktionen:

- $x \mapsto \frac{x}{x-1}$, definiert auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Asymptoten: strichliert.
- $x \mapsto \frac{x^2+1}{x+1}$, definiert auf $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Asymptoten: strichliert.
- $x \mapsto \frac{x+1}{x^2-4}$, definiert auf $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Asymptoten: strichliert und erste Achse.
- $x \mapsto \frac{5x}{x^2+1}$, definiert auf ganz \mathbb{R} . Asymptote: erste Achse.

- mit $m = n$ im Unendlichen einer Konstante zustrebt (der Graph dieser konstanten Funktion, eine zur ersten Achse parallele Gerade, ist dann eine Asymptote des Graphen von f), und
- mit $m > n$ sich im Unendlichen ähnlich wie eine Potenzfunktion mit positivem Exponenten $m - n$ verhält (woraus als Spezialfall folgt, dass sie im Fall $m = n + 1$ einer linearen Funktion mit Änderungsrate $\neq 0$ zustrebt, deren Graph, eine Gerade mit Anstieg $\neq 0$, eine Asymptote des Graphen von f ist).

Ist der Quotient (2.7) vollständig gekürzt, so sind die Nullstellen des Nenners q die

Polstellen von f . Für jede solche Stelle x_0 ist die durch die Gleichung $x = x_0$ beschriebene Gerade eine („vertikale“) Asymptote des Graphen von f . Beispiele einiger Graphen von rationalen Funktionen sind in Abbildung 3 wiedergegeben.

- **Betragsfunktion:** Die Betragsfunktion ist definiert durch

$$x \mapsto |x|. \quad (2.8)$$

Ihr Graph besitzt im Ursprung einen Knick (Abbildung 4). Mehr über den Betrag im Skriptum *Absolutbetrag*.

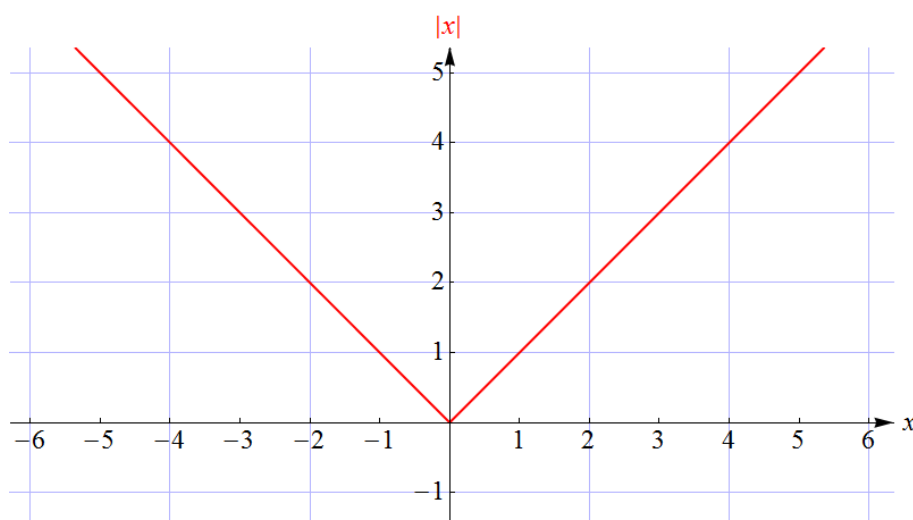


Abbildung 4: Graph der Betragsfunktion $x \mapsto |x|$.

- **Winkelfunktionen und ihre Inversen:** Winkelfunktionen und ihre Graphen sowie die inversen Winkelfunktionen wurden ausführlich im Skriptum *Winkelfunktionen und ihre Graphen* behandelt.

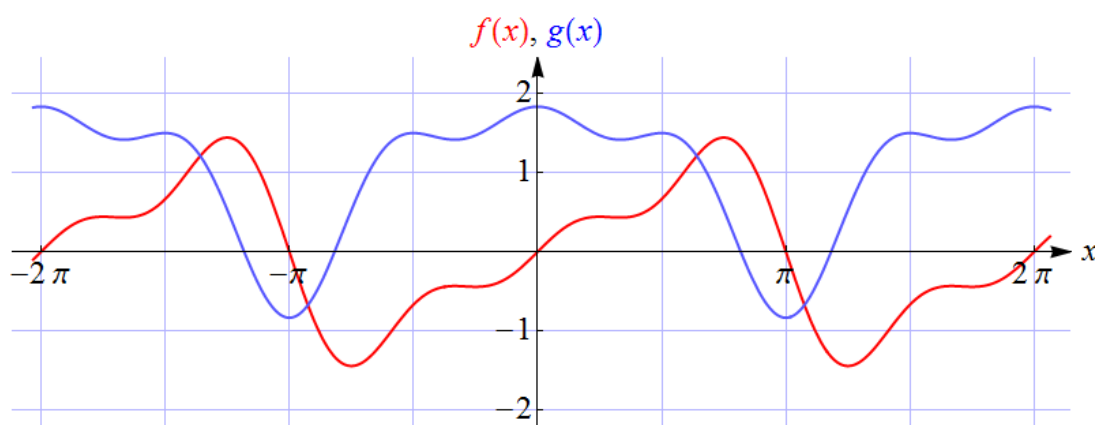


Abbildung 5: Die Graphen der durch $f(x) = \sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x)$ und $g(x) = 1 + \cos(x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{3}\cos(3x)$ auf ganz \mathbb{R} definierten trigonometrischen Polynome f und g . Beide sind periodisch mit Periode 2π .

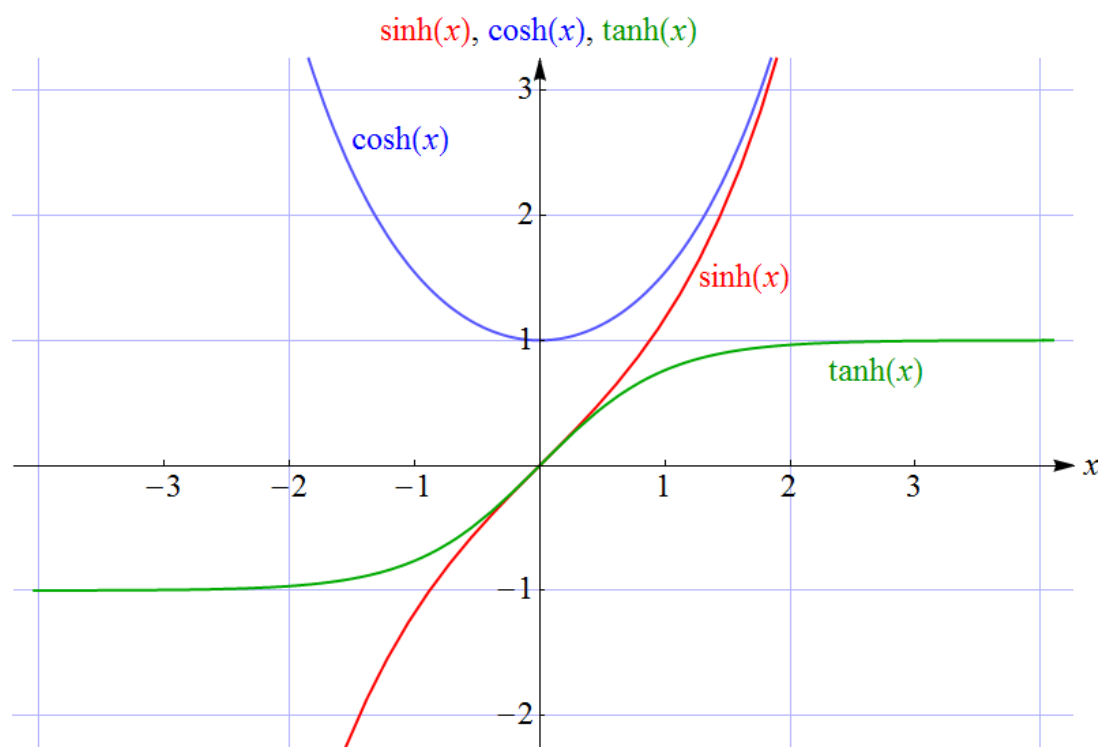


Abbildung 6: Die Graphen der in (2.10) – (2.12) definierten Hyperbelfunktionen. Der Graph von \cosh heißt auch *Kettenlinie*, da er die Form einer dünnen hängenden Kette beschreibt.

- **Trigonometrische Polynome:** Ein trigonometrisches Polynom ist eine Funktion vom Typ

$$x \mapsto c_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + \cdots + a_n \cos(nx) + b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + \cdots + b_n \sin(nx), \quad (2.9)$$

wobei $c_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ vorgegebene reelle Zahlen sind⁸. Eine Funktion dieses Typs ist periodisch mit Periode 2π . Stellen wir uns unter x eine Zeitvariable vor, so handelt es sich (vom konstanten Term c_0 abgesehen) um eine Summe (Überlagerung) von Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen. Ordnen wir den Termen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ die Grundfrequenz $\frac{1}{2\pi}$ zu⁹, so sind die Frequenzen der anderen Sinus- und Cosinusterme ganzzahlige Vielfache davon. Die Koeffizienten $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ geben an, mit welchen „Gewichten“ diese Schwingungen im trigonometrischen Polynom enthalten sind. Interessanterweise kann eine sehr große Klasse periodischer Funktionen (etwa solcher, die der Modellierung des zeitlichen Verlaufs akustischer oder elektrischer

⁸ Eine etwas allgemeinere Form, die ebenfalls als trigonometrisches Polynom bezeichnet wird, erhalten wir, indem im Funktionsterm x durch Cx für eine Konstante $C > 0$ ersetzt wird. Die Periode ist dann $\frac{2\pi}{C}$. Anstelle der Konstanten c_0 in (2.9) wird in der Literatur meist $\frac{a_0}{2}$ geschrieben. Den Grund dafür erfahren Sie, wenn Sie sich näher mit Fourierreihen beschäftigen.

⁹ Die Frequenz ist der Kehrwert der Periode (physikalisch ausgedrückt: der Periodendauer). Man möge hier darüber hinwegsehen, dass wir die dimensionslose Variable x als „Zeit“ ansehen. Physikalisch richtiger wäre es, x in der Form ωt zu schreiben, wobei ω die Kreisfrequenz, $\frac{\omega}{2\pi}$ die Frequenz und $\frac{2\pi}{\omega}$ die Periodendauer der Funktionen $t \mapsto \sin(\omega t)$ und $t \mapsto \cos(\omega t)$ sind.

Signale dienen) durch trigonometrische Polynome mit entsprechend hohem n beliebig genau angenähert werden. Zwei Beispiele von Graphen trigonometrischer Polynome sind in Abbildung 5 wiedergegeben.

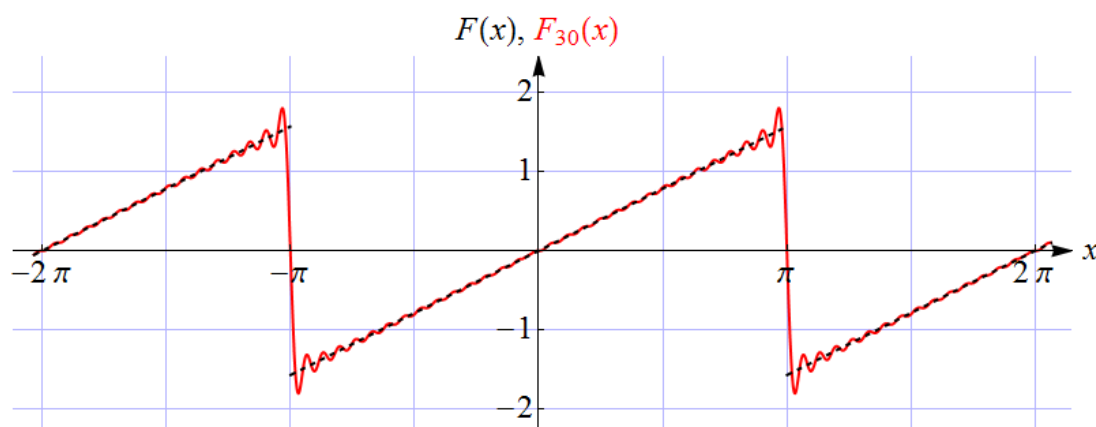


Abbildung 7: Strichliert ist der Graph der „Sägezahnfunktion“ (Kippschwingung) F dargestellt, die im Intervall $(-\pi, \pi)$ die Werte $F(x) = \frac{x}{2}$ annimmt und periodisch fortgesetzt ist. An den Werten $\dots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \dots$ ist sie unstetig – der Funktionswert an diesen Sprungstellen ist gleich 0. Diese Funktion kann durch die Fourierreihe (2.16) dargestellt werden. Wird die Reihe nach endlich vielen Termen abgebrochen, so ergibt sich eine Approximation der Sägezahnfunktion, die umso genauer ist, je mehr Terme beibehalten wurden. Die rote Kurve ist der Graph der Funktion $F_{30}(x) = \sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{4} \sin(4x) + \dots - \frac{1}{30} \sin(30x)$, also der Summe der ersten 30 Glieder der Fourierreihe.

- **Exponential- und Logarithmusfunktionen:** Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Graphen wurden ausführlich im gleichnamigen Skriptum behandelt.
- **Hyperbelfunktionen:** Die Hyperbelfunktionen (hyperbolische Funktionen) Sinus-Hyperbolicus, Cosinus-Hyperbolicus und Tangens-Hyperbolicus sind durch

$$\sinh(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \quad (2.10)$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \quad (2.11)$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad (2.12)$$

definiert. Ihre Namen rühren von einer gewissen formalen Ähnlichkeit mit den Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens her¹⁰. So gilt beispielsweise

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \quad (2.13)$$

¹⁰ Die Beziehung zwischen den Hyperbelfunktionen und den Winkelfunktionen wird erst dann voll verständlich, wenn der allgemeinere Zahlbegriff der komplexen Zahlen zugrunde gelegt wird. Falls Sie die komplexen Zahlen kennen, wird es Sie vielleicht überraschen, dass Sinus und Cosinus durch die Exponentialfunktion zur Basis e ausgedrückt werden können. Es gilt nämlich $\sin(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$ und $\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$, was an (2.10) und (2.11) erinnert.

in Analogie zur bekannten Identität $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ für die Winkelfunktionen. Die Graphen der drei Hyperbelfunktionen sind in Abbildung 6 wiedergegeben.

- **Durch Reihen dargestellte Funktionen:** Wir haben bereits erwähnt, dass viele Funktionen beliebig genau durch Polynome oder trigonometrische Polynome approximiert werden können. Das ist der Vielzahl von Koeffizienten zu verdanken, die gewissermaßen „Freiheitsgrade“ für die Modellierung darstellen. Man kann diese Summen zu „unendlichen Summen“ (Reihen) verallgemeinern, den Potenzreihen (Taylorreihen) und Fourierreihen. Ohne auf die Details, wie das bewerkstelligt wird, einzugehen, geben wir nur drei Beispiele an:

Beispiel 1 ist die Potenzreihe¹¹

$$x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad (2.14)$$

Für $|x| < 1$ stellt sie die Funktion $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ dar. Das ist etwa für näherungsweise Berechnungen sehr praktisch, denn für kleine $|x|$ folgt daraus

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x \quad \text{oder, etwas genauer:} \quad \frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 \quad (2.15)$$

oder, noch genauer, indem mehr Terme von (2.14) mitgenommen werden. Generell wird eine Funktion, die sich als Potenzreihe darstellen lässt, als analytisch bezeichnet. Analytische Funktionen sind jene, deren Funktionswerte auch unmittelbar Sinn machen, wenn für x komplexe Zahlen zugelassen werden.

Beispiel 2 ist die Fourierreihe

$$x \mapsto \sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{4} \sin(4x) + \frac{1}{5} \sin(5x) - \dots \quad (2.16)$$

Sie stellt eine „Sägezahnfunktion“ (Kippschwingung) dar (siehe Abbildung 7).

Potenz- und Fourierreihen können auch benutzt werden, um neue, in Anwendungen auftretende Funktionen, die sich nicht durch einfache Terme ausdrücken lassen, zu definieren oder näherungsweise zu berechnen. Beispiel 3 ist die durch die Potenzreihe¹²

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2 (1!)^2} + \frac{x^4}{2^4 (2!)^2} - \frac{x^6}{2^6 (3!)^2} + \frac{x^8}{2^8 (4!)^2} - \frac{x^{10}}{2^{10} (5!)^2} + \dots \quad (2.17)$$

dargestellte Funktion J_0 (eine sogenannte *Besselfunktion*), die im Zusammenhang mit frequenzmodulierten Signalen, der Ausbreitung von Wellen und den Schwingungen einer kreisförmigen Membran auftritt.

¹¹ Es handelt sich um die – Ihnen vielleicht bekannte – geometrische Reihe.

¹² Das Rufzeichen bedeutet *Faktorielle*, also $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ usw. Siehe das Skriptum *Der binomische Lehrsatz und die Binomialkoeffizienten*.

- **Stückweise termdefinierte Funktionen:** Um einen Vorgang zu modellieren, in dessen Verlauf sich das Verhalten einer Größe sprunghaft ändert (ein Thema, das in technischen Anwendungen immer wieder auftritt), können unterschiedliche Funktionsterme in aneinandergrenzenden Bereichen der Zahlengeraden verwendet werden. Ein Beispiel einer stückweise (oder abschnittsweise) termdefinierten Funktion ist

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ x & \text{falls } 0 \leq x < 1, \\ \frac{2}{x} & \text{falls } x \geq 1. \end{cases} \quad (2.18)$$

Diese Funktion ändert ihr Verhalten an der Stelle 0 (von „konstant 0“ auf „linear ansteigend“) und an der Stelle 1 (dort macht sie einen abrupten Sprung auf einen höheren Wert – an dieser Stelle ist die Funktion unstetig –, um in der Folge wieder abzufallen). Ihr Graph ist in Abbildung 8 wiedergegeben.

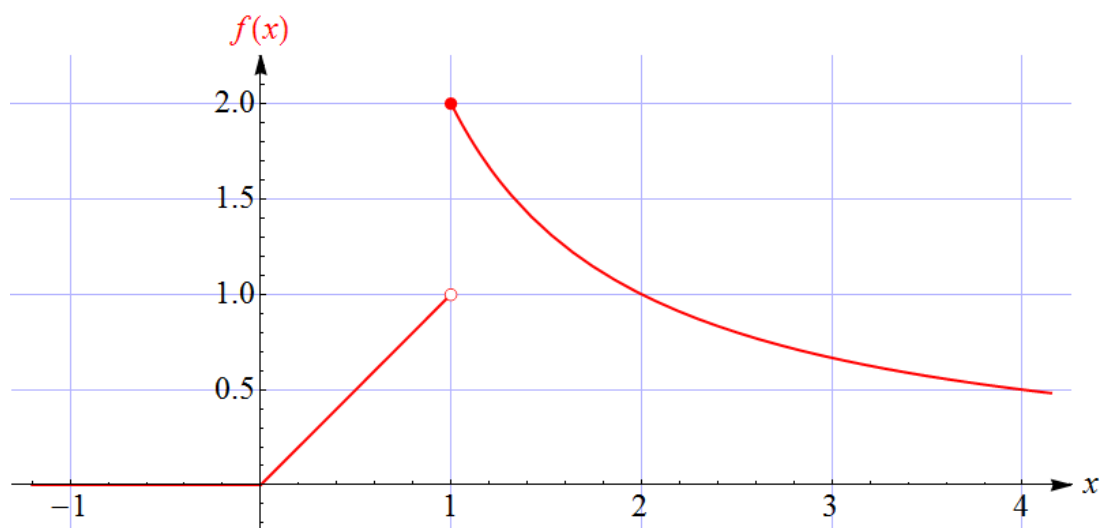


Abbildung 8: Der Graph der in (2.18) definierten Funktion, hier f genannt. Der volle Kreis zeigt an, dass der Funktionswert an der Stelle 1 gleich 2 ist.

- **Ergänzung – Funktionen in mehreren Variablen:** Wir haben bisher Funktionen in *einer* Variablen betrachtet. Um die Abhängigkeit einer Größe von *mehreren* anderen Größen zu modellieren, müssen Funktionen in mehreren Variablen benutzt werden. Das Prinzip ist das gleiche wie bei Funktionen in einer Variablen, nur hängt der Funktionswert nun nicht von einer einzigen Zahl (x) ab, sondern von mehreren Zahlen. Ein Beispiel einer Funktion in zwei Variablen ist

$$(x, y) \mapsto \frac{4xy}{x^2 + y^2 + 1}. \quad (2.19)$$

Das Argument ist nun ein *Paar* von Zahlen. Geben wir dieser Funktion den Namen f , so schreiben wir den Funktionswert, der einem gegebenen Paar (x, y) zugeordnet wird,

als $f(x, y)$. Anstelle von (2.19) können wir dann auch schreiben

$$f(x, y) = \frac{4xy}{x^2 + y^2 + 1}. \quad (2.20)$$

Der Graph einer Funktion f in zwei Variablen (wir nehmen der Einfachheit halber an, dass sie für beliebige reelle Werte von x und y definiert ist) kann als Teilmenge

$$\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \quad (2.21)$$

des \mathbb{R}^3 dargestellt werden, indem also zu jedem Paar (x, y) , das einen Punkt in der xy -Ebene darstellt, der zugehörige Funktionswert $f(x, y)$ vertikal aufgetragen wird (siehe Abbildung 9).

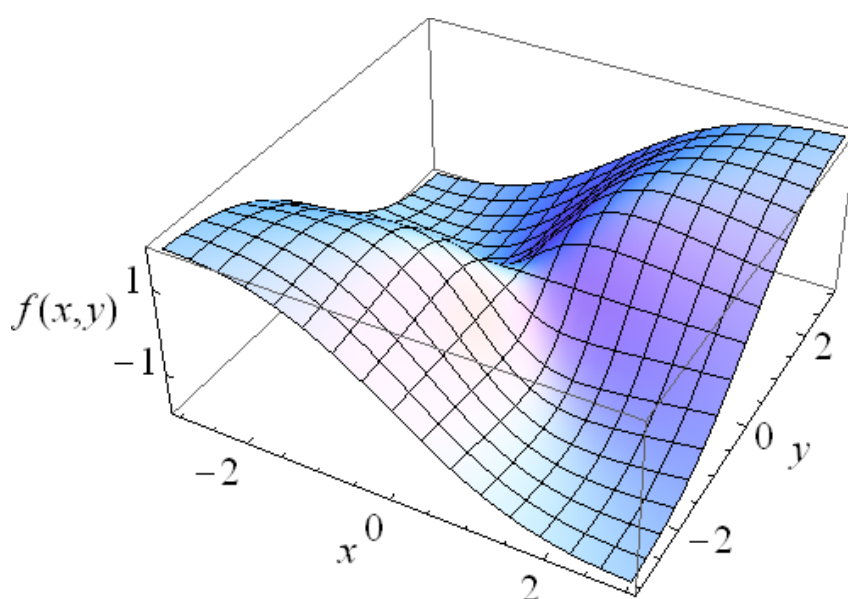


Abbildung 9: Der Graph der in (2.19) bzw. (2.20) definierten Funktion in zwei Variablen.

3 Operationen mit Funktionen

Ein in den früheren Skripten vernachlässigtes Thema betrifft Operationen mit Funktionen. Sie können dazu verwendet werden, aus den bisher aufgelisteten Funktionen neue Funktionstypen zu erzeugen.

- **Punktweise Anwendung der Grundrechnungsarten auf Funktionen:** Die Grundrechnungsarten, die ja zunächst für Zahlen definiert sind, können auf Funktionen ausgedehnt werden. Wir nennen die entsprechenden Operationen *punktweise*, weil sie an jeder Stelle (an jedem *Punkt*) durchgeführt werden. Sind f und g Funktionen gleicher Definitionsmenge A , so sind die ebenfalls auf A definierten Funktionen $f + g$ (die Summe der beiden Funktionen), $f - g$ (ihre Differenz) und $f g$ (ihr Produkt) definiert durch

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (3.1)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad (3.2)$$

$$(f g)(x) = f(x) g(x). \quad (3.3)$$

Ist zusätzlich $g(x) \neq 0$ für alle $x \in A$, so ist der Quotient $\frac{f}{g}$ definiert durch

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}. \quad (3.4)$$

Ist f eine Funktion und c eine reelle Zahl, so ist die Funktion cf (das c -fache von f) definiert durch

$$(cf)(x) = cf(x). \quad (3.5)$$

Sind etwa f und g Polynomfunktionen (ohne gemeinsame Nullstelle und mit entsprechend eingeschränkter Definitionsmenge), so ist $\frac{f}{g}$ eine rationale Funktion. Es können auch beliebige Kombinationen dieser Operationen ausgeführt werden, wie etwa

$$\left(3f - 4\frac{f^2}{g}\right)(x) = 3f(x) - 4\frac{f(x)^2}{g(x)}. \quad (3.6)$$

- **Verkettung von Funktionen:** Sind f und g Funktionen, so können wir versuchen, sie *hintereinander* anzuwenden: Wir nehmen ein x , wenden die Funktion g an, um $g(x)$ zu bekommen, und wenden danach auf das Ergebnis die Funktion f an, um $f(g(x))$ zu bekommen. Diese Vorgangsweise können wir schematisch so darstellen:

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x)). \quad (3.7)$$

Das funktioniert natürlich nur dann, wenn x in der Definitionsmenge von g und $g(x)$ in der Definitionsmenge von f liegt. Ist das für alle Elemente x einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ der Fall, so ist damit eine Funktion $A \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, die wir die Verkettung von f mit g nennen und für die die Schreibweise $f \circ g$ verwendet wird:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)). \quad (3.8)$$

Beachten Sie, dass die Lese-Reihenfolge nicht der Reihenfolge der Funktionsanwendung entspricht! Wir lesen „ f verkettet mit g “ oder „ f von g von x “, aber die zugrundeliegende mathematische Vorgangsweise besteht darin, zuerst g und erst danach f anzuwenden.

Verkettungen werden in der Praxis durch simples Einsetzen berechnet. Ist beispielsweise

$$f(x) = x^2 + 3 \quad (3.9)$$

und

$$g(x) = \sin(x), \quad (3.10)$$

so ist

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin(x)) = \sin^2(x) + 3. \quad (3.11)$$

Beachten Sie, dass $f(g(x))$ hier „von innen“ her (also beginnend mit dem Einsetzen von $g(x)$) berechnet wurde. Man könnte genauso gut so vorgehen:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2 + 3 = \sin^2(x) + 3. \quad (3.12)$$

Im allgemeinen ist $f \circ g$ nicht dasselbe wie $g \circ f$. Mit (3.9) und (3.10) ist

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 3) = \sin(x^2 + 3), \quad (3.13)$$

was *nicht* gleich $\sin^2(x) + 3$ ist.

Auch Verkettungen von mehr als zwei Funktionen sind möglich. So kann die in der Thermodynamik auftretende, durch

$$F(x) = \frac{1}{e^{1/x} - 1} \quad (3.14)$$

definierte Funktion F als Verkettung $f \circ g \circ h$ mit $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = e^x$ und $h(x) = \frac{1}{x}$ angesehen werden.

- **Umkehrfunktionen:** Hat eine auf der Menge A definierte Funktion die Eigenschaft, dass jeder Funktionswert nur *einmal* auftritt (wir nennen sie dann *injektiv*), und wird die Menge aller Funktionswerte (die Bildmenge) als B bezeichnet, so kann diese Funktion als Abbildung $f : A \rightarrow B$ angesehen werden, wobei nicht nur jedem $x \in A$ ein $y = f(x) \in B$ zugeordnet wird, sondern auch umgekehrt zu jedem Element $y \in B$ genau ein $x \in A$ existiert, für das $f(x) = y$ gilt. Die Zuordnung $x \mapsto y$ gibt die Wirkung von f an. Die umgekehrte Zuordnung $y \mapsto x$ heißt Umkehrfunktion (oder inverse Funktion) von f . Sie wird mit dem Symbol f^{-1} bezeichnet¹³, also $f^{-1} : B \rightarrow A$. Es gilt dann stets

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in A \quad (3.15)$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{für alle } y \in B. \quad (3.16)$$

Rechnerisch wird die Umkehrfunktion ermittelt, indem die Gleichung $f(x) = y$ nach $x \in A$ gelöst wird.

Hier ein Beispiel: Wir bezeichnen mit \mathbb{R}^- die Menge der negativen reellen Zahlen. Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^-$ definiert durch $f(x) = -\frac{1}{3}x^2$. Da die Gleichung $-\frac{1}{3}x^2 = y$ für jedes negative y genau eine positive Lösung x besitzt, nämlich $x = \sqrt{-3y}$, ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$ durch $f^{-1}(y) = \sqrt{-3y}$ gegeben. Möchte man als Variablennamen x verwenden, so kann man das natürlich auch in der Form $f^{-1}(x) = \sqrt{-3x}$ anschreiben.

Werden die Graphen einer Funktion f und ihrer Umkehrfunktion f^{-1} in das gleiche Diagramm eingezeichnet (wobei die unabhängige Variable in beiden Fällen auf der ersten Achse lebt), so geht der Graph von f^{-1} aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der ersten Mediane (d.h. der Geraden durch den Ursprung mit Anstieg 1) hervor.

¹³ Achtung: f^{-1} ist nicht mit $\frac{1}{f}$ zu verwechseln!

Besitzt eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ nicht die geforderte Eigenschaft der Injektivität, so lässt sich diese oft dadurch erzielen, dass die Definitionsmenge in geeigneter Weise eingeschränkt wird, d.h. dass anstelle von f eine auf einer Teilmenge A' von A definierte Funktion betrachtet wird, die auf A' mit f übereinstimmt und injektiv ist. Auf diese Weise werden etwa die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen definiert (wie im Skriptum *Winkelfunktionen und ihre Graphen* genauer beschrieben).

Umkehrfunktionen können mit Hilfe der Verkettung beschrieben werden: Bezeichnen wir mit id_M die auf der Menge M definierte identische Funktion, d.h. $\text{id}_M(x) = x$ für alle $x \in M$, so können die Beziehungen (3.15) und (3.16) auch in der Form

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_A \quad (3.17)$$

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_B \quad (3.18)$$

geschrieben werden.

4 Eigenschaften von Funktionen und ihren Graphen

Dieser letzte Abschnitt soll Ihnen dazu dienen, sich über Begriffe, die Eigenschaften von Funktionen und Graphen beschreiben, zu orientieren (bzw. die entsprechenden Stellen später, wenn Sie sie benötigen, nachzulesen).

Einige dieser Eigenschaften wurden bereits in früheren Skripten besprochen. Wir stellen sie hier noch einmal zusammen und runden das Bild mit ein paar zusätzlichen Begriffen ab. Dabei beschränken wir uns auf Eigenschaften, die *ohne Differentialrechnung* formuliert werden können, und betrachten *reelle* Funktionen, d.h. Funktionen vom Typ $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, wobei A eine Teilmenge von \mathbb{R} ist (in der Regel ganz \mathbb{R} oder ein Intervall, eventuell unter Ausschluss einzelner Stellen). Anstelle der Angabe „ $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ “ sagen wir auch „eine auf A definierte Funktion f “.

Die folgenden Begriffe sind mathematisch einigermaßen präzise beschrieben – auf jeden Fall genau genug für die meisten Funktionen, die in technischen Anwendungen auftreten.

An mehreren Stellen wird von Intervallen gesprochen¹⁴. Wir meinen damit in allen Fällen Intervalle, die nicht nur einen einzigen Punkt enthalten¹⁵. Dabei sind folgende zwei Tatsachen wichtig: Liegt x in einem *offenen* Intervall (das durchaus sehr klein sein kann), so reicht die Menge aller Zahlen, die außerhalb des Intervalls liegen, nicht beliebig nahe an x heran. Liegt x in einem *abgeschlossenen* Intervall (das ebenfalls sehr klein sein kann), so kann die Menge aller Zahlen, die außerhalb des Intervalls liegen, beliebig nahe an x heranreichen (nämlich dann, wenn x ein Randpunkt ist).

¹⁴ Siehe dazu das Skriptum *Die Ordnung der reellen Zahlen*.

¹⁵ Mit anderen Worten: Wir schließen den Fall eines abgeschlossenen Intervalls der Form $[a, a]$ aus.

- **Nullstellen:** Ist $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so nennen wir ein $x_0 \in A$ eine Nullstelle von f , wenn $f(x_0) = 0$ gilt. In der grafischen Darstellung entspricht ihr der Punkt $(x_0, 0)$, der sowohl auf dem Graphen von f als auch auf der ersten Achse liegt.
 - Beispiel: Die durch $f(x) = x^2 - 4$ auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion f besitzt zwei Nullstellen, nämlich -2 und 2 .
- **Globale Extremstellen:** Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x_0 \in A$.
 - ☐ Wir nennen x_0 eine globale Maximumstelle von f , wenn $f(x_0)$ von keinem Funktionswert überschritten wird, d.h. wenn $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in A$. Man sagt dann, dass f an der Stelle x_0 ein globales Maximum besitzt.
 - ☐ Wir nennen x_0 eine globale Minimumstelle von f , wenn $f(x_0)$ von keinem Funktionswert unterschritten wird, d.h. wenn $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in A$. Man sagt dann, dass f an der Stelle x_0 ein globales Minimum besitzt.
 - Beispiel: Die durch $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion f besitzt an der Stelle 0 ein globales Maximum. Sie besitzt aber kein globales Minimum. (Sehen Sie sich ihren Graphen an!)

Eine Funktion kann *mehrere* (sogar unendlich viele) globale Maxima und Minima haben. Alle globalen Maxima besitzen dann den gleichen (maximalen) Funktionswert, und alle globalen Minima besitzen den gleichen (minimalen) Funktionswert.

- So ist beispielsweise jedes geradzahlige Vielfache von π (also $\dots, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots$) eine globale Maximumstelle der Cosinusfunktion und jedes ungeradzahlige Vielfache von π (also $\dots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \dots$) eine globale Minimumstelle der Cosinusfunktion. (Wenn Sie sich nicht genau genug an die Cosinusfunktion erinnern, sehen Sie sich ihren Graphen an!)
- **Lokale Extremstellen:** Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x_0 \in A$.
 - ☐ Wir nennen x_0 eine lokale Maximumstelle von f , wenn es ein offenes Intervall I gibt mit $x_0 \in I \subseteq A$, in dem $f(x_0)$ von keinem Funktionswert überschritten wird. Man sagt in diesem Fall, dass f an der Stelle x_0 ein lokales (oder relatives) Maximum besitzt. Der Punkt $(x_0, f(x_0))$ auf dem Graphen von f heißt dann Hochpunkt.
 - ☐ Wir nennen x_0 eine lokale Minimumstelle von f , wenn es ein offenes Intervall I gibt mit $x_0 \in I \subseteq A$, in dem $f(x_0)$ von keinem Funktionswert unterschritten wird. Man sagt in diesem Fall, dass f an der Stelle x_0 ein lokales (oder relatives) Minimum besitzt. Der Punkt $(x_0, f(x_0))$ auf dem Graphen von f heißt dann Tiefpunkt.

Jedes globale Extremum ist ein lokales Extremum (aber nicht umgekehrt).

- Beispiel: Die durch $f(x) = (x^2 - 1)^2$ auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion f besitzt an den Stellen -1 und 1 lokale Minima, die gleichzeitig globale Minima sind. An der Stelle 0 besitzt sie ein lokales Maximum, das *kein* globales Maximum ist. (Sehen Sie sich ihren Graphen an!)

- **Positivität:** Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- ☐ Wir nennen f eine positive Funktion, wenn $f(x) > 0$ für alle $x \in A$.
- ☐ Wir nennen f eine nicht-negative Funktion, wenn $f(x) \geq 0$ für alle $x \in A$.
- ☐ Wir nennen f eine negative Funktion, wenn $f(x) < 0$ für alle $x \in A$.

Der Graph einer positiven (negativen) Funktion liegt oberhalb (unterhalb) der ersten Achse. Diese Eigenschaften können sinngemäß auf Teilbereiche von A eingeschränkt werden.

- Beispiel: Die durch $f(x) = x^2 - 4$ auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion f ist in den Intervallen $(-\infty, -2)$ und $(2, \infty)$ positiv und im Intervall $(-2, 2)$ negativ. In den Intervallen $(-\infty, -2]$ und $[2, \infty)$ ist sie nicht-negativ.

- **Monotonie:** Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- ☐ f heißt monoton wachsend (oder monoton steigend), wenn für beliebige $x_1, x_2 \in A$ gilt: Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- ☐ f heißt streng monoton wachsend (oder streng monoton steigend), wenn für beliebige $x_1, x_2 \in A$ gilt: Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$.
- ☐ f heißt monoton fallend, wenn für beliebige $x_1, x_2 \in A$ gilt: Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- ☐ f heißt streng monoton fallend, wenn für beliebige $x_1, x_2 \in A$ gilt: Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$.

Eine streng monotone Funktion ist (sofern ihre Zielmenge auf die Bildmenge eingeschränkt wird) umkehrbar (injektiv), d.h. sie besitzt eine Umkehrfunktion.

Der Graph einer streng monoton wachsenden (fallenden) Funktion steigt mit zunehmendem Argument an (fällt mit zunehmendem Argument ab). Diese Eigenschaften können sinngemäß auf Teilbereiche von A eingeschränkt werden.

- Beispiel: Die durch $f(x) = x^2$ auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion f ist im Intervall $(-\infty, 0]$ (streng) monoton fallend und im Intervall $[0, \infty)$ (streng) monoton wachsend.

- **Beschränktheit und Schranken:** Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- ☐ f heißt nach unten beschränkt, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x) \geq c$ für alle $x \in A$. Jedes derartige c heißt untere Schranke von f .
- ☐ f heißt nach oben beschränkt, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x) \leq C$ für alle $x \in A$. Jedes derartige C heißt obere Schranke von f .
- ☐ Eine Funktion heißt beschränkt, wenn sie nach unten und nach oben beschränkt ist.

Der Graph einer nach unten (oben) beschränkten Funktion liegt oberhalb (unterhalb) einer zur ersten Achse parallelen Geraden. Ist eine Funktion nach unten (oben) beschränkt, so besitzt sie eine größte untere (kleinste obere) Schranke.

- Beispiel: Für die durch $f(x) = x^2 - 1$ auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion f ist jede reelle Zahl ≤ -1 eine untere Schranke (die *größte* untere Schranke ist demnach -1), während sie keine obere Schranke besitzt. f ist also nach unten beschränkt, nicht aber nach oben.
- Beispiel: Hingegen ist die durch $g(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion g beschränkt. Ihre größte untere Schranke ist 0, ihre kleinste obere Schranke ist $\frac{1}{4}$. Es gilt also $0 \leq g(x) \leq \frac{1}{4}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (Sehen Sie sich den Graphen von g an!)
- **Gerade/ungerade**¹⁶: Eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, von der wir annehmen, dass ihre Definitionsmenge A symmetrisch zum Nullpunkt liegt (d.h. für jedes $x \in A$ soll auch $-x \in A$ gelten), heißt gerade, wenn

$$f(-x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in A, \quad (4.1)$$

und ungerade, wenn

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{für alle } x \in A. \quad (4.2)$$

Der Graph einer geraden Funktion liegt symmetrisch zur zweiten Achse. Der Graph einer ungeraden Funktion geht nach einer Punktspiegelung am Ursprung (oder, was dasselbe ist, nach einer Drehung um den Ursprung um 180°) in sich selbst über. Ist eine ungerade Funktion an der Stelle 0 definiert, so ist ihr Funktionswert dort gleich 0.

Nicht jede Funktion mit bezüglich 0 symmetrischer Definitionsmenge ist gerade oder ungerade, aber jede derartige Funktion F kann eindeutig als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion dargestellt werden: $F = F_{\text{gerade}} + F_{\text{ungerade}}$, wobei

$$F_{\text{gerade}}(x) = \frac{1}{2} (F(x) + F(-x)) \quad (4.3)$$

$$F_{\text{ungerade}}(x) = \frac{1}{2} (F(x) - F(-x)) . \quad (4.4)$$

- Beispiele: Die Cosinusfunktion ist gerade, die Sinus- und die Tangensfunktion sind ungerade.
- Beispiel: Die durch $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ definierte Funktion f ist gerade.
- Beispiel: Die durch $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion g ist ungerade.
- Beispiel: Die durch $h(x) = x^2 + x$ auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion h ist weder gerade noch ungerade.

¹⁶ Das Hauptwort, das die Gerade-ungerade-Eigenschaft bezeichnet, lautet *Parität*. Manchmal finden Sie dafür auch den Ausdruck *Symmetrie*.

- **Periodizität:** Wir nennen eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ periodisch mit Periode $L > 0$, wenn¹⁷ $f(x + L) = f(x)$ für alle $x \in A$. Um die Periodizität einer Funktion zu charakterisieren, wird meist die *kleinste* Periode angegeben¹⁸. Stellt x die Zeit dar, so wird die kleinste Periode auch Periodendauer genannt.

Der Graph einer periodischen Funktion „wiederholt sich“ immer wieder in Abständen der Periode.

- Beispiele: Die Sinus- und die Cosinusfunktion sind periodisch mit (kleinster) Periode 2π .
- Beispiel: Die Tangensfunktion ist periodisch mit (kleinster) Periode π . Sie ist an allen Stellen der Form $\frac{\pi}{2} + n\pi$ für $n \in \mathbb{Z}$ nicht definiert. Auch diese Stellen liegen im Abstand π , fügen sich also in das periodische Muster ein. (Wenn Sie sich nicht genau genug an die Tangensfunktion erinnern, sehen Sie sich ihren Graphen an!)
- **Stetigkeit:** Der genaue Begriff der Stetigkeit ist ein bisschen schwierig zu fassen, weshalb wir hier nur eine intuitive Formulierung angeben. Wir nennen eine Funktion stetig, wenn eine *kleine* Änderung des Arguments nur eine *kleine* Änderung des Funktionswerts bewirkt. Geometrisch bedeutet das, dass man den Graphen einer stetigen Funktion (gedanklich) in einem Zug zeichnen kann, ohne abzusetzen¹⁹.

- Beispiel: Die durch $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion f ist an der Stelle 0 unstetig, da sie dort eine *Sprungstelle* besitzt. In den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $[0, \infty)$ ist sie stetig.

- **Singularitäten:** Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Eine Singularität von f ist eine Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, an der f nicht definiert ist, für die aber ein Intervall I existiert mit $x_0 \in I$, innerhalb dessen f an allen Stellen $x \neq x_0$ definiert ist²⁰. Dann ist also f nicht an der Stelle x_0 definiert, wohl aber in einem zusammenhängenden Bereich, der (entweder beidseitig oder einseitig) beliebig nahe an x_0 heranreicht. Es gibt verschiedene Arten von Singularitäten, deren wichtigste Typen die folgenden sind:

- x_0 heißt (stetig) hebbare Definitionslücke, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass die auf $A \cup \{x_0\}$ definierte Funktion $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A \\ c & \text{falls } x = x_0 \end{cases}$ an der Stelle x_0 stetig ist. Wir nennen \tilde{f} die (stetige) Erweiterung von f und schreiben

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c, \quad (4.5)$$

¹⁷ Genau genommen muss man zusätzlich verlangen, dass für jedes $x \in A$ auch $x - L \in A$ und $x + L \in A$ gilt.

¹⁸ Alle periodischen Funktionen, die in technischen Anwendungen auftreten – außer der konstanten Funktion, für die *jedes* positive L eine Periode ist –, besitzen eine kleinste Periode.

¹⁹ Es gibt Funktionen, bei denen es Schwierigkeiten macht, dieses intuitive Bild anzuwenden. Sie treten aber in technischen Anwendungen so gut wie nie auf.

²⁰ Formal ausgedrückt: Es muss gelten $x_0 \notin A$ und $I \setminus \{x_0\} \subseteq A$.

um anzudeuten, dass $f(x)$ gegen c strebt, wenn x gegen x_0 strebt²¹.

- x_0 heißt Polstelle (kurz Pol) der Ordnung n ($n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$), wenn f in der Form

$$f(x) = \frac{u(x)}{(x - x_0)^n} \quad (4.6)$$

dargestellt werden kann, wobei die auf A definierte Funktion u an der Stelle x_0 stetig und von 0 verschieden ist oder an der Stelle x_0 eine hebbare Definitionslücke besitzt und ihre stetige Erweiterung \tilde{u} an der Stelle x_0 von 0 verschieden ist. Für Stellen x , die sehr nahe bei x_0 liegen, kann f daher in der Form

$$f(x) \approx \frac{c}{(x - x_0)^n} \quad (4.7)$$

approximiert werden, wobei $c = u(x_0) \neq 0$ bzw. $c = \tilde{u}(x_0) \neq 0$ ist. Das zeigt, dass ein Pol eine „Unendlichkeitsstelle“ ist. Die Ordnung n einer Polstelle ist ein Maß dafür, „wie schnell“ $|f(x)|$ bei Annäherung $x \rightarrow x_0$ „gegen Unendlich geht“.

Generell ist jede „Unendlichkeitsstelle“ eine Singularität, auch wenn sie keine Polstelle ist.

- Beispiel: Die durch $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion f besitzt an der Stelle 0 eine hebbare Definitionslücke. Für die stetige Erweiterung \tilde{f} gilt $\tilde{f}(0) = 1$. Mit anderen Worten: Es gilt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.
- Beispiel: Die durch $g(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ definierte Funktion g besitzt an der Stelle 1 einen Pol der Ordnung 2 (oder: einen Pol zweiter Ordnung).
- Beispiel: Die durch $h(x) = \frac{4x}{(x+3)^2(x-2)}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$ definierte Funktion h besitzt an der Stelle -3 einen Pol zweiter Ordnung und an der Stelle 2 einen Pol erster Ordnung. In der Nähe der Stelle -3 kann sie durch $h(x) \approx \frac{12}{5(x+3)^2}$ approximiert werden, denn dort ist $\frac{4x}{x-2} \approx \frac{12}{5}$. In der Nähe der Stelle 2 kann sie durch $h(x) \approx \frac{8}{25(x-2)}$ approximiert werden, denn dort ist $\frac{4x}{(x+3)^2} \approx \frac{8}{25}$.
- Beispiel: Die durch $s(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ auf \mathbb{R}^+ definierte Funktion s besitzt an der Stelle 0 eine Singularität (die allerdings kein Pol ist).

²¹ Um anzudeuten, dass das nur für eine Annäherung an x_0 von links bzw. rechts der Fall ist, kann auch die Schreibweise $\lim_{x \uparrow x_0}$ bzw. $\lim_{x \downarrow x_0}$ verwendet werden.

- Beispiel: Die durch $w(x) = e^{-1/x}$ auf \mathbb{R}^* definierte Funktion w besitzt an der Stelle 0 eine Singularität (die ebenfalls kein Pol ist – sie wird „wesentliche Singularität“ genannt).
- **Asymptoten:** Eine Asymptote einer reellen Funktion f ist, bildlich gesprochen, eine Gerade, der der Graph von f „beliebig nahe kommt“ (an die er sich „asymptotisch“ annähert). Es gibt zwei Arten von Asymptoten:
 - Ist f von der Form $f(x) = kx + d + v(x)$, wobei $v(x)$ für $x \rightarrow \infty$ oder für $x \rightarrow -\infty$ gegen 0 strebt, so ist der Graph der durch $\ell(x) = kx + d$ definierten linearen Funktion ℓ (eine Gerade mit Anstieg k) eine Asymptote von f .
 - Ist x_0 eine Unendlichkeitsstelle (z.B. ein Pol) von f , so ist die („vertikale“) Gerade, die aus allen Punkten der Form (x_0, y) besteht (d.h. die durch die Gleichung $x = x_0$ beschriebene Gerade), eine Asymptote von f . Eine Asymptote dieser Art ist nicht der Graph einer Funktion.
- Beispiel: Die durch $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion besitzt die beiden Koordinatenachsen als Asymptoten.
- Beispiel: Die durch $g(x) = \frac{2x^2 + 5}{x - 3}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ definierte Funktion besitzt den Graphen der durch $\ell(x) = 2x + 6$ definierten linearen Funktion ℓ und die durch die Gleichung $x = 3$ beschriebene („vertikale“) Gerade als Asymptoten. (Sehen Sie sich die Graphen von g und ℓ an!)
- Beispiel: Die durch $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + x$ auf \mathbb{R}^+ definierte Funktion besitzt die zweite Achse sowie den Graphen der durch $\ell(x) = x$ definierten linearen Funktion ℓ als Asymptoten. (Sehen Sie sich die Graphen von h und ℓ an!)

Der Begriff der Asymptote kann verallgemeinert werden: Nähern sich die Werte einer reellen Funktion f für $x \rightarrow \infty$ oder $x \rightarrow -\infty$ jenen einer Funktion g im Sinne von $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0$ oder $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ („asymptotisch“) an, so wird der Graph von g eine asymptotische Linie für f genannt.

- **Konvex/konkav:** Eine auf einem Intervall A definierte reelle Funktion f
 - heißt konvex, wenn jede Verbindungsstrecke zweier Punkte des Graphen von f nirgends unterhalb des Graphen liegt. Der Graph wird dann auch „nach oben offen“ genannt. Manchmal wird er auch als „linksgekrümmt“ bezeichnet²².

²² In der Regel behält man sich diesen Ausdruck aber für Funktionen vor, die „zweimal stetig differenzierbar“ sind – eine Eigenschaft, die – ebenso wie der Begriff der „Krümmung“ – auf die Differentialrechnung verweist, die wir hier ausgespart haben.

- heißt konkav, wenn jede Verbindungsstrecke zweier Punkte des Graphen von f nirgends oberhalb des Graphen liegt. Der Graph wird dann auch „nach unten offen“ genannt. Manchmal wird er auch als „rechtsgekrümmt“ bezeichnet²³.

Bisweilen findet sich in der Literatur die Formulierung, eine Funktion f sei konvex (konkav), wenn jede Verbindungsstrecke zweier Punkte ihres Graphen oberhalb (unterhalb) des Graphen liegt. Das ist nicht ganz präzise, da die Endpunkte einer solchen Verbindungsstrecke weder unterhalb noch oberhalb des Graphen liegen, sondern genau auf ihm.

Diese Eigenschaften können sinngemäß auf Teilbereiche von A eingeschränkt werden.

- Beispiel: Die durch $f(x) = x^2$ auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion f ist konvex.
- Beispiel: Die durch $g(x) = -x^2$ auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion g ist konkav.
- Beispiel: Die durch $h(x) = x^3$ auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion h ist im Intervall $(-\infty, 0]$ konkav und im Intervall $[0, \infty)$ konvex.

- **Algebraisch/transzendent:** Eine Funktion f heißt algebraisch, wenn $f(x)$ eine („algebraische“) Gleichung der Form

$$p(f(x)) = 0 \quad (4.8)$$

erfüllt, wobei p ein Polynom ist, dessen Koeffizienten Polynome in x sind²⁴. Insbesondere sind Polynome und Wurzelfunktionen sowie alle Funktionen, die durch (punktweise) Anwendung der Grundrechnungsarten aus ihnen gewonnen werden können, algebraisch. Es gibt auch algebraische Funktionen, die nicht durch einen „geschlossenen“ Funktions-term dargestellt werden können (nämlich dann, wenn die algebraische Gleichung, der eine solche Funktion genügt, keine „Lösungsformel“ besitzt). Eine Funktion, die nicht algebraisch ist, heißt transzendent.

- Beispiel: Die durch $f(x) = \frac{x^3 - \sqrt{x^4 + 7x^2 + 5}}{(x + \sqrt[3]{x^2 + 3})^5 + 4}$ auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion f ist algebraisch.
- Beispiel: Die Lösungen $g(x)$ der Gleichung

$$g(x)^5 + x g(x) = 1 \quad (4.9)$$

stellen algebraische Funktionen dar (die allerdings nicht durch einen geschlossenen Funktionsterm ausgedrückt werden können).

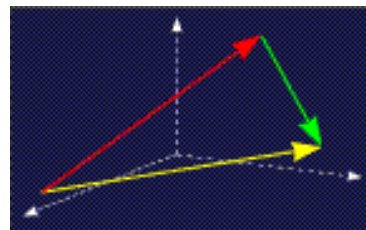
- Beispiele: Sinus, Cosinus, Tangens sowie die Exponential- und Logarithmusfunktionen sind transzendent.

²³ Hier gilt ebenfalls das in Fußnote 22 Gesagte.

²⁴ Was mit (4.8) gemeint ist, wird oft – genauer – in der Form $P(x, f(x)) = 0$ geschrieben, wobei P ein Polynom in zwei Variablen ist.

Die Unterscheidung in algebraische und transzendente Funktionen ist zwar in der Praxis technischer Anwendungen nicht wichtig, aber für den Fall, dass Sie (etwa in einem Text über Ingenieurmathematik) lesen, die Winkel- und Exponentialfunktionen seien transzendente Funktionen, wissen Sie nun, was das bedeutet.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Juni 2015 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.



Differenzieren – kurz und bündig

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

Dieses Skriptum gibt eine kompakte Einführung in die Differentialrechnung, einem wesentlichen Teilgebiet der Analysis.

1 Die Ableitung

Einer der zentralen Begriffe bei der Diskussion linearer Funktionen¹ war jener der *Änderungsrate*, genauer: der *mittleren* oder *durchschnittlichen* Änderungsrate oder *Änderungsrate in einem Intervall*: Ist f eine lineare Funktion und wird der Funktionswert $f(x_0)$ an einer Stelle x_0 mit dem Funktionswert $f(x_0 + \Delta x)$ an der Stelle $x_0 + \Delta x$ verglichen (wir haben damals $\Delta x > 0$ vorausgesetzt, sodass von x_0 aus ein Stück Δx „vorgerückt“ wird), so drückt die Änderungsrate von f die Änderung des Funktionswerts Δf „pro vorgerückter Strecke Δx “ aus:

$$\text{Änderungsrate von } f \text{ im Intervall } [x_0, x_0 + \Delta x] = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1.1)$$

Sie hängt nicht von der konkreten Wahl der Stelle x_0 und der Strecke Δx , um die vorgerückt wird, ab, gilt also generell für die (lineare) Funktion als Ganzes. Der Graph von f ist eine Gerade, deren Anstieg gleich der Änderungsrate ist.

In (1.1) können wir ohne weiteres auch $\Delta x < 0$ zulassen, was bedeutet, von x_0 aus ein Stück nach links zu gehen und die entsprechende Änderung Δf des Funktionswerts auf die Änderung Δx der unabhängigen Variable zu beziehen. Das Ergebnis ändert sich dadurch nicht.

¹ Siehe das Skriptum *Lineare Funktionen und ihre Graphen*.

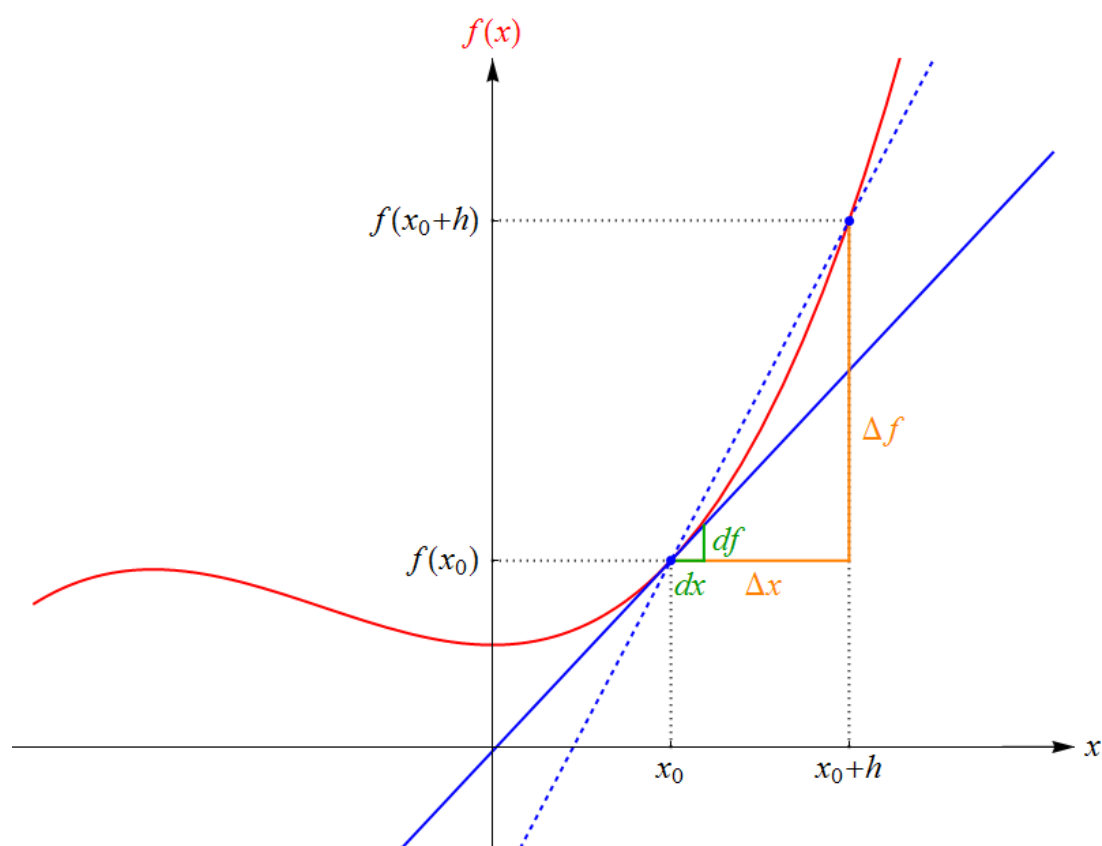


Abbildung 1: Zur Definition der Ableitung: Die mittlere Änderungsrate (1.4) der Funktion f beim Übergang von x_0 zu $x_0 + h$ (der Differenzenquotient) ist gleich dem Anstieg $\Delta f / \Delta x$ der (strichliert eingezeichneten) Sekante. Im Grenzübergang $h \rightarrow 0$ rückt $x_0 + h$ immer näher an x_0 heran, und die Sekante geht in die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ über. Deren Anstieg ist die Ableitung von f an der Stelle x_0 . Interpretiert als Differentialquotient df/dx ist die Ableitung das entsprechende Verhältnis „infinitesimaler“ Änderungen. Da „unendlich kleine Größen“ kein sinnvolles Konzept sind (und man sie sich überdies nicht vorstellen kann), denkt man sich dx und df ersatzweise als *sehr klein*. Das kleine grüne Steigungsdreieck ist hier innerhalb des Bereichs angesiedelt, in dem Tangente und Sekante „praktisch übereinstimmen“. Mathematisch macht der Anstieg, den es misst, aber nur im Grenzübergang $h \rightarrow 0$ Sinn.

Nun sei f eine Funktion, die *nicht* notwendigerweise linear ist. Praktisch alle Funktionen, die Sie kennen, haben Kurven² als Graphen. Für eine solche Funktion kann ebenfalls die Änderungsrate beim Übergang von einer Stelle x_0 zu einer benachbarten Stelle $x_1 = x_0 + \Delta x$ betrachtet werden. Der Kürze halber werden wir Δx im Folgenden mit h bezeichnen, haben also

$$\Delta x = x_1 - x_0 = h, \quad (1.2)$$

wobei wir voraussetzen, dass $h \neq 0$ ist. Die Änderung des Funktionswerts beim Übergang von x_0 zu x_1 ist durch

$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) \quad (1.3)$$

² Das gilt auch für lineare Funktionen, denn aus mathematischer Sicht ist auch eine Gerade eine Kurve.

gegeben. Die entsprechende **mittlere Änderungsrate** ist dann gleich dem Quotienten

$$\begin{aligned} \text{mittlere Änderungsrate beim Übergang von } x_0 \text{ zu } x_0 + h &= \\ &= \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Als Quotient zweier Differenzen (Differenz der Funktionswerte dividiert durch Differenz der x -Werte) wird sie auch als **Differenzenquotient** bezeichnet. Da f nicht mehr als linear vorausgesetzt wird, besitzt die Größe (1.4) eine andere, allgemeinere Bedeutung als (1.1): Sie ist der Anstieg jener Geraden, die durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, die beide auf dem Graphen von f liegen, verläuft. Wir nennen eine solche Gerade *Sekante* (in Abbildung 1, die auch andere Aspekte zeigt, auf die wir noch zu sprechen kommen, strichliert dargestellt). Im allgemeinen Fall wird die mittlere Änderungsrate (1.4) nun von den beiden Stellen x_0 und $x_0 + h$ abhängen, ist also nicht mehr eine für die Funktion als Ganzes gültige Konstante.

Anwendungsbeispiel: Wird die Zeit durch die Variable t dargestellt und bezeichnet $s(t)$ jene Kilometermarkierung entlang einer Straße, bei der sich ein Fahrzeug, das sich nicht unbedingt mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, zum Zeitpunkt t befindet, so ist die Änderungsrate von s beim Übergang von t_0 zu $t_0 + \Delta t$, also (mit der Bezeichnung $\Delta t = h$)

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}, \quad (1.5)$$

gleich der *Durchschnittsgeschwindigkeit* des Fahrzeugs zwischen den Zeitpunkten t_0 und $t_0 + h$.

Die Frage, mit der die Differentialrechnung beginnt, lautet: Ist es möglich, für eine Funktion f eine **momentane Änderungsrate** (oder **lokale Änderungsrate**) an einer *einzigsten* Stelle x_0 zu definieren (und zu berechnen)?

Für das Beispiel des bewegten Fahrzeugs wäre zu erwarten, dass eine solche momentane Änderungsrate die *Momentangeschwindigkeit* zu einem Zeitpunkt t_0 angibt.

In (1.4) einfach $h = 0$ zu setzen, funktioniert nicht, da wir dann eine Division „Null durch Null“ bekämen. Die zentrale Idee, diesem Problem zu entkommen, besteht nun darin, x_0 festzuhalten, die mittleren Änderungsrate von f beim Übergang von x_0 zu $x_0 + h$ für $h \neq 0$ zu betrachten und einen „Grenzübergang“ $h \rightarrow 0$ durchzuführen. Stellen Sie sich dabei intuitiv vor, dass h schrittweise immer näher zur Zahl 0 rückt (egal, ob von links oder von rechts). Wenn im Zuge eines solchen gedanklichen Prozesses die mittlere Änderungsrate einer wohlbestimmten Zahl zustrebt, und zwar unabhängig davon, wie die schrittweise Annäherung $h \rightarrow 0$ durchgeführt wird, so nennen wir diese Zahl die **Ableitung** von f an der Stelle x_0 und schreiben sie in der Form³

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1.6)$$

³ Ausgesprochen „f Strich“.

an⁴. Hier haben wir die gesuchte momentane Änderungsrate an der Stelle x_0 ! Falls sie existiert, nennen wir f an der Stelle x_0 **differenzierbar**.

Beispiel: Wir berechnen die Ableitung der durch $f(x) = x^2$ definierten Funktion f an der Stelle 3. Die Änderungsrate beim Übergang von der Stelle 3 zur Stelle $3 + h$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{mittlere Änderungsrate beim Übergang von 3 zu } 3 + h &= \\ &= \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \\ &= \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Gehen sie diese kurze Rechnung im Detail durch! Mit ihrem Ergebnis können wir nun den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ sehr leicht durchführen, denn klarerweise strebt $6 + h$ für $h \rightarrow 0$ gegen 6. Damit ist gezeigt, dass die Ableitung der Funktion f an der Stelle 3 existiert und gleich 6 ist:

$$f'(3) = 6. \quad (1.8)$$

Die geometrische Bedeutung der Ableitung erschließt sich, indem wir uns vorstellen, wie der Grenzübergang $h \rightarrow 0$ in der grafischen Darstellung aussieht. Da $x_0 + h$ immer näher an x_0 heranrückt, geht die Sekante in die **Tangente** an den Graphen im Punkt $(x_0, f(x_0))$ über, und die Ableitung ist gleich dem Anstieg dieser Tangente (siehe Abbildung 1). Die Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x_0 existiert genau dann, wenn der Graph von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ eine wohldefinierte Tangente mit endlichem Anstieg (d.h. eine Tangente, die nicht "vertikal" verläuft) besitzt. Wir können diesen Sachverhalt auch so ausdrücken: Eine Funktion ist an einer Stelle differenzierbar, wenn sie sich in unmittelbarer Nachbarschaft dieser Stelle durch eine lineare Funktion (deren Graph die Tangente ist) approximieren lässt.

Nicht jede Funktion ist an allen Stellen differenzierbar. So hat beispielsweise der Graph der Betragsfunktion $g : x \mapsto |x|$ im Ursprung einen Knick (siehe Abbildung 2), besitzt also dort *keine* wohldefinierte Tangente. Das macht sich auch in der Berechnung bemerkbar: Für $h \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \text{mittlere Änderungsrate beim Übergang von 0 zu } h &= \\ &= \frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{|h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \text{Vorzeichen von } h. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Nun lässt sich der Grenzübergang $h \rightarrow 0$ für die mittlere Änderungsrate nicht mehr durchführen: Je nachdem, ob sich h von links ($h < 0$) oder von rechts ($h > 0$) der Stelle 0 annähert, erhalten wir -1 oder 1 . Wir könnten h auch mit wechselndem Vorzeichen gegen 0 streben lassen, mit dem Effekt, dass die mittlere Änderungsrate (1.9) zwischen -1 und 1 hin und her springt. Daraus schließen wir, dass die Betragsfunktion an der Stelle 0 *nicht* differenzierbar ist.

⁴ In einer mathematisch exakteren Vorgangsweise würde man zur Durchführung dieses „schrittweisen“ Grenzübergangs konvergente Folgen benutzen, auf die wir hier aber nicht eingehen.

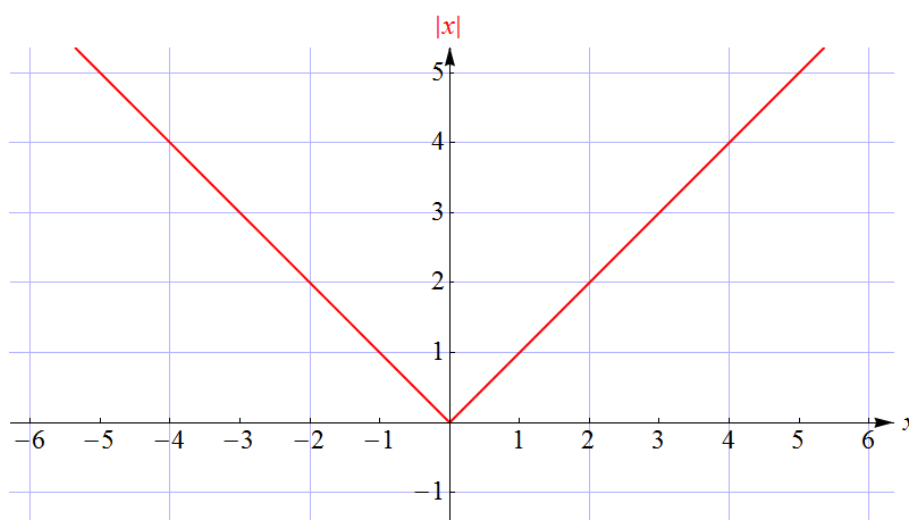


Abbildung 2: Der Graph der Betragsfunktion $x \mapsto |x|$. Der Knick im Punkt $(0,0)$ zeigt, dass die Betragsfunktion an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist.

An allen Stellen $x_0 \neq 0$ hingegen ist die Betragsfunktion differenzierbar: Für $x_0 > 0$ fällt die Tangente mit dem Graphen der linearen Funktion $x \mapsto x$ (mit Steigung 1) zusammen, die Ableitung ist daher an allen positiven Stellen gleich 1. Für $x_0 < 0$ fällt die Tangente mit dem Graphen der linearen Funktion $x \mapsto -x$ (mit Steigung -1) zusammen, die Ableitung ist daher an allen negativen Stellen gleich -1 .

Alle Funktionen, die in den bisherigen Skripten besprochen wurden, sind an fast allen Stellen ihrer Definitionsmenge differenzierbar. Die Berechnung von Ableitungen ist für viele Anwendungen von besonderer Bedeutung. Um eine handliche Formel zur Hand zu haben, ersetzen wir in (1.6) die etwas schwerfällige Benennung x_0 durch ein simples x und schreiben

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1.10)$$

für die Ableitung der Funktion f an der Stelle x . Diese Form zeigt uns auch recht schön an, dass die Ableitung (vorausgesetzt, sie existiert an allen Stellen x) selbst eine Funktion $f' : x \mapsto f'(x)$ ist – die **Ableitungsfunktion** (meist kurz als „Ableitung“ bezeichnet). Damit können wir Ableitungen nicht nur an einzelnen Stellen berechnen, deren Zahlenwerte vorgegeben sind, sondern ganz allgemein an *beliebigen* Stellen, an denen sie existieren.

Beispiel: Wir haben oben die Ableitung der durch $f(x) = x^2$ definierten Funktion f an der Stelle 3 berechnet. Nun berechnen wir die Ableitung dieser Funktion an einer beliebigen Stelle x : Die mittlere Änderungsrate (der Differenzenquotient) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{mittlere Änderungsrate beim Übergang von } x \text{ zu } x+h &= \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Nun können wir den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ durchführen. Klarerweise strebt $2x + h$ für $h \rightarrow 0$ gegen $2x$. Damit ist gezeigt, dass die Funktion f überall differenzierbar ist und dass ihre Ableitungsfunktion f' durch

$$f'(x) = 2x \quad (1.12)$$

gegeben ist.

Das Ermitteln der Ableitung einer Funktion nennen wir auch „eine Funktion differenzieren“. Um ein Gefühl für einige weitere Bezeichnungen und Schreibweisen der Differentialrechnung zu bekommen, sehen Sie sich die Definition der mittleren Änderungsrate (1.4), die wir auch Differenzenquotient genannt haben, noch einmal an! Dort steht Δx für eine Änderung des x -Werts und Δf für die zugehörige Änderung des Funktionswerts. Wird Δx (also h) immer kleiner, so wird (wir nehmen an, dass f differenzierbar ist) auch Δf immer kleiner. Das Verhältnis (der Quotient) dieser beiden immer kleiner werdenden Größen strebt einem wohldefinierten Wert (eben der Ableitung f') zu. Für die Ableitung hat sich schon früh die Schreibweise

$$\frac{df}{dx} \quad (1.13)$$

eingebürgert, wobei man sich dx und df (sofern das überhaupt möglich ist) als „praktisch unendlich kleine“ Änderungen der Stelle und des Funktionswerts (sogenannte „infinitesimale“ Größen) vorstellte. Mathematische Gedankenobjekte dieser Art wurden „Differentialen“ genannt. Die Ableitung, in der Schreibweise (1.13) als „Quotient von Differentialen“ gedeutet, wurde daher als **Differentialquotient** bezeichnet. Der Grenzübergang $h \rightarrow 0$ ist in diesem Sinn ein Übergang

$$\text{Differenzenquotient} \rightarrow \text{Differentialquotient}. \quad (1.14)$$

In technischen Anwendungen stellt man sich unter dx und df meist Änderungen vor, die so *klein* sind, dass ihr Quotient praktisch gleich der Ableitung ist. Das ist in Abbildung 1 in Form des kleinen grünen Steigungsdreiecks illustriert.

Für den Funktionswert der Ableitungsfunktion, $f'(x)$, werden auch oft die Schreibweisen

$$\frac{df(x)}{dx} \quad \text{oder} \quad \frac{df}{dx}(x) \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dx} f(x), \quad (1.15)$$

verwendet, wobei das Symbol $\frac{d}{dx}$ die Aufforderung „bilde die Ableitung nach x “ bezeichnet. Unter Verwendung dieser äußerst nützlichen Schreibweise ist beispielsweise klar, dass mit

$$\frac{d}{dt} (A \sin(\omega t)) \quad (1.16)$$

die Ableitung der durch $f(t) = A \sin(\omega t)$ definierten Funktion f gemeint ist, wobei A und ω als Konstanten aufzufassen sind, die sich beim Übergang von t zu $t + h$ nicht ändern.

Wir erwähnen noch eine weitere Form, die Definition der Ableitung anzuschreiben: Bezeichnen wir in (1.6) die Stelle $x_0 + h$ als x , so ist $h = x - x_0$, und der Grenzübergang $h \rightarrow 0$ bedeutet,

dass x gegen x_0 strebt. Das wird durch die Schreibweise $x \rightarrow x_0$ ausgedrückt. Anstelle von (1.6) können wir daher für die Ableitung von f an der Stelle x_0 auch schreiben

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (1.17)$$

Alle drei Formeln (1.6), (1.10) und (1.17) drücken in unterschiedlicher Schreibweise das Gleiche aus und finden sich in der mathematischen Literatur.

2 Ableitungen der elementaren Funktionen

Nachdem wir im vorigen Abschnitt erfolgreich die Ableitung der Funktion $x \mapsto x^2$ berechnet haben, stellt sich die Frage, wie die Ableitungen der anderen Funktionen, die Sie kennen, aussehen. Die Ableitungen von Polynomfunktionen können ganz analog berechnet werden wie oben anhand des Beispiels $x \mapsto x^2$ vorgeführt. In anderen Fällen ist die Herleitung nicht so einfach. Wir verzichten auf die Details der Begründungen und geben zunächst die Ableitungen der wichtigsten „elementaren“ Funktionen an, aus denen dann (im darauffolgenden Abschnitt) die Ableitungen weiterer, aus diesen zusammengesetzter Funktionen gewonnen werden können. Dabei benutzen wir eine kompakte Schreibweise, die es uns erspart, jeder Funktion einen eigenen Namen zu geben: Wir setzen den Funktionsterm in Klammern und kennzeichnen die „Ableitung nach x “ mit einem Strich. Das bedeutet, dass wir uns erlauben (obwohl es nicht ganz korrekt ist), anstelle von $f'(x)$ einfach $(f(x))'$ zu schreiben. Dass die Ableitung der Funktion $f : x \mapsto x^2$ durch $f'(x) = 2x$ (oder $f' : x \mapsto 2x$) gegeben ist, wird dann kurz durch

$$(x^2)' = 2x \quad (2.1)$$

ausgedrückt. Wenn es Ihnen lieber ist, können Sie stattdessen auch

$$\frac{d}{dx} (x^2) = 2x \quad \text{oder einfach} \quad \frac{d}{dx} x^2 = 2x \quad (2.2)$$

schreiben. Wann immer eine Funktion bereits einen Namen hat (wie z.B. \sin für die Sinusfunktion), bleiben wir bei der Schreibweise, den Strich unmittelbar an diesen Namen zu hängen (also mit dem Symbol \sin' die Ableitungsfunktion der Sinusfunktion und mit $\sin'(x)$ ihren Funktionswert an der Stelle x zu bezeichnen).

- **Ableitungen von Potenzfunktionen**⁵: Für jedes $r \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x^r)' = r x^{r-1}. \quad (2.3)$$

Diese Regel sollten sie auf jeden Fall auswendig wissen! Als Spezialfall für $r = 2$ folgt daraus sofort (2.1). Für $r = 0$ folgt mit

$$(1)' = 0 \quad (2.4)$$

⁵ Für Potenzfunktionen siehe das Skriptum *Der Funktionen zoo*.

die (wenig überraschende) Erkenntnis, dass die Ableitung der konstanten Funktion 1 gleich 0 ist, und mit $r = 1$ erhalten wir

$$(x)' = 1, \quad (2.5)$$

was besagt, dass die lineare Funktion $x \mapsto x$ überall die Ableitung 1 besitzt. Mit $r = 3$ folgt

$$(x^3)' = 3x^2, \quad (2.6)$$

und weitere Spezialfälle mit $r = -1$, $r = -2$ und $r = \frac{1}{2}$ lauten

$$(x^{-1})' = -x^{-2}, \quad (x^{-2})' = -2x^{-3}, \quad (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2}, \quad (2.7)$$

was wir auch in der Form

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (2.8)$$

schreiben können. Es ist hilfreich, diese letzten drei Formeln auswendig zu kennen!

- **Ableitungen der Winkelfunktionen⁶:**

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad (2.9)$$

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad (2.10)$$

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}. \quad (2.11)$$

Die ersten beiden dieser Formeln sollten Sie sich auf jeden Fall merken!

- **Ableitungen der inversen Winkelfunktionen⁷:**

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2.12)$$

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2.13)$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}. \quad (2.14)$$

Die Struktur dieser Formeln (die Ableitung einer inversen Winkelfunktion ist *keine* inverse Winkelfunktion) sollten Sie sich merken!

- **Ableitungen der Exponentialfunktionen⁸:**

$$(e^x)' = e^x \quad (2.15)$$

$$(a^x)' = \ln(a) a^x \quad \text{für } a > 0. \quad (2.16)$$

⁶ Siehe das Skriptum *Winkelfunktionen und ihre Graphen*.

⁷ Siehe das Skriptum *Winkelfunktionen und ihre Graphen*.

⁸ Siehe das Skriptum *Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Graphen*.

Die erste dieser Formeln sollten Sie sich auf jeden Fall merken! Mit der Beziehung (2.15) haben wir den ersten wirklich handfesten Grund für die Wichtigkeit der Eulerschen Zahl e . Beachten Sie, dass e (in ihrer Rolle als Basis des natürlichen Logarithmus) auch in (2.16) eingeht: Selbst wenn wir bei der Besprechung der Exponential- und Logarithmusfunktionen beschlossen hätten, e zu ignorieren, wäre diese Zahl hier automatisch aufgetreten!

- **Ableitungen der Hyperbelfunktionen⁹:**

$$\sinh'(x) = \cosh(x) \quad (2.17)$$

$$\cosh'(x) = \sinh(x) \quad (2.18)$$

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}. \quad (2.19)$$

- **Ableitungen der Logarithmusfunktionen¹⁰:**

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (2.20)$$

$$\log_a'(x) = \frac{1}{\ln(a)x} \quad \text{für } a > 0 \text{ und } a \neq 1. \quad (2.21)$$

Die erste dieser Formeln sollten Sie sich auf jeden Fall merken!

3 Ableitungsregeln

Um die Ableitungen von Summen, Vielfachen, Produkten, Quotienten und Verkettungen von Funktionen zu berechnen, deren Ableitungen bereits bekannt sind, stehen einige handliche Regeln zur Verfügung, die wir hier nicht beweisen, sondern lediglich wiedergeben, und die Sie kennen und anwenden können sollten:

- **Ableitung einer Summe:** Sind f und g differenzierbare Funktionen, so ist auch ihre Summe $f+g$ differenzierbar, und es gilt

$$(f + g)' = f' + g'. \quad (3.1)$$

In Worten: Die Ableitung einer Summe ist die Summe der Ableitungen.

Beispiel:

$$(x^2 + x^5)' = 2x + 5x^4. \quad (3.2)$$

- **Ableitung des Vielfachen einer Funktion:** Ist f eine differenzierbare Funktion und c eine reelle Zahl, so ist das c -fache von f , die Funktion cf , ebenfalls differenzierbar, und es gilt

$$(cf)' = cf'. \quad (3.3)$$

In Worten: Die Ableitung eines Vielfachen ist das Vielfache der Ableitung.

⁹ Siehe das Skriptum *Der Funktionenzoo*.

¹⁰ Siehe das Skriptum *Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Graphen*.

Beispiel:

$$(7x^2)' = 7 \cdot 2x = 14x. \quad (3.4)$$

- **Ableitung einer Linearkombination:** Eine Linearkombination von Funktionen ist eine „Summe von Vielfachen“, beispielsweise eine Funktion der Form $af + bg$, wobei f und g Funktionen und a und b reelle Zahlen sind. Aus (3.2) und (3.3) folgt, dass die Ableitung einer Linearkombination die Linearkombination der Ableitungen ist:

$$(af + bg)' = af' + bg', \quad (3.5)$$

und entsprechende Regeln gelten für Linearkombinationen mit mehr als zwei Summanden.

Beispiel:

$$\begin{aligned} (7x^2 + 5x^3 - 4x^9 + 13)' &= 7 \cdot 2x + 5 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 9x^8 = \\ &= 14x + 15x^2 - 36x^8. \end{aligned} \quad (3.6)$$

- **Ableitung eines Produkts (Produktregel):** Sind f und g differenzierbare Funktionen, so ist auch ihr Produkt fg differenzierbar, und es gilt

$$(fg)' = f'g + fg'. \quad (3.7)$$

Beispiel:

$$(x^2 \sin(x))' = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x). \quad (3.8)$$

Durch mehrfache Anwendung von (3.7) auf Produkte mit mehr als zwei Faktoren ergeben sich weitere Regeln, wie beispielsweise

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'. \quad (3.9)$$

- **Ableitung eines Quotienten (Quotientenregel):** Sind f und g differenzierbare Funktionen, wobei g im betrachteten Bereich von 0 verschieden sei, so ist auch ihr Quotient $\frac{f}{g}$ differenzierbar, und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \quad (3.10)$$

Beispiel:

$$\left(\frac{x^2}{\sin(x)}\right)' = \frac{2x \cdot \sin(x) - x^2 \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}. \quad (3.11)$$

- **Ableitung einer Verkettung (Kettenregel):** Sind f und g differenzierbare Funktionen, deren Verkettung¹¹, d.h. die durch $u(x) = f(g(x))$ definierte Funktion u (auch als $f \circ g$ bezeichnet), gebildet werden kann, so ist diese differenzierbar, und es gilt

$$u'(x) = f'(g(x))g'(x). \quad (3.12)$$

¹¹ Siehe das Skriptum *Der Funktionenzoo*.

Den Faktor $f'(g(x))$ können Sie sich als „Ableitung von f nach $g(x)$ “ vorstellen. Um ihn zu erhalten, wird so getan, als wäre $g(x)$ eine unabhängige Variable. Der Faktor $g'(x)$ wird als „innere Ableitung“ bezeichnet.

Beispiel: Mit $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x^2$ ist $u(x) = f(g(x)) = \sin(x^2)$ und

$$u'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x \quad (3.13)$$

oder, in unserer kompakten Schreibweise,

$$(\sin(x^2))' = \cos(x^2) \cdot 2x. \quad (3.14)$$

Den Faktor $\cos(x^2)$ erhalten Sie, indem Sie „ $\sin(x^2)$ nach x^2 differenzieren“, also so tun, als wäre x^2 eine unabhängige Variable. (Korrekt wäre die folgende Beschreibung: Sie berechnen die Ableitung von $\sin(x)$ nach x und setzen danach x^2 anstelle von x ein.) Der Faktor $2x$ ist die innere Ableitung.

Wird ein Quotient $\frac{f}{g}$ als Produkt $f \frac{1}{g}$ aufgefasst, so kann seine Ableitung anstatt mit der Quotientenregel (3.10) auch mit der Produktregel (3.7) und der Kettenregel (3.12) berechnet werden.

Beispiel: Die gleiche Funktion wie in (3.11), nur diesmal anders differenziert:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{\sin(x)} \right)' &= \left(x^2 \frac{1}{\sin(x)} \right)' = (x^2)' \frac{1}{\sin(x)} + x^2 \left(\frac{1}{\sin(x)} \right)' = \\ &= 2x \frac{1}{\sin(x)} - x^2 \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

was das Gleiche ist wie das Ergebnis von (3.11), nur anders angeschrieben. Dabei wurde $\frac{1}{\sin(x)}$ als Verkettung der Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ mit der Sinusfunktion aufgefasst und mit Hilfe der Kettenregel

$$\left(\frac{1}{\sin(x)} \right)' = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \quad (3.16)$$

berechnet. Die innere Ableitung ist hier $\cos(x)$.

In formalerer Schreibweise sieht die Kettenregel so aus:

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) g'. \quad (3.17)$$

Eine andere, etwas saloppere Beschreibung dieser Regel (aber eine, die einen Hauch von Beweis an sich hat), ist die folgende: Hängt f von g ab und g von x , so ist

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}. \quad (3.18)$$

Mit Hilfe dieser Regeln können die Ableitungen beliebiger Funktionen berechnet werden, die sich durch Summen, Vielfache, Linearkombinationen, Produkte, Quotienten und Verkettungen jener elementaren Funktionen ausdrücken lassen, deren Ableitungen wir im vorigen Abschnitt angegeben haben. Das Differenzieren solcher Funktionen funktioniert also sozusagen nach „Kochrezept“, und daher können das auch Computeralgebrasysteme (wie *Mathematica* oder *GeoGebra*) sehr gut. Machen Sie sich bitte damit vertraut, wie das Differenzieren mit dem Computerwerkzeug Ihrer Wahl durchgeführt wird, und nutzen Sie es zur Berechnung von Ableitungen oder zur Kontrolle Ihrer auf dem Papier erzielten Ergebnisse!

4 Höhere Ableitungen

Ist die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion f wieder differenzierbar, so kann die Ableitung der Ableitung (die *zweite Ableitung*), bezeichnet mit f'' oder¹² $\frac{d^2 f}{dx^2}$, gebildet werden.

Ist diese differenzierbar, so kann die *dritte Ableitung* f''' (auch als $\frac{d^3 f}{dx^3}$ geschrieben) gebildet werden, usw. In diesem Sinn wird die Ableitung auch als *erste Ableitung* bezeichnet. Werden höhere Ableitungen als die zweite benötigt, so ist es üblich, die n -te Ableitung von f als $f^{(n)}$ zu bezeichnen, wobei $f^{(0)}$ für die Funktion f selbst steht.

Anwendungsbeispiel: Wird die Zeit durch die Variable t dargestellt und bezeichnet $s(t)$ jene Kilometermarkierung entlang einer Straße, bei der sich ein Fahrzeug zum Zeitpunkt t befindet, so ist die Ableitung $s'(t)$ die Momentangeschwindigkeit des Fahrzeugs zur Zeit t . Die zweite Ableitung $s''(t)$, also die momentane Änderungsrate der Momentangeschwindigkeit $s'(t)$, ist dann die *Beschleunigung* des Fahrzeugs zur Zeit t . Für die Ableitung nach der Zeit wird manchmal auch die Schreibweise¹³ $\dot{s}(t)$ und für die zweite Ableitung die Schreibweise¹⁴ $\ddot{s}(t)$ verwendet.

Alle Funktionen, die in den bisherigen Skripten besprochen wurden, sind an fast allen Stellen ihrer Definitionsmenge *beliebig oft* differenzierbar.

5 Anwendungen des Ableitungskonzepts

Wir geben nun einen knappen Überblick über einige wichtige Anwendungen des in den bisherigen Abschnitten entwickelten Konzepts der Ableitung, wobei wir hinreichende Differenzierbarkeit (einschließlich der Existenz und Stetigkeit der benötigten höheren Ableitungen) stillschweigend voraussetzen.

• Näherungen:

¹² Ausgesprochen „d zwei f nach dx Quadrat“.

¹³ Ausgesprochen „s Punkt“.

¹⁴ Ausgesprochen „s zwei-Punkt“.

Die Ableitung wird aus dem Differenzenquotienten (1.4) durch den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ gewonnen. Ist h sehr klein¹⁵, aber $\neq 0$, so wird der Differenzenquotient zwar nicht unbedingt gleich der Ableitung sein, aber zumindest einen Näherungswert für sie darstellen. Für kleines h können wir daher schreiben

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \approx f'(x_0), \quad (5.1)$$

woraus mit

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h f'(x_0) \quad \text{oder} \quad \Delta f \approx f'(x_0) \Delta x \quad (5.2)$$

eine nützliche Methode folgt, um näherungsweise anzugeben, wie sich der Wert einer Funktion beim Übergang von einer Stelle x_0 zu einer sehr nahe benachbarten Stelle $x_0 + h$ ändert.

Beispiel: Sei $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Der Wert dieser Funktion an der Stelle 1 ist

$f(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2} = 0.5$. Nun nehmen wir an, eine Fragestellung erfordert es, Funktionswerte in der Nähe der Stelle 1 zu kennen. Wie groß ist beispielsweise (ungefähr) der Funktionswert an der Stelle 1.001, d.h. $f(1.001)$? Mit

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad \text{daher} \quad f'(1) = -\frac{1}{2} \quad (5.3)$$

und (5.2) berechnen wir

$$\begin{aligned} f(1.001) &= f(1 + 0.001) \approx f(1) + 0.001 f'(1) = \\ &= \frac{1}{2} - 0.001 \cdot \frac{1}{2} = 0.4995. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Das ist recht nahe am tatsächlichen Wert $f(1.001) = 0.4995002499998751 \dots$

Mit der gleichen Methode berechnen wir ganz allgemein die Funktionswerte in der Nähe der Stelle 1:

$$f(1+h) \approx f(1) + h f'(1) = \frac{1}{2} - h \cdot \frac{1}{2} = \frac{1-h}{2}. \quad (5.5)$$

Das Ergebnis ist ein in h linearer Ausdruck, mit dem viel leichter umgegangen werden kann als mit der exakten Version

$$f(1+h) = \frac{1}{1+(1+h)^2}. \quad (5.6)$$

Die Genauigkeit solcher Näherungen kann (ebenfalls mit Hilfe der Differentialrechnung) weiter hochgetrieben werden und führt zur Darstellung von Funktionen als Potenzreihen¹⁶.

¹⁵ Genau genommen meinen wir hier und im Folgenden mit einem „kleinen h “ ein h , dessen Betrag klein ist, denn h darf ja auch negativ sein.

¹⁶ Für zwei Beispiele siehe das Skriptum *Der Funktionen-zoo*.

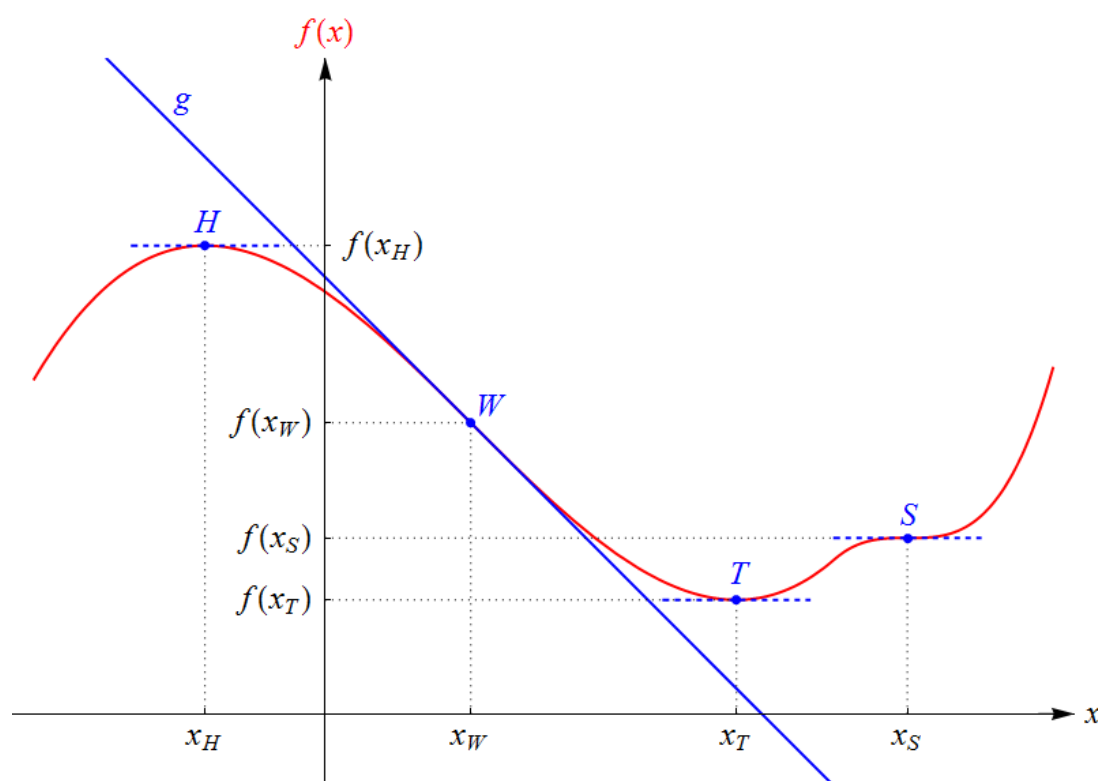


Abbildung 3: Markante Stellen und Punkte:

- lokale Maximumstelle x_H , Hochpunkt $H = (x_H, f(x_H))$
- Wendestelle x_W , Wendepunkt $W = (x_W, f(x_W))$, Wendetangente g
- lokale Minimumstelle x_T , Tiefpunkt $T = (x_T, f(x_T))$
- Sattelstelle x_S , Sattelpunkt $S = (x_S, f(x_S))$

Strichliert angedeutet sind die „horizontalen“ Tangenten an Stellen, an denen die Ableitung gleich 0 ist.

• Extremwertaufgaben:

Die Differentialrechnung stellt eine sehr einfache Methode zur Verfügung, um die lokalen Extremstellen¹⁷ einer Funktion f zu ermitteln. An jeder solchen Stelle ist die Tangente an den Graphen von f „horizontal“, hat also den Anstieg 0 (siehe Abbildung 3). Das bedeutet, dass an jeder lokalen Extremstelle x_0

$$f'(x_0) = 0 \quad (5.7)$$

gilt: Lokale Extremstellen sind Nullstellen der Ableitungsfunktion. Daher befinden sich alle lokalen Extremstellen unter den Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$. Nun ist Vorsicht angebracht: Nicht jede Nullstelle der Ableitung ist eine lokale Extremstelle! (Das zeigt das Beispiel $x \mapsto x^3$. Die Ableitung dieser Funktion an der Stelle 0 ist gleich 0, doch die Stelle 0 ist keine lokale Extremstelle.) Aber immerhin erhalten wir durch die Lösung der Gleichung $f'(x) = 0$ (in der Regel nur einige wenige) *Kandidaten* für lokale Extremstellen. Diese können wir dann einzeln darauf untersuchen, ob sie lokale Extremstellen sind

¹⁷ Zum Begriff der lokalen Extremstellen (lokale Minimum- und Maximumstellen) siehe das Skriptum *Der Funktionenzoö*.

oder nicht. Das kann beispielsweise durch einen Vergleich ausgewählter Funktionswerte geschehen.

Beispiel: Sei $f : x \mapsto x^2 - 2x$. Dann ist $f'(x) = 2x - 2$. Die Gleichung $f'(x) = 0$ lautet in diesem Fall $2x - 2 = 0$. Sie hat eine einzige Lösung, $x_0 = 1$. Vergleichen wir den Funktionswert $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$ mit je einem Funktionswert an einer Stelle links und rechts von 1, also etwa $f(0) = 0$ und $f(2) = 0$, so ist klar, dass die Stelle 1 nur ein lokales Minimum sein kann. (Ein Ergebnis, das nicht überraschen sollte, da wir die Eigenschaften der quadratischen Funktionen bereits ausführlich besprochen haben¹⁸.)

Mit Hilfe der zweiten Ableitung können wir ein anderes Kriterium formulieren, mit dem sich manchmal entscheiden lässt, ob ein Kandidat tatsächlich eine lokale Extremstelle ist:

- Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so ist x_0 eine lokale Minimumstelle.
(Beispiel: $f : x \mapsto x^2$, $x_0 = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2 > 0$.)
- Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so ist x_0 eine lokale Maximumstelle.
(Beispiel: $f : x \mapsto -x^2$, $x_0 = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -2 < 0$.)

Gilt allerdings sowohl $f'(x_0) = 0$ als auch $f''(x_0) = 0$, so *kann* es sich um eine lokale Extremstelle handeln (Beispiel: $f : x \mapsto x^4$, $x_0 = 0$ ist Minimumstelle), aber das ist nicht garantiert! Ist x_0 in einem solchen Fall keine lokale Extremstelle, so heißt x_0 *Sattelstelle* (siehe Abbildung 3). (Beispiel: $f : x \mapsto x^3$, $x_0 = 0$.)

Rechnen Sie die hier in Klammern angegebenen Beispiele nach und sehen Sie sich die Graphen der Funktionen an!

• Kurvendiskussionen:

Mit diesem Begriff ist in der Regel die Analyse von Funktionsgraphen (bzw. von Funktionseigenschaften, die eng mit dem Graphen verknüpft sind) gemeint. Was sagt uns die Ableitung einer Funktion f über deren Graphen (und damit über die Funktion selbst)?

- Lokale Extremstellen wurden bereits diskutiert. Die entsprechenden Punkte auf dem Graphen heißen Hochpunkte (im Fall eines lokalen Maximums) und Tiefpunkte (im Fall eines lokalen Minimums), siehe Abbildung 3.
- Monotonie¹⁹:
 - ☐ Gilt für alle x in einem Intervall $f'(x) \geq 0$, so ist f in diesem Intervall monoton wachsend. Der Graph fällt mit zunehmendem x nicht ab.
 - ☐ Gilt für alle x in einem Intervall $f'(x) > 0$, so ist f in diesem Intervall streng monoton wachsend. Der Graph steigt mit zunehmendem x an.
 - ☐ Gilt für alle x in einem Intervall $f'(x) \leq 0$, so ist f in diesem Intervall monoton fallend. Der Graph steigt mit zunehmendem x nicht an.

¹⁸ Siehe das Skriptum *Quadratische Funktionen und ihre Graphen*.

¹⁹ Zum Begriff der Monotonie siehe das Skriptum *Der Funktionen zoo*.

- Gilt für alle x in einem Intervall $f'(x) < 0$, so ist f in diesem Intervall streng monoton fallend. Der Graph fällt mit zunehmendem x ab.

Stellen, an denen sich das Monotonieverhalten von streng monoton wachsend auf streng monoton fallend (oder umgekehrt) ändert, sind lokale Extremstellen. Bei der in Abbildung 3 skizzierten Funktion sind das die Stellen x_H und x_T .

– Krümmungsverhalten:

- Gilt für alle x in einem Intervall $f''(x) > 0$, so ist der Graph von f in diesem Intervall linksgekrümmt. Wenn Sie sich vorstellen, ihn mit dem Fahrrad entlang zu fahren (sodass x zunimmt), so müssen Sie (wenn Sie von „oben“ auf ihn schauen wie auf eine Landkarte) nach links lenken. Die Funktion f ist in diesem Intervall konvex²⁰.
- Gilt für alle x in einem Intervall $f''(x) < 0$, so ist der Graph von f in diesem Intervall rechtsgekrümmt. Wenn Sie sich vorstellen, ihn mit dem Fahrrad entlang zu fahren, so müssen Sie nun nach rechts lenken. Die Funktion f ist in diesem Intervall konkav.

- Ändert sich das Krümmungsverhalten an einer Stelle x_0 (von linksgekrümmt auf rechtsgekrümmt oder umgekehrt), so heißt x_0 Wendestelle, der zugehörige Punkt $(x_0, f(x_0))$ auf dem Graphen Wendepunkt (siehe Abbildung 3). An einem Wendepunkt „überquert“ die Tangente (die sogenannte Wendetangente) den Graphen, wie in Abbildung 3 illustriert. Fahren Sie einen solchen Graphen mit einem Fahrrad entlang, so müssen Sie beim Wendepunkt (für einen Moment) geradeaus lenken. An einer Wendestelle gilt $f''(x_0) = 0$. Eine Wendestelle, an der zusätzlich $f'(x_0) = 0$ gilt (für die also die Wendetangente „horizontal“ ist), ist eine Sattelstelle.

Achtung: Eine Stelle x_0 , an der $f''(x_0) = 0$ gilt, ist nicht unbedingt eine Wendestelle! (Beispiel: $f : x \mapsto x^4$, $x_0 = 0$ ist Minimumstelle und daher keine Wendestelle.)

Die Nutzung der Ableitung, um das Verhalten von Funktionen aufzudecken, gehört in den meisten Anwendungsgebieten der Mathematik zum „Handwerkszeug“, das man einigermaßen gut beherrschen sollte.

• Differentialgleichungen:

In zahlreichen Anwendungen steht man vor der Situation, dass unser Wissen über eine Funktion zunächst durch ihre momentane Änderungsrate ausgedrückt ist und dass wir auf der Basis dieses Wissens mehr über die Funktion erfahren wollen.

Als Beispiel möge der radioaktive Zerfall dienen: Die in einer Substanz enthaltene Menge eines radioaktiven Bestandteils zum Zeitpunkt t sei durch $N(t)$ gegeben. Die Änderung²¹ dN von N während eines kurzen Zeitintervalls dt ist proportional zu N (d.h. der noch vorhandenen Menge) und proportional zu dt (der Dauer des betrachteten Zeitintervalls).

²⁰ Für die Begriffe konvex und konkav siehe das Skriptum *Der Funktionen Zoo*.

²¹ Wir deuten hier die Symbole dt und dN so, wie es in angewandten Wissenschaften oft gemacht wird: als *sehr kleine* Änderungen.

Mit der Proportionalitätskonstante λ , der sogenannten *Zerfallskonstante*, modellieren wir den Zerfall in der Form

$$dN = -\lambda N dt \quad (5.8)$$

oder, nach Division beider Seiten durch dt , als

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \quad (5.9)$$

wobei wir die linke Seite, da dt und dN *sehr* klein (um nicht zu sagen „unendlich klein“) sind, als Differentialquotient, d.h. als Ableitung interpretieren. Wir können (5.9) also genauso gut in der Form

$$N'(t) = -\lambda N(t) \quad (5.10)$$

anschreiben. Das ist eine Differentialgleichung. Eine Lösung ist eine Funktion, deren Ableitung gleich „ $-\lambda$ mal sie selbst“ ist. Die *allgemeine* Lösung ist die Menge *aller* Funktionen, für die das der Fall ist. Wir wollen hier nicht über Lösungsmethoden sprechen, aber da diese Differentialgleichung so einfach ist, können wir ihre Lösung mehr oder weniger erraten. Die allgemeine Lösung lautet

$$N(t) = C e^{-\lambda t}, \quad (5.11)$$

wobei C eine frei wählbare Konstante ist. (Überprüfen Sie, dass (5.11) die Differentialgleichung (5.10) erfüllt!) Wir finden also als Ergebnis die Formel für das exponentielle Abklingen²². Da $N(0) = C$ ist, hat C die Bedeutung der Anfangsmenge zum Zeitpunkt 0. Wir können (5.11) daher auch in der Form

$$N(t) = N(0) e^{-\lambda t} \quad (5.12)$$

anschreiben. So (oder in der Schreibweise $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$) steht sie in den meisten Physikbüchern.

Die Grundgleichungen zahlreicher physikalischer und technischer Anwendungsbereiche, in denen räumlich und zeitlich veränderliche Größen auftreten, enthalten deren Ableitungen, sind also Differentialgleichungen.

²² Siehe dazu auch das Skriptum *Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Graphen*.

6 Partielle Ableitungen

Hängt eine Größe von mehreren anderen Größen ab, so benutzen wir Funktionen in mehreren Variablen²³. Eine Funktion f in zwei Variablen x und y ist eine Zuordnung $(x, y) \mapsto f(x, y)$. Die partielle Ableitung von f nach der ersten Variable x erhalten wir, indem wir die zweite Variable y als Konstante betrachten und nach der ersten Variable x differenzieren. Schreibweisen dafür sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y). \quad (6.1)$$

In analoger Weise ist die partielle Ableitung nach der zweiten Variable y definiert.

Beispiel für eine partielle Ableitung nach x :

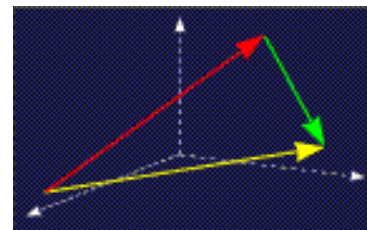
$$\frac{\partial}{\partial x} (x^3 y^2 - 7xy + 2y^5 + x) = 3x^2 y^2 - 7y + 1, \quad (6.2)$$

und für die partielle Ableitung der gleichen Funktion nach y :

$$\frac{\partial}{\partial y} (x^3 y^2 - 7xy + 2y^5 + x) = 2x^3 y - 7x + 10y^4. \quad (6.3)$$

Dieses Skriptum wurde erstellt im Juni 2015 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (<http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html>), einer Kooperation von mathe online (<http://www.mathe-online.at/>) mit der Fachhochschule Technikum Wien (<http://www.technikum-wien.at/>). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter <http://www.mathe-online.at/skripten/>.

²³ Siehe dazu das Skriptum *Der Funktionenzoo*.



Integrieren – kurz und bündig

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

Dieses Skriptum gibt eine kompakte Einführung in die Integralrechnung, die neben der Differentialrechnung einen Hauptbestandteil der Analysis bildet.

1 Der Integralbegriff

Die Differentialrechnung¹ löst das „Tangentenproblem“, während die Integralrechnung mit dem „Flächenproblem“ verknüpft ist.

Ist f eine auf einem Intervall $[a, b]$ definierte reelle Funktion², so ist der Graph von f eine Kurve zwischen den Punkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$. Welchen Wert hat der Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der ersten Achse? Genau genommen meinen wir den **orientierten Flächeninhalt**, bei dem ein Flächenstück *oberhalb* der ersten Achse *positiv* und ein Flächenstück *unterhalb* der ersten Achse *negativ* zählt. Man spricht zwar meist von der „Fläche unter dem Graphen“, meint aber damit die Differenz „Inhalt der Fläche zwischen Graph und erster Achse, die oberhalb der ersten Achse liegt, *minus* Inhalt der Fläche zwischen Graph und erster Achse, die unterhalb der ersten Achse liegt“.

Um diesen orientierten Flächeninhalt zu ermitteln, machen wir die obere Grenze des betrachteten Intervalls variabel: Wir fixieren eine Stelle a , bezeichnen den orientierten Flächeninhalt unter dem Graphen zwischen a und x mit $A(x)$ und nennen die Zuordnung $A : x \mapsto A(x)$ die **Flächeninhaltsfunktion**. Der orientierte Flächeninhalt zwischen a und b ist dann gleich $A(b)$. Damit haben wir die Sache zunächst nur benannt, nicht gelöst. Wir ändern nun die

¹ Siehe das Skriptum *Differenzieren – kurz und bündig*.

² Wir setzen stillschweigend voraus, dass f hinreichend „friedlich“ ist, sodass sich die folgenden mathematischen Operationen ohne Probleme durchführen lassen. Das ist für praktisch alle in den bisherigen Skripten besprochenen Funktionen der Fall. Insbesondere werden wir bei der allgemeinen Diskussion des Integralbegriffs annehmen, dass der Graph von f eine Kurve ist. Für eine systematische Auflistung der für Sie relevanten Funktionenklassen siehe das Skriptum *Der Funktionen-zoo*.

Obergrenze geringfügig, indem wir von x zu einer nahe benachbarten Stelle $x + h$ übergehen, und vergleichen $A(x + h)$ mit $A(x)$. Ist $h > 0$ und ist f im Intervall $[x, x + h]$ positiv, dann kann die Situation wie in Abbildung 1 illustriert werden: Die Differenz $A(x + h) - A(x)$ ist der Inhalt des schmalen Flächenstücks zwischen x und $x + h$. Bis auf das durch den Graphen begrenzte Stück an der Oberseite sieht es aus wie ein schmales Rechteck der Breite h und der Höhe $f(x)$. Wir können dessen Flächeninhalt durch

$$A(x + h) - A(x) \approx h f(x) \quad (1.1)$$

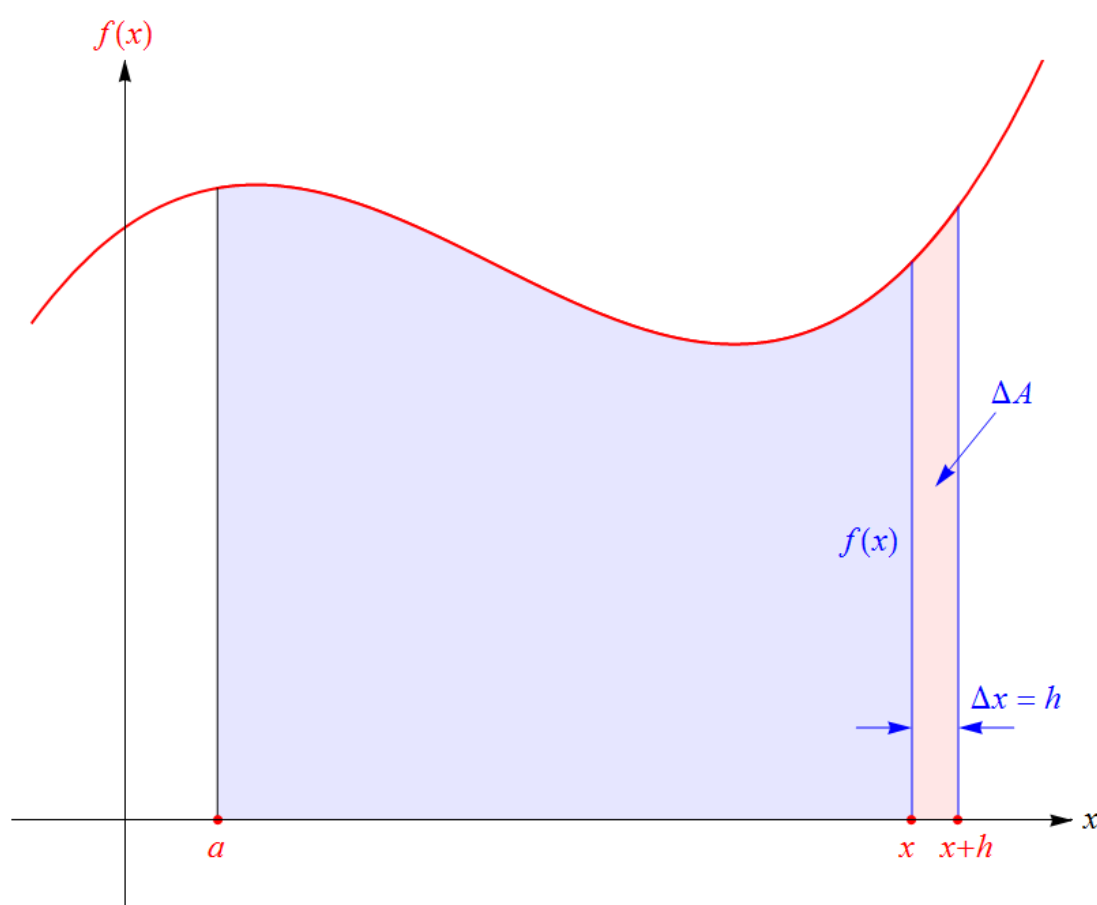


Abbildung 1: Um den (orientierten) Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion f und der ersten Achse zu ermitteln, wird untersucht, wie er sich ändert, wenn die Obergrenze des betrachteten Intervalls von x auf $x + h$ geändert wird. Mit $\Delta x = h$ wird der Inhalt ΔA des dazugekommenen Flächenstücks als Rechtecksfläche mit Höhe $f(x)$ angenähert, woraus $\frac{\Delta A}{\Delta x} \approx f(x)$ folgt, vgl. (1.2). Im Grenzübergang $h \rightarrow 0$ wird daraus die exakte Gleichheit (1.3), die Grundlage für den Hauptsatz der Analysis.

annähern³ und machen damit nur einen kleinen Fehler. Je kleiner h gewählt wird, umso kleiner wird die Abweichung von der tatsächlichen Fläche sein. Dividieren wir beide Seiten von (1.1) durch h , so erhalten wir

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} \approx f(x). \quad (1.2)$$

³ Wäre $f(x)$ im Intervall $[x, x + h]$ negativ, so wäre die rechte Seite von (1.1) automatisch negativ, was genau der Idee des *orientierten* Flächeninhalts entspricht.

Erkennen Sie auf der linken Seite einen alten Bekannten? Ein Differenzenquotient! Schreiben wir h als Δx und $A(x+h) - A(x)$ als ΔA , so wird die linke Seite von (1.2) gleich $\frac{\Delta A}{\Delta x}$, also gleich der Differenz der Funktionswerte von A dividiert durch die Differenz der x -Werte. Das lädt ein, den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ durchzuführen. Die linke Seite wird dann zur Ableitung $\frac{dA}{dx}(x) = A'(x)$. Auf der rechten Seite steht gar kein h , die bleibt also, wie sie ist⁴. Der springende Punkt besteht nun darin, dass das Symbol \approx in (1.2) nach dem Grenzübergang zu einem $=$ wird! Denn, wie bereits bemerkt: Je kleiner h ist, umso kleiner ist der Fehler, und im Grenzfall $h \rightarrow 0$ verschwindet er gänzlich. Dieses intuitive Argument kann exakt gemacht werden, worauf wir aber hier verzichten.

Wir erhalten also das (äußerst wichtige) Resultat:

$$A'(x) = f(x). \quad (1.3)$$

Die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion A ist gleich der gegebenen Funktion f . Das gibt Anlass zur Definition eines neuen Begriffs:

Definition: Wir nennen eine Funktion F eine **Stammfunktion** der Funktion f , wenn

$$F' = f \quad (1.4)$$

gilt.

Die Flächeninhaltsfunktion A ist demnach eine Stammfunktion von f . Wir sagen absichtlich „eine Stammfunktion“, denn f besitzt nicht nur eine einzige Stammfunktion: Ist F eine Stammfunktion von f und c eine reelle Zahl (eine Konstante), so ist auch die Funktion $F + c$ eine Stammfunktion von f , denn es gilt dann

$$(F + c)' = F' + \underbrace{c'}_0 = F' = f. \quad (1.5)$$

Und das sind auch schon *alle* Stammfunktionen von f . Je zwei Stammfunktionen von f unterscheiden sich nur um eine (additive) Konstante.

Diese Aussage lässt sich leicht beweisen: Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f (d.h. $F_1' = f$ und $F_2' = f$), so gilt

$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0, \quad (1.6)$$

was besagt, dass die Ableitung von $F_2 - F_1$ gleich 0 ist. Ist die Ableitung einer Funktion in einem ganzen Intervall gleich 0, so ist diese Funktion gleich einer Konstanten. Nur dann kann ihr Graph überall den Anstieg 0 haben. Es folgt also, dass es eine Zahl c gibt, sodass $F_2 - F_1 = c$ und daher

$$F_2 = F_1 + c \quad (1.7)$$

gilt.

⁴ Hätten wir die Höhe des Näherungsrechtecks mit $f(x+h)$ anstelle von $f(x)$ veranschlagt, so stünde auf der rechten Seite von (1.2) $f(x+h)$ statt $f(x)$. Auch in diesem Fall erhalten wir nach dem Grenzübergang $h \rightarrow 0$ den Wert $f(x)$, sofern wir (technisches Detail) voraussetzen, dass f stetig ist. Das Gleiche gilt, wenn als Höhe des Rechtecks ein Zwischenwert gewählt wird, etwa der Mittelwert $\frac{1}{2}(f(x) + f(x+h))$.

Nun können wir das Flächenproblem lösen: Ist F eine beliebige Stammfunktion von f , so gibt es eine Zahl c , sodass $F = A + c$ ist, d.h. es gilt $F(x) = A(x) + c$ für alle x im betrachteten Bereich. Damit wird

$$F(b) - F(a) = (A(b) + c) - (A(a) + c) = A(b) - A(a) = A(b), \quad (1.8)$$

wobei wir die offensichtliche Tatsache benutzt haben, dass $A(a) = 0$ ist. (1.8) ist folglich gleich dem gesuchten orientierten Flächeninhalt zwischen a und b . Wir schreiben ihn in der Form

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1.9)$$

an und nennen ihn das **bestimmte Integral** der Funktion f über das Intervall $[a, b]$ (oder kurz „von a bis b “). a heißt untere Integrationsgrenze (kurz „untere Grenze“), b heißt obere Integrationsgrenze („obere Grenze“). Das Intervall $[a, b]$ heißt **Integrationsbereich**. Die Funktion f (bzw. der Funktionsterm $f(x)$ in (1.9)) heißt **Integrand**, das Symbol x in (1.9) heißt **Integrationsvariable**. Wir können nun unser Ergebnis (1.8) so formulieren: Ist F eine (beliebige) Stammfunktion von f , so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (1.10)$$

Diese Aussage heißt zu Recht **Hauptsatz der Analysis**⁵ (oder **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**). Sie führt die Flächenberechnung zurück auf das Auffinden einer Stammfunktion, d.h. einer Funktion F , deren Ableitung f ist. Die Differenz $F(b) - F(a)$ wird meist in der Form $F(x) \Big|_a^b$ angeschrieben, womit der Hauptsatz die Form

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b \quad (1.11)$$

annimmt. Eine weitere Form, ihn anzuschreiben, ist

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a). \quad (1.12)$$

Beachten Sie, dass das Symbol f nun nicht mehr vorkommt! Diese Form zeigt am direktesten: Wann immer es gelingt, den Integranden als Ableitung F' zu schreiben, kann das bestimmte Integral durch simples Einsetzen der Grenzen in F berechnet werden.

Um also den orientierten Flächeninhalt zu berechnen, muss zuerst eine Stammfunktion gefunden werden. Als Symbol für die „allgemeine“ Stammfunktion von f ist die Schreibweise

$$\int f(x) dx \quad (1.13)$$

üblich. Sie wird als **unbestimmtes Integral** bezeichnet.

⁵ Das Wort „Analysis“ bezeichnet die Differential- und Integralrechnung.

Beispiel: Mit F definiert durch $F(x) = \frac{x^3}{3}$ ist $F'(x) = \frac{1}{3} (x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$. Definieren wir also f durch $f(x) = x^2$, so ist F eine Stammfunktion von f . Jede andere Stammfunktion von f unterscheidet sich von F nur um eine (additive) Konstante. In diesem Sinn ist es üblich,

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \quad (1.14)$$

zu schreiben, wobei C eine beliebige reelle Zahl ist, die **Integrationskonstante** heißt. (1.14) stellt gewissermaßen die Menge *aller* Stammfunktionen von f dar. Die Integrationskonstante darf in manchen Zusammenhängen nicht vergessen werden. Beim Berechnen von bestimmten Integralen allerdings kommt es auf ihren Wert nicht an, da sie beim Bilden der Differenz in (1.10) herausfällt. Daher ist man nicht immer so diszipliniert und schreibt statt (1.14) manchmal einfach

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}. \quad (1.15)$$

Man muss aber im Auge behalten, dass (1.15) dann nicht die *allgemeine*, sondern nur *eine spezielle* Stammfunktion von f bezeichnet. Auch Computeralgebrasysteme, die uns beim Integrieren helfen, geben in der Regel nur *eine* Stammfunktion aus.

Dieses Beispiel zeigt, dass wir bereits in der Lage sind, die Stammfunktionen vieler Funktionen anzugeben, nämlich all jener Funktionen, die uns bisher als Ableitungen begegnet sind⁶.

So gilt beispielsweise

$$\sin'(x) = \cos(x), \quad (1.16)$$

woraus im Umkehrschluss folgt

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C. \quad (1.17)$$

Wollen wir den Flächeninhalt unter dem Graphen der Cosinusfunktion zwischen den Nullstellen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ wissen (siehe Abbildung 2), so nutzen wir die Stammfunktion (1.17). Da es beim Berechnen eines bestimmten Integrals nicht auf den Wert der Integrationskonstante C ankommt, ignorieren wir sie und schreiben

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) dx = \sin(x) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2. \quad (1.18)$$

Ein anderes Beispiel (basierend darauf, dass die Ableitung von $-\cos(x)$ gleich $\sin(x)$ ist) ist

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0. \quad (1.19)$$

⁶ Und zwar im Skriptum *Differenzieren – kurz und bündig*.

Sehen Sie sich den Graphen der Sinusfunktion in Abbildung 3 an, um dieses Ergebnis zu verstehen!

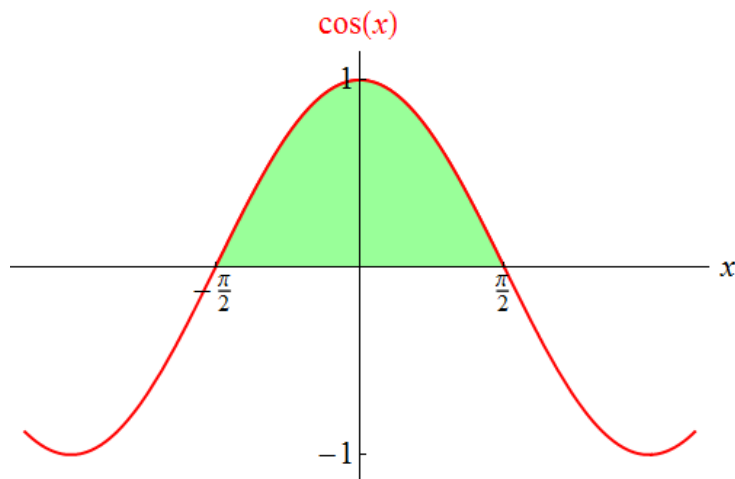


Abbildung 2: Der durch (1.18) ausgedrückte Flächeninhalt zwischen den Nullstellen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ der Cosinusfunktion.

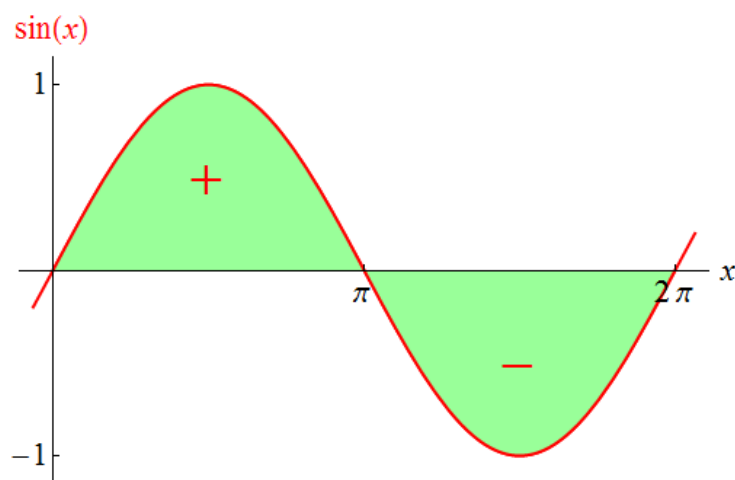


Abbildung 3: Der durch (1.19) ausgedrückte orientierte Flächeninhalt über eine ganze Periode der Sinusfunktion.

Manchmal ist es bequem, für die obere Grenze eines bestimmten Integrals einen Wert zuzulassen, der *kleiner* als die untere Grenze ist.

Ein physikalisches Beispiel dafür, das nebenbei auch zeigt, dass Integrale nicht nur für Flächenberechnungen genutzt werden können: Die Arbeit, die zu verrichten ist, um einen Körper, auf den eine von der Ortskoordinate x abhängige Kraft f wirkt, von x_0 nach x_1 zu bewegen, ist durch

$$W = - \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \quad (1.20)$$

gegeben⁷. Halten wir x_0 als Ausgangspunkt der Bewegung fest, so können wir den Körper nach rechts ($x_1 > x_0$), aber auch nach links ($x_1 < x_0$) bewegen. Werden x_0 und x_1 vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen der Arbeit.

Daher wird festgelegt, dass

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad (1.21)$$

gelten soll. Werden die Integrationsgrenzen vertauscht, so ändert das Integral sein Vorzeichen. Der Hauptsatz der Analysis (1.10) bzw. (1.11) oder (1.12) gilt mit dieser Konvention auch dann, wenn $b < a$ ist. (Und für $a = b$ ist das bestimmte Integral gleich 0.)

Obwohl wir der Übersicht halber die Integrationsvariable in den bisher aufgetretenen bestimmten Integralen einheitlich als x bezeichnet haben, kann auch jedes andere Symbol dafür verwendet werden. So bedeuten beispielsweise

$$\int_{-3}^5 x^2 dx \quad \text{und} \quad \int_{-3}^5 z^2 dz \quad (1.22)$$

genau das Gleiche. In technischen Anwendungen treten ganz unterschiedliche Größen als Integrationsvariable auf, und daher werden auch unterschiedliche Schreibweisen verwendet.

2 Deutung bestimmter Integrale

Wir machen nun einige Anmerkungen zur (vorstellungsmäßigen) Deutung bestimmter Integrale, und wie diese Deutung in der Integralschreibweise zum Ausdruck kommt.

Das Integralzeichen \int geht auf Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) zurück, stellt ein langgestrecktes S dar und soll das Wort „Summe“ ausdrücken. Wieso Summe? Betrachten Sie noch einmal Abbildung 1! Der (orientierte) Flächeninhalt des schmalen Streifens, der beim Schritt von x zu $x + h$ dazugekommen ist, ist ungefähr gleich dem Produkt $f(x)h$ oder, wenn wir h als Δx schreiben, $f(x)\Delta x$. Je kleiner Δx ist, umso kleiner ist der relative Fehler, den wir bei dieser Abschätzung des Streifeninhalts machen. Nun können wir uns vorstellen, die gesamte Fläche zwischen dem Graphen von f und der ersten Achse auf diese Weise in schmale Streifen der Breite Δx zu zerlegen. Um anzudeuten, dass Δx immer kleiner gemacht wird, damit die Abschätzung des Flächeninhalts immer genauer wird, schreibt man dx statt Δx . In der Praxis kann man sich vorstellen, dass dx *sehr* klein ist. Wie in der Differentialrechnung⁸ nennt man eine solche „praktisch unendlich kleine“ Größe auch „infinitesimal“. Damit

⁷ In der Schule haben Sie wahrscheinlich gelernt „Arbeit ist gleich Kraft mal Weg“. Ändert sich die Kraft entlang des Weges, so ist nicht klar, was damit gemeint ist! Mit (1.20) haben Sie die genaue Version des Zusammenhangs zwischen Arbeit und Kraft (in einer Dimension). Wird die Bewegung *gegen die Richtung* der Kraft ausgeführt, so ist $W > 0$. W stellt dann die Arbeit dar, die am Körper verrichtet wird. Wird die Bewegung *in Richtung* der Kraft ausgeführt, so ist $W < 0$, was bedeutet, dass in Wahrheit keine Arbeit am Körper verrichtet wird, sondern die Energie $-W$ gewonnen werden kann.

⁸ Siehe das Skriptum *Differenzieren – kurz und bündig*.

kann das bestimmte Integral folgendermaßen gedeutet werden: Der Integrationsbereich wird in kleine Teilintervalle der Länge dx zerlegt. In jedem Teilintervall wählt man ein x , sodass der (orientierte) Flächeninhalt des schmalen Streifens zwischen Graph und erster Achse, der sich auf diese Weise ergibt, durch $f(x) dx$ angenähert werden kann (siehe Abbildung 4).

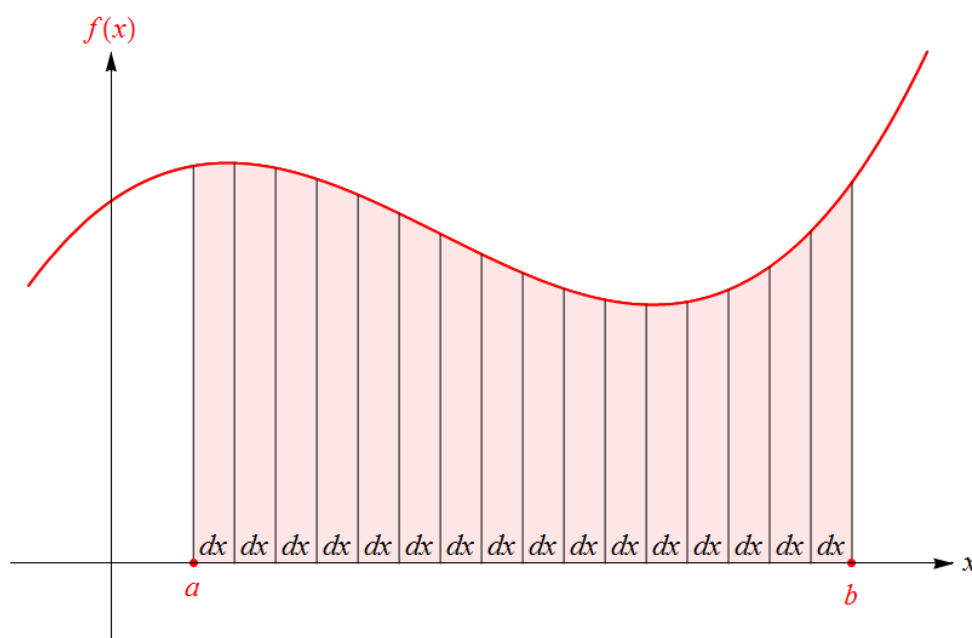


Abbildung 4: Zur Deutung des bestimmten Integrals: Die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion f und der ersten Achse wird in schmale Streifen der Breite dx zerlegt, sodass sich ihr (orientierter) Inhalt als Summe von Produkten „Funktionswert mal dx “ annähern lässt. Im Grenzfall $dx \rightarrow 0$ ergibt sich das bestimmte Integral, siehe (2.1).

Das bestimmte Integral ist dann die im Grenzfall beliebig feiner Zerlegungen, also $dx \rightarrow 0$, verstandene

$$\text{Summe über orientierte Flächeninhalte von Rechtecken } f(x) \cdot dx. \quad (2.1)$$

Um zu unterstreichen, dass es sich bei $f(x) dx$ tatsächlich um ein *Produkt* handelt, ist hier ein Malpunkt angeschrieben. In diesem Sinn ist also bei der Schreibweise für Integrale der Ausdruck $f(x) dx$ als Produkt zu verstehen. Diese Deutung (auf die wir im Anhang noch einmal zurückkommen werden) hat einige Konsequenzen:

- Setzen Sie bitte beim Anschreiben von (bestimmten und unbestimmten) Integralen richtige Klammern, ganz so, wie Sie Klammern setzen, um das Produkt eines Terms mit einer Summe zu kennzeichnen. Ein Beispiel für korrekt gesetzte Klammern ist der erste Ausdruck in (5.3) weiter unten. *Nicht richtig* (obwohl in manchen Lehrbüchern verwendet) wäre die Schreibweise

$$\int x^2 + \sin(x) dx, \quad (2.2)$$

denn die würde bedeuten, dass dx nur mit $\sin(x)$ multipliziert wird, nicht aber mit x^2 .

- Die Vorstellung von $f(x) dx$ als Produkt ermöglicht bei Anwendungen, in denen physikalische Einheiten vorkommen, einen einfachen Einheitencheck: So stellt beispielsweise das früher erwähnte Integral (1.20) die Arbeit dar, die zu verrichten ist, um einen Körper, auf den eine Kraft wirkt, zu bewegen. Der Check lautet hier

$$\text{Einheit der Arbeit} = \text{Einheit der Kraft} \cdot \text{Einheit der Länge} \quad (2.3)$$

(also Joule = Newton · Meter), wobei natürlich angenommen wird, dass x (und damit auch dx) eine Länge ist. Überprüfungen dieser Art sind nützlich, um Fehler zu finden! So ist beispielsweise eine Formel

$$W = - \int_{x_0}^{x_1} f(x) x dx \quad (2.4)$$

für die gegen eine Kraft f zu verrichtende Arbeit schon allein deshalb falsch, weil die linke Seite eine Arbeit darstellt, die rechte aber eine „Kraft mal Länge zum Quadrat“, also „Arbeit mal Länge“.

- Das Symbol dx ist bereits in der Differentialrechnung aufgetreten. Dort konnte die Ableitung f' auch als „Differentialquotient“ in der Form $\frac{df}{dx}$ geschrieben werden. Sowohl bei der Bezeichnung von Ableitungen als auch bei der Schreibweise von bestimmten Integralen kann man sich dx als eine Differenz von *sehr nahe* benachbarten x -Werten vorstellen. Ist A die im ersten Abschnitt besprochene Flächeninhaltsfunktion von f , so können wir $A'(x) = \frac{dA}{dx}$ in der Form $dA = A'(x) dx$ schreiben, also als $dA = f(x) dx$. Die Integralschreibweise bezeichnet das Bilden der Summe all dieser kleinen (orientierten) Rechtecksflächen dA (im Sinn eines Grenzübergangs $dx \rightarrow 0$). So gesehen bezeichnet das Symbol dx in der Differentialrechnung und in der Integralrechnung das Gleiche!
- Mit der Interpretation von $dF = F'(x) dx$ als kleine („infinitesimale“) Änderung des Funktionswerts einer Funktion F beim Übergang von der Stelle x zur Stelle $x+dx$ ergibt sich eine intuitive Interpretation des Hauptsatzes der Analysis in der Formulierung (1.12): Die linke Seite wird gedeutet als *Summe* der kleinen Änderungen, die sich ergeben, wenn x , ausgehend von a , schrittweise um ein kleines dx erhöht wird, bis b erreicht ist. Insgesamt ergibt sich daraus die *Gesamtänderung* des Funktionswerts von F beim Übergang von a zu b , also die rechte Seite von (1.12).

3 Wo treten Integrale auf?

Wir haben den Integralbegriff über das „Flächenproblem“ eingeführt. Aber auch in anderen Situationen treten Integrale auf. Wann immer eine Summe von Produkten

$$\text{Funktionswert einer abhängigen Größe} \cdot \text{kleine Änderung der unabhängigen Größe} \quad (3.1)$$

über ein Intervall der unabhängigen Größe, verstanden im Sinn eines Grenzübergangs „kleine Änderung der unabhängigen Größe $\rightarrow 0$ “, gebildet wird, handelt es sich um ein bestimmtes Integral. Ein Beispiel dafür haben wir bereits in (1.20) angegeben. Hier einige weitere Beispiele⁹:

- Während eines kleinen Zeitintervalls dt ändert sich die Ortskoordinate x eines bewegten Körpers um $dx = v dt$, wobei v seine Geschwindigkeit ist. Daraus folgt: Ist der zeitliche Verlauf $v(t)$ der Geschwindigkeit eines Körpers bekannt, so legt dieser zwischen zwei Zeitpunkten t_0 und t_1 die Strecke

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t) dt \quad (3.2)$$

zurück¹⁰. (3.2) kann als orientierter Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion $t \mapsto v(t)$ in einem Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm angesehen werden.

- Wird das Volumen V eines Gases geändert (d.h. wird es komprimiert oder lässt man es expandieren) und findet kein Wärmeaustausch mit der Umgebung statt, so ändert sich dessen innere Energie U . Für eine kleine Volumsänderung dV ist diese Änderung (gemäß dem ersten Hauptsatz der Wärmelehre, der die Erhaltung der Gesamtenergie ausdrückt) durch $dU = -p dV$ gegeben, wobei p der Druck des Gases ist. Wird das Volumen von V_0 auf V_1 geändert, so ist die Änderung der inneren Energie gleich

$$- \int_{V_0}^{V_1} p(V) dV, \quad (3.3)$$

wobei $p(V)$ der Druck ist, der herrscht, wenn das Gas das Volumen V einnimmt. (3.3) kann als minus der orientierte Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion $V \mapsto p(V)$ in einem Volumen-Druck-Diagramm angesehen werden.

- Wird ein Kondensator der Kapazität C geladen oder entladen, so ist damit ein Ladungsfluss verbunden, der einer Stromstärke I entspricht. Während eines kleinen Zeitintervalls dt ändert sich die Spannung U am Kondensator um $dU = \frac{1}{C} I dt$. Ist der zeitliche Verlauf $I(t)$ der Stromstärke bekannt, so ist der zeitliche Verlauf der Spannung durch

$$U(t) = U(0) + \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

⁹ Dabei gehen wir mit „Differentialen“ wie dt oder dV so um, wie es in technischen Anwendungen üblich ist: Wir betrachten sie als *kleine* Änderungen.

¹⁰ Genauer formuliert: (3.2) ist die Differenz „Ortskoordinate zur Zeit t_1 minus Ortskoordinate zur Zeit t_0 “.

gegeben, wobei $U(0)$ die Spannung zum Zeitpunkt $t = 0$ ist. Beachten Sie, dass die Integrationsvariable hier mit τ bezeichnet wurde, weil das Symbol t (das ja die obere Grenze darstellt) bereits „besetzt“ ist. Das Integral in (3.4) kann als orientierter Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion $t \mapsto I(t)$ in einem Zeit-Stromstärke-Diagramm angesehen werden.

- Ein sehr breites Feld, in dem Integrale auftreten und das in praktisch alle technischen Anwendungsgebiete hineinreicht, ist das der *Differentialgleichungen*. Viele Lösungen von Differentialgleichungen können als Integrale ausgedrückt werden. Wir gehen auf dieses Thema hier nicht weiter ein.

4 Stammfunktionen einiger elementarer Funktionen

Gehen wir die im Skriptum *Differenzieren – kurz und bündig* angegebenen Ableitungen elementarer Funktionen durch und „drehen die Reihenfolge um“, so können wir sogleich einige oft benötigte Stammfunktionen notieren. Dabei haben wir da und dort kleine Anpassungen vorgenommen¹¹:

$f(x)$	$\int f(x) dx$	Anmerkung
x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + C$	für $r \in \mathbb{R}$ mit $r \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$	-Symbol nur für $x < 0$ relevant
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	$\arcsin(x) = -\arccos(x) + \frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	
e^x	$e^x + C$	
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$	für $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) + C$	
$\cosh(x)$	$\sinh(x) + C$	

Als Spezialfall der ersten Regel für $r = 2$ erhalten wir (1.14). Weitere Spezialfälle für $r = \frac{1}{2}$, $r = -\frac{1}{2}$ und $r = -2$ ergeben sich zu

$$\int x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C, \quad \int x^{-1/2} dx = 2 x^{1/2} + C, \quad \int x^{-2} dx = -x^{-1} + C, \quad (4.1)$$

¹¹ Zum Beispiel wurde die Beziehung $\cos'(x) = -\sin(x)$ in der leicht variierten Form $(-\cos(x))' = \sin(x)$ benutzt, um die Stammfunktion der Sinusfunktion angeben zu können.

was wir auch in der Form

$$\int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2\sqrt{x} + C, \quad \int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} + C \quad (4.2)$$

schreiben können. Ist der Integrand ein Bruchterm, so kann das Symbol dx auch in den Zähler geschrieben werden. So schreibt man etwa das mittlere der Integrale in (4.2) auch in der Form

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad (4.3)$$

an.

Bei der Benutzung all dieser Formeln zur Berechnung bestimmter Integrale ist zu beachten, dass sich innerhalb des Integrationsbereichs keine Stelle befinden darf, an der der Integrand nicht definiert ist. So ist beispielsweise die Berechnung

$$\int_a^b \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} \Big|_a^b = -\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \quad (4.4)$$

nur dann korrekt, wenn a und b beide positiv oder beide negativ sind. Ist hingegen a negativ und b positiv, so liegt die Unendlichkeitsstelle 0 innerhalb des Intervalls $[a, b]$, und folglich ist (4.4) in diesem Fall nicht anwendbar.

5 Elementare Eigenschaften des Integrals

Bei der Berechnung bestimmter und unbestimmter Integrale von Funktionen, die aus Funktionen zusammengesetzt sind, deren Stammfunktionen wir bereits kennen, helfen einige elementare Sachverhalte, die unmittelbar aus der Definition des Integrals folgen. Etwas ausgefeiltere Methoden werden im darauffolgenden Abschnitt besprochen.

- **Integral einer Summe:** Es gilt

$$\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx \quad (5.1)$$

und

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx. \quad (5.2)$$

In Worten: Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale¹².

Beispiel¹³:

$$\int (x^2 + \sin(x)) \, dx = \int x^2 \, dx + \int \sin(x) \, dx = \frac{x^3}{3} - \cos(x) + C. \quad (5.3)$$

¹² In (5.1) schreiben wir auf der rechten Seite keine Integrationskonstante an, da ohnehin in den beiden unbestimmten Integralen Integrationskonstanten enthalten sind.

¹³ Von jedem der beiden unbestimmten Integrale zwischen den Gleichheitszeichen kommt eine Integrationskonstante. Deren Summe, die ja wieder nur eine frei wählbare Konstante ist, wurde mit C bezeichnet.

- **Integral eines Vielfachen:** Ist c eine reelle Zahl (also eine Konstante), so gilt

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx \quad (5.4)$$

und

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx. \quad (5.5)$$

In Worten: Das Integral eines Vielfachen ist das Vielfache des Integrals.

Beispiel¹⁴:

$$\int 6 x^2 dx = 6 \int x^2 dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} + C = 2 x^3 + C. \quad (5.6)$$

- **Integral einer Linearkombination:** Eine Linearkombination von Funktionen ist eine „Summe von Vielfachen“, beispielsweise eine Funktion der Form $r f + s g$, wobei f und g Funktionen und r und s reelle Zahlen sind. Aus den beiden vorangegangenen Regeln folgt, dass das Integral einer Linearkombination die Linearkombination der Integrale ist:

$$\int (r f(x) + s g(x)) dx = r \int f(x) dx + s \int g(x) dx \quad (5.7)$$

und

$$\int_a^b (r f(x) + s g(x)) dx = r \int_a^b f(x) dx + s \int_a^b g(x) dx, \quad (5.8)$$

und entsprechende Regeln gelten für Linearkombinationen mit mehr als zwei Summanden.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \int (6 x^2 - 5 \sin(x)) dx &= 6 \int x^2 dx - 5 \int \sin(x) dx = \\ &= 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 5 \cos(x) + C = 2 x^3 + 5 \cos(x) + C. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Für Integrale von Produkten, Quotienten und Verkettungen von Funktionen stehen keine einfachen Regeln zur Verfügung, die immer funktionieren würden. Dieser Unterschied zur Differentialrechnung (wo es eine Produktregel, eine Quotientenregel und eine Kettenregel zur Berechnung der Ableitung gibt) macht das Integrieren zu einer schwierigeren Angelegenheit als das Differenzieren. Für das Integrieren gibt es kein „Kochrezept“, das immer anwendbar

¹⁴ Vom Integral $\int x^2 dx$ kommt eine Integrationskonstante, deren 6-faches ja wieder nur eine frei wählbare Konstante ist, die wir mit C bezeichnen.

wäre. Es gibt sogar (viele) Funktionen, deren Stammfunktionen sich nicht durch „geschlossene“ Terme ausdrücken lassen, also durch Terme, die aus uns bekannten Funktionstermen aufgebaut sind. Beispiele dafür sind

$$\int e^{-x^2} dx \quad \text{und} \quad \int \frac{\sin(x)}{x} dx. \quad (5.10)$$

Werden derartige Integrale oft benötigt, so gibt man den Funktionen, die sie darstellen, eigene Namen (wie beispielsweise „Fehlerfunktion“ – in der Statistik wichtig – und „Integralsinus“ für Funktionen, die mit Hilfe der Stammfunktionen in (5.10) gebildet werden) und berechnet ihre Funktionswerte mit eigens dafür geschaffenen numerischen Methoden (natürlich am Computer). Ein weiteres Beispiel für ein Integral, das nicht geschlossen durch elementare Funktionen ausgedrückt werden kann, ist das Integral (6.19), (6.20), das wir später besprechen werden.

Eine letzte Eigenschaft des bestimmten Integrals, die wir in diesem Abschnitt erwähnen, ist

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx. \quad (5.11)$$

Für $a < b < c$ besagt diese Beziehung, dass der (orientierte) Flächeninhalt im Intervall $[a, c]$ auch erhalten werden kann, indem man ihn für $[a, b]$ und $[b, c]$ getrennt berechnet und die beiden Anteile addiert (siehe Abbildung 5). Das wird unter anderem benutzt, um Integrale über stückweise termdefinierte Funktionen¹⁵ zu berechnen. Mit (1.21) gilt (5.11) für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$.

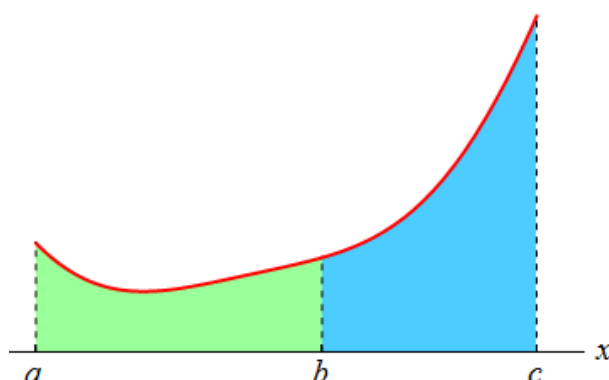


Abbildung 5: Illustration zu (5.11) für $a < b < c$. Der (orientierte) Flächeninhalt zwischen Graph (rote Linie) und erster Achse im Intervall $[a, c]$ ist die Summe der entsprechenden (orientierten) Flächeninhalte in den Intervallen $[a, b]$ und $[b, c]$.

¹⁵ Siehe das Skriptum *Der Funktionenzoo*.

6 Einige Integrationsmethoden

Wie bereits erwähnt, ist das Integrieren schwieriger als das Differenzieren, da es kein „Kochrezept“ für Integrale von Produkten und Verkettungen gibt. Manchmal gelingt es, Stammfunktionen zu erraten, aber für den Fall, dass das nicht klappt, stehen einige Regeln, die unter Umständen weiterhelfen, zur Verfügung. Zuvor aber ein Tipp, den Sie immer befolgen können:

- **Integrieren mit dem Computer:** Zögern Sie nicht, beim Integrieren die Hilfe des Computers in Anspruch zu nehmen! Computeralgebrasysteme (wie *Mathematica* oder *GeoGebra*) haben viele Integrationsverfahren und die Erfahrung von Generationen eingebaut, um – sowohl unbestimmte als auch bestimmte – Integrale zu berechnen. Wenn Sie Ihre Berechnungen lieber auf dem Papier ausführen, können Sie die Stammfunktionen, die diese Programme ausgeben, überprüfen, indem Sie sie differenzieren. Falls einmal kein befriedigendes Ergebnis ausgegeben, sondern lediglich die Eingabe wiederholt (*Mathematica*) oder ein Fragezeichen ausgegeben wird (*GeoGebra*), so können Sie realistischerweise davon ausgehen, dass Sie ebenfalls keine Stammfunktion finden werden! In den meisten dieser Fälle wird es dann gar keinen geschlossenen Term für die Stammfunktion geben¹⁶. Wird statt eines Funktionsterms ein (Ihnen unbekannter) Funktionsname ausgegeben, so können Sie eine der vielen Quellen im WWW nutzen, um sich über die betreffende Funktion zu informieren. Fazit: Machen Sie sich bitte damit vertraut, wie das Integrieren mit dem Computerwerkzeug Ihrer Wahl durchgeführt wird!

Konsultieren Sie den Rest dieses Abschnitts, wenn Sie kompliziertere Integrale als die bisher besprochenen auf dem Papier berechnen müssen und es erst mal ohne Computer probieren wollen!

- **Substitutionsmethode für unbestimmte Integrale:** Die Substitutionsmethode besteht darin, bei der Berechnung eines (bestimmten oder unbestimmten) Integrals anstelle der (als x bezeichneten) Integrationsvariable eine andere Integrationsvariable (wir nennen sie u) einzuführen, mit deren Hilfe sich das Integral leichter berechnen lässt. (Es wird also die Variable x durch eine neue Variable u ersetzt – „substituiert“ –, woraus sich der Name dieser Methode erklärt.) Im Idealfall handelt es sich beim Übergang von der Variable x zur Variable u um eine *Variablentransformation*, d.h. um eine umkehrbare Entsprechung $x \leftrightarrow u$. Jedem Wert von x entspricht dann genau ein Wert von u und umgekehrt. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist es möglich, wahlweise u als Funktion von x aufzufassen oder x als Funktion von u . Wir werden im Folgenden die Substitutionsmethode für diesen Fall besprechen und danach auf den Fall eingehen, dass der Übergang von x zu u nicht umkehrbar ist. Dabei behandeln wir zuerst unbestimmte Integrale und im darauffolgenden Punkt bestimmte Integrale.

Die Methode der Variablentransformation (wir nennen sie **Methode 1**) sei anhand eines Beispiels demonstriert: Angenommen, wir stehen vor der Aufgabe, das unbestimmte Integral $\int x \sin(x^2) dx$ zu berechnen, und haben die Vermutung (oder Hoffnung), dass sich die Integration vereinfachen wird, wenn $u = x^2$ als neue Variable verwendet wird.

¹⁶ Das bedeutet nicht, dass die Stammfunktion in einem solchen Fall nicht existieren würde. Sie lässt sich nur – höchstwahrscheinlich – nicht „geschlossen darstellen“.

Damit diese Beziehung umgekehrt werden kann, müssen wir uns auf einen der Bereiche $x \geq 0$ oder $x \leq 0$ beschränken. Wir wählen den Bereich $x \geq 0$, in dem die Umkehrtransformation durch $x = \sqrt{u}$ gegeben ist¹⁷. Der springende Punkt besteht nun darin, durch die Berechnung einer Ableitung dx durch u und du auszudrücken¹⁸:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} x^2 = 2x = 2\sqrt{u}, \quad \text{daher} \quad dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}. \quad (6.1)$$

Die gleiche Umrechnungsformel kann auch so erzielt werden:

$$\frac{dx}{du} = \frac{d}{du} \sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad \text{daher} \quad dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}. \quad (6.2)$$

Nun können wir das Integral gänzlich durch die Variable u ausdrücken:

$$\begin{aligned} \int x \sin(x^2) dx &= \int \sqrt{u} \sin(u) \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int \sin(u) du = \\ &= -\frac{1}{2} \cos(u) + C = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + C. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Im letzten Schritt wurde das Ergebnis wieder durch die ursprüngliche Variable x ausgedrückt („rücksubstituiert“). Sehen Sie sich genau an, wie sich die Vereinfachung ergeben hat: Es konnte \sqrt{u} gegen $\frac{1}{\sqrt{u}}$ gekürzt werden. Die gleiche Methode hätte beim Integral $\int \sin(x^2) dx$ keine Vereinfachung gebracht. (Versuchen Sie es!)

Das in (6.3) erzielte Ergebnis gilt zunächst nur im Bereich $x \geq 0$. Wenden Sie zur Übung die gleiche Methode für den Bereich $x \leq 0$ an! Das Ergebnis wird (durch x ausgedrückt) der gleiche Term sein¹⁹.

Besonders häufig benutzte Variablentransformationen sind (mit Konstanten c und k , wobei $k \neq 0$):

$$u = x + c, \quad \text{woraus folgt: } dx = du \quad (6.4)$$

$$u = kx, \quad \text{woraus folgt: } dx = \frac{du}{k}. \quad (6.5)$$

¹⁷ Im Bereich $x \leq 0$ würde sie $x = -\sqrt{u}$ lauten.

¹⁸ Hier zeigt sich ganz praktisch, dass – wie bereits erwähnt – die Symbole dx und du beim Differenzieren und beim Integrieren im Grunde das Gleiche bedeuten.

¹⁹ Eine andere Methode, das einzusehen, besteht darin, die Beziehung $\frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{2} \cos(x^2)\right) = x \sin(x^2)$ zu überprüfen. Sie gilt ganz allgemein, also auch im Bereich $x \leq 0$. Wären wir durch ein bisschen Probieren auf diese Beziehung gestoßen, so hätten wir die gesuchte Stammfunktion sogleich gekannt und uns die Variablentransformation sparen können! Viele mathematische Ergebnisse können auf unterschiedlichen Wegen erzielt werden!

Damit berechnen wir beispielsweise

$$\int \frac{dx}{(x-4)^2} = (\text{mit } u = x-4) = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{x-4} + C \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \int \sin(3x) dx &= (\text{mit } u = 3x) = \int \sin(u) \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int \sin(u) du = \\ &= -\frac{1}{3} \cos(u) + C = -\frac{1}{3} \cos(3x) + C \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\int e^{-x} dx = (\text{mit } u = -x) = - \int e^u du = -e^u + C = -e^{-x} + C. \quad (6.8)$$

Mit ein bisschen *trial and error* kann man diese Stammfunktionen aber auch „erraten“²⁰.

Wir wollen nun noch eine etwas allgemeinere Variante der Substitutionsmethode, die wir **Methode 2** nennen, besprechen: Bisher haben wir vorausgesetzt, dass der Übergang von x zur neuen Variable u im betrachteten Bereich umkehrbar ist. Manchmal kommt man auch ohne diese Voraussetzung aus. Betrachten wir ein Integral der Form

$$\int g(u(x)) u'(x) dx, \quad (6.9)$$

wobei g und u Funktionen sind. Ist G eine Stammfunktion von g , so gilt (gemäß der Kettenregel)

$$\frac{d}{dx} G(u(x)) = G'(u(x)) u'(x) = g(u(x)) u'(x), \quad (6.10)$$

was genau gleich dem Integranden von (6.9) ist. Damit ist eine Stammfunktion gefunden, und das Integral kann berechnet werden:

$$\int g(u(x)) u'(x) dx = G(u(x)) + C. \quad (6.11)$$

Um dieses Ergebnis zu erhalten, kann formal auch so vorgegangen werden: Zunächst wird $\frac{du}{dx} = u'(x)$ zu

$$du = u'(x) dx \quad (6.12)$$

und damit zu

$$dx = \frac{du}{u'(x)} \quad (6.13)$$

umgeformt. Wird im Integranden anstelle von $g(u(x))$ einfach $g(u)$ geschrieben, vereinfacht sich das Integral folgendermaßen:

$$\int g(u(x)) u'(x) dx = \int g(u) u'(x) \frac{du}{u'(x)} = \int g(u) du = G(u) + C, \quad (6.14)$$

²⁰ Sie können sich ganz allgemein mit Hilfe der Kettenregel davon überzeugen, dass eine Stammfunktion von $f(kx+c)$ durch $\frac{1}{k} F(kx+c)$ gegeben ist, wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

was nun wieder als $G(u(x)) + C$ geschrieben werden kann. Beachten Sie, wie die zunächst verbliebene x -Abhängigkeit weggefallen ist: Es konnte $u'(x)$ gegen $\frac{1}{u'(x)}$ gekürzt werden.

An keiner Stelle wurde vorausgesetzt, dass die Funktion u umkehrbar ist. Wird die Struktur des Integranden in (6.9) gleich von Beginn an erkannt, muss man nicht so vorgehen, da sich die Lösung mit (6.11) ja ohnehin sofort ergibt. Aber bei komplizierteren Integranden kann es auch mal passieren, dass man einen Kandidaten für $u(x)$ erkennt, aber nicht sicher ist, ob die Gesamtstruktur des Integrals wirklich von der Form (6.9) ist. In einem solchen Fall kann das Integral zunächst mit Hilfe von (6.13) umgeschrieben werden. Dann muss versucht werden, ob die Sache aufgeht: Wenn die verbleibenden, noch von x abhängigen Teilausdrücke im Integranden entweder im betrachteten Bereich als Funktionen von $u(x)$ geschrieben werden können oder sich herauskürzen, ergibt sich ein Integral, in dem nur mehr die Variable u vorkommt. Auf das Integral $\int x \sin(x^2) dx$, das wir in (6.3) bereits berechnet haben, angewandt, sieht Methode 2 so aus: Mit $u(x) = x^2$ wird

$$du = u'(x) dx = 2x dx, \quad \text{daher} \quad dx = \frac{du}{2x}. \quad (6.15)$$

Das wird in das Integral eingesetzt (und x^2 durch u ersetzt):

$$\begin{aligned} \int x \sin(x^2) dx &= \int x \sin(u) \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int \sin(u) du = \\ &= -\frac{1}{2} \cos(u) + C = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + C. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Im letzten Schritt wurde u wieder durch x^2 ersetzt. Es ergibt sich das gleiche Ergebnis wie in (6.3), aber aufgrund der geänderten Art der Argumentation wissen wir nun, dass es ganz allgemein gilt, während (6.3) nur für den Bereich $x \geq 0$ gewonnen wurde. Der entscheidende Unterschied ist, dass wir bei der Vorgangsweise in (6.16) nicht darauf angewiesen sind, x durch u auszudrücken, dass also die Entscheidung, ob $x = \sqrt{u}$ oder $x = -\sqrt{u}$ gesetzt werden soll, gar nicht notwendig war.

Die beiden Methoden sind eng verwandt. Falls beim Versuch, Methode 2 anzuwenden, im betrachteten Bereich die Umkehrfunktion u^{-1} von u existiert, so kann mit Hilfe der Identität

$$x = u^{-1}(u(x)) \quad (6.17)$$

jede verbleibende x -Abhängigkeit im Integranden als Funktion von $u(x)$ geschrieben werden. In diesem Fall reduziert sich Methode 2 auf Methode 1, d.h. auf eine Variablentransformation $x \leftrightarrow u$, wie sie zuvor besprochen wurde. Falls u aber im betrachteten Bereich keine Umkehrfunktion besitzt und dennoch im Integranden eine Abhängigkeit von x verbleibt, die nicht als Funktion von $u(x)$ ausgedrückt werden kann, funktioniert Methode 2 nicht. Sehen wir uns das anhand unseres letzten Beispiels $\int x^2 \sin(x^4) dx$ an: Wir setzen (vermuten) in diesem Fall $u(x) = x^4$ und berechnen

$$du = u'(x) dx = 4x^3 dx, \quad \text{daher} \quad dx = \frac{du}{4x^3}. \quad (6.18)$$

Damit wird

$$\int x^2 \sin(x^4) dx = \int x^2 \sin(u) \frac{du}{4x^3} = \frac{1}{4} \int \sin(u) \frac{du}{x}. \quad (6.19)$$

Das verbleibende x im Integranden kann nun nicht mehr als Funktion von u ausgedrückt werden. Methode 2 mit $u(x) = x^4$ funktioniert hier nicht! Wir können uns aber auf den Bereich $x \geq 0$ beschränken (also zu Methode 1 zurückkehren). In diesem Bereich lässt sich die Beziehung $u = x^4$ zu $x = u^{1/4}$ umkehren²¹, und wir können das Integral in die Form

$$\frac{1}{4} \int \sin(u) \frac{du}{x} = \frac{1}{4} \int \sin(u) \frac{du}{u^{1/4}} = \frac{1}{4} \int u^{-1/4} \sin(u) du \quad (6.20)$$

bringen. Leider ist hier trotzdem Endstation, denn das auf diese Weise erhaltene Integral ist nicht einfacher als das ursprüngliche!

- **Substitutionsmethode für bestimmte Integrale:** Soll ein *bestimmtes* Integral berechnet werden, für das die Stammfunktion durch eine Transformation auf eine neue Variable u gefunden werden kann, so muss man die Stammfunktion nicht unbedingt durch die ursprüngliche Variable x ausdrücken. Es genügt, die Integrationsgrenzen in die entsprechenden Werte von u umzurechnen. Das gilt sowohl für Methode 1 als auch für Methode 2. Lautet die Substitution beispielsweise $u = 3x$ und sind die Grenzen 0 (also $x_{\text{untere Grenze}} = 0$) und 2 (also $x_{\text{obere Grenze}} = 2$), so ist $u_{\text{untere Grenze}} = 3 \cdot 0 = 0$ und $u_{\text{obere Grenze}} = 3 \cdot 2 = 6$. Damit können wir beispielsweise berechnen

$$\begin{aligned} \int_0^2 e^{3x} dx &= (\text{mit } u = 3x) = \int_0^6 e^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int_0^6 e^u du = \\ &= \frac{1}{3} e^u \Big|_0^6 = \frac{1}{3} (e^6 - e^0) = \frac{1}{3} (e^6 - 1), \end{aligned} \quad (6.21)$$

ohne die Stammfunktion $\frac{1}{3} e^u$ wieder durch x ausdrücken zu müssen. Um in der Schreibweise ganz deutlich zu machen, dass die Grenzen jetzt nicht für x , sondern für u eingesetzt werden, können Sie

$$\frac{1}{3} e^u \Big|_{u=0}^{u=6} \quad \text{statt} \quad \frac{1}{3} e^u \Big|_0^6 \quad (6.22)$$

schreiben. Eine solche Notation ist insbesondere dann praktisch, wenn in einer Anwendungssituation unterschiedliche Symbole vorkommen, von denen eines die Integrationsvariable bezeichnet und die anderen lediglich Konstanten sind. So ist beispielsweise klar, was mit

$$e^{2r+s} \Big|_{s=0}^{s=1} \quad (6.23)$$

gemeint ist (nämlich $e^{2r+1} - e^{2r}$), während das bei der Schreibweise

$$e^{2r+s} \Big|_0^1 \quad (6.24)$$

nicht der Fall ist.

²¹ Beachten Sie: Im Bereich $x \leq 0$ wäre $x = -u^{1/4}$ zu setzen.

- **Methode der partiellen Integration:** Ist F eine Stammfunktion von f und ist g eine weitere Funktion, so gilt aufgrund der Produktregel

$$\left(F(x)g(x)\right)' = F'(x)g(x) + F(x)g'(x) = f(x)g(x) + F(x)g'(x). \quad (6.25)$$

Daher ist $F(x)g(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)g(x) + F(x)g'(x)$, und es gilt

$$\int \left(f(x)g(x) + F(x)g'(x)\right) dx = F(x)g(x) + C. \quad (6.26)$$

Das schreiben wir in die Form

$$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx \quad (6.27)$$

um (wobei wir nun die Integrationskonstante weglassen, weil eine solche ohnehin im Integral auf der rechten Seite enthalten ist). Formel (6.27) wird vor allem dann angewandt, wenn sich das Integral auf der rechten Seite einfacher berechnen lässt als das auf der linken. Diese Methode heißt *partielle Integration*. Sehen Sie sich die Struktur von (6.27) genau an: Es ist das Integral eines Produkts zu berechnen. Ist

- die Stammfunktion eines der beiden Faktoren bekannt,
- und ergibt sich eine Vereinfachung, wenn dieser Faktor durch seine Stammfunktion und der andere Faktor durch seine Ableitung ersetzt wird,

so kann die Methode der partiellen Integration angewandt werden.

Wir illustrieren das anhand eines Beispiels: Wir sollen $\int \sin(x)x dx$ berechnen. Mit $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x$ ist $F(x) = -\cos(x)$ und $g'(x) = 1$. Damit wird

$$\int \sin(x)x dx = -\cos(x)x + \int \cos(x) \cdot 1 dx = -\cos(x)x + \sin(x) + C. \quad (6.28)$$

Integral erfolgreich berechnet! Aber Achtung: Ist die Aufgabe gestellt, $\int x \sin(x) dx$ zu berechnen (die gleiche Aufgabe wie zuvor, nur anders angeschrieben), so bringt es nichts, $f(x) = x$ und $g(x) = \sin(x)$ zu setzen, denn dann handelt man sich ein Integral über $x^2 \cos(x)$ ein. Beim partiellen Integrieren ist also zuerst zu überlegen, welcher Faktor die Rolle von $f(x)$ und welcher die Rolle von $g(x)$ spielen soll!

Besonders reizvoll nimmt sich diese Methode aus, wenn sie auf das unbestimmte Integral $\int \sin(x) \cos(x) dx$ angewandt wird. Mit $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} \int \sin(x) \cos(x) dx &= -\cos(x) \cos(x) - \int (-\cos(x))(-\sin(x)) dx = \\ &= -\cos^2(x) - \int \cos(x) \sin(x) dx. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Nun steht das zu berechnende Integral auch rechts vom letzten Gleichheitszeichen, allerdings (und glücklicherweise) mit einem Minuszeichen! Bezeichnen wir es mit I , so gilt also

$$I = -\cos^2(x) - I, \quad (6.30)$$

was wir als *Gleichung* für I auffassen, die sofort gelöst werden kann: Wir addieren I zu beiden Seiten dieser Beziehung, dividieren danach beide Seiten durch 2 und erhalten

$$\int \sin(x) \cos(x) dx = -\frac{1}{2} \cos^2(x) + C, \quad (6.31)$$

wobei wir pflichtbewusst wieder die Integrationskonstante dazugeschrieben haben.

Für bestimmte Integrale ist die partielle Integration gemäß der Formel

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = F(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x) g'(x) dx \quad (6.32)$$

durchzuführen.

7 Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir als Integrationsbereiche beschränkte Intervalle betrachtet, und in unseren Beispielen war der Integrand im gesamten Integrationsbereich einschließlich der Integrationsgrenzen endlich. Beides ist nicht unbedingt erforderlich, wie die beiden folgenden Beispiele zeigen:

- Das bestimmte Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + 1 = 1, \quad (7.1)$$

bei dessen Berechnung im letzten Schritt nicht $\frac{1}{\infty}$ geschrieben, sondern ein Grenzübergang durchgeführt wurde, stellt die Berechnung des Inhalts einer Fläche dar, die sich (für beliebig große x -Werte) bis ins Unendliche erstreckt. (Siehe Abbildung 6, links oben: Das Flächenstück, das sich „nach rechts“ bis ins Unendliche erstreckt, hat einen endlichen Flächeninhalt.)

- Das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2 \quad (7.2)$$

stellt ebenfalls die Berechnung des Inhalts einer Fläche dar, die sich aber nun für Werte $x \rightarrow 0$ bis ins Unendliche erstreckt. (Siehe Abbildung 6, rechts oben: Das Flächenstück, das sich „nach oben“ bis ins Unendliche erstreckt, hat einen endlichen Flächeninhalt.)

Integrale dieser Art heißen *uneigentliche Integrale*. Nicht jedes uneigentliche Integral führt auf einen endlichen Wert, wie die Beispiele

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln(x) \Big|_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) - \ln(1) = \infty \quad (7.3)$$

und

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln(x) \Big|_0^1 = \ln(1) - \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = \infty \quad (7.4)$$

zeigen²². (Siehe Abbildung 6, unten: Beide Flächenstücke, die sich „nach rechts“ und „nach oben“ bis ins Unendliche erstrecken, haben einen unendlich großen Flächeninhalt.)

Zwei weitere, für Anwendungen wichtige uneigentliche Integrale sind

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (7.5)$$

Das erste lässt sich mit den uns zur Verfügung stehenden Methoden leicht berechnen (versuchen Sie es!). Die Begründung des zweiten geht über den Stoff dieses Skriptums hinaus.

²² Lesen Sie im Skriptum *Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Graphen* nach, wenn Ihnen nicht klar ist, warum $\ln(0)$ nicht existiert und warum $\ln(x)$, salopp ausgedrückt, gegen $-\infty$ strebt, wenn x von positiven Werten her der Stelle 0 beliebig nahe rückt!

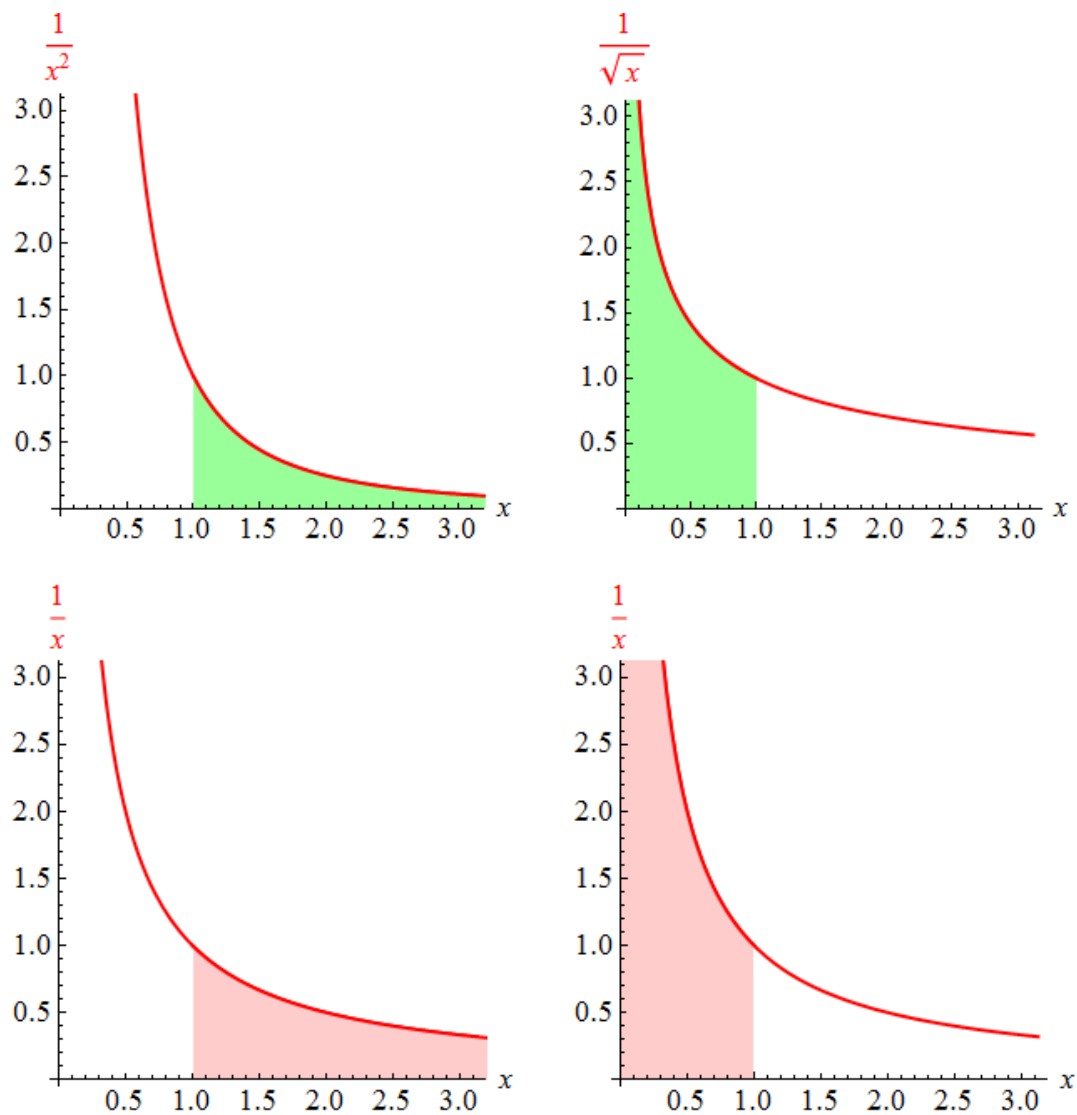


Abbildung 6: Durch uneigentliche Integrale berechnete Flächeninhalte:

- Links oben: Der Inhalt des hervorgehobenen (bis ins Unendliche reichenden) Flächenstücks ist endlich und durch (7.1) gegeben.
- Rechts oben: Der Inhalt des hervorgehobenen (bis ins Unendliche reichenden) Flächenstücks ist endlich und durch (7.2) gegeben.
- Links unten: Der Inhalt des hervorgehobenen (bis ins Unendliche reichenden) Flächenstücks ist unendlich. Siehe (7.3).
- Rechts unten: Der Inhalt des hervorgehobenen (bis ins Unendliche reichenden) Flächenstücks ist unendlich. Siehe (7.4).

8 Anhang: Riemannsche Summen

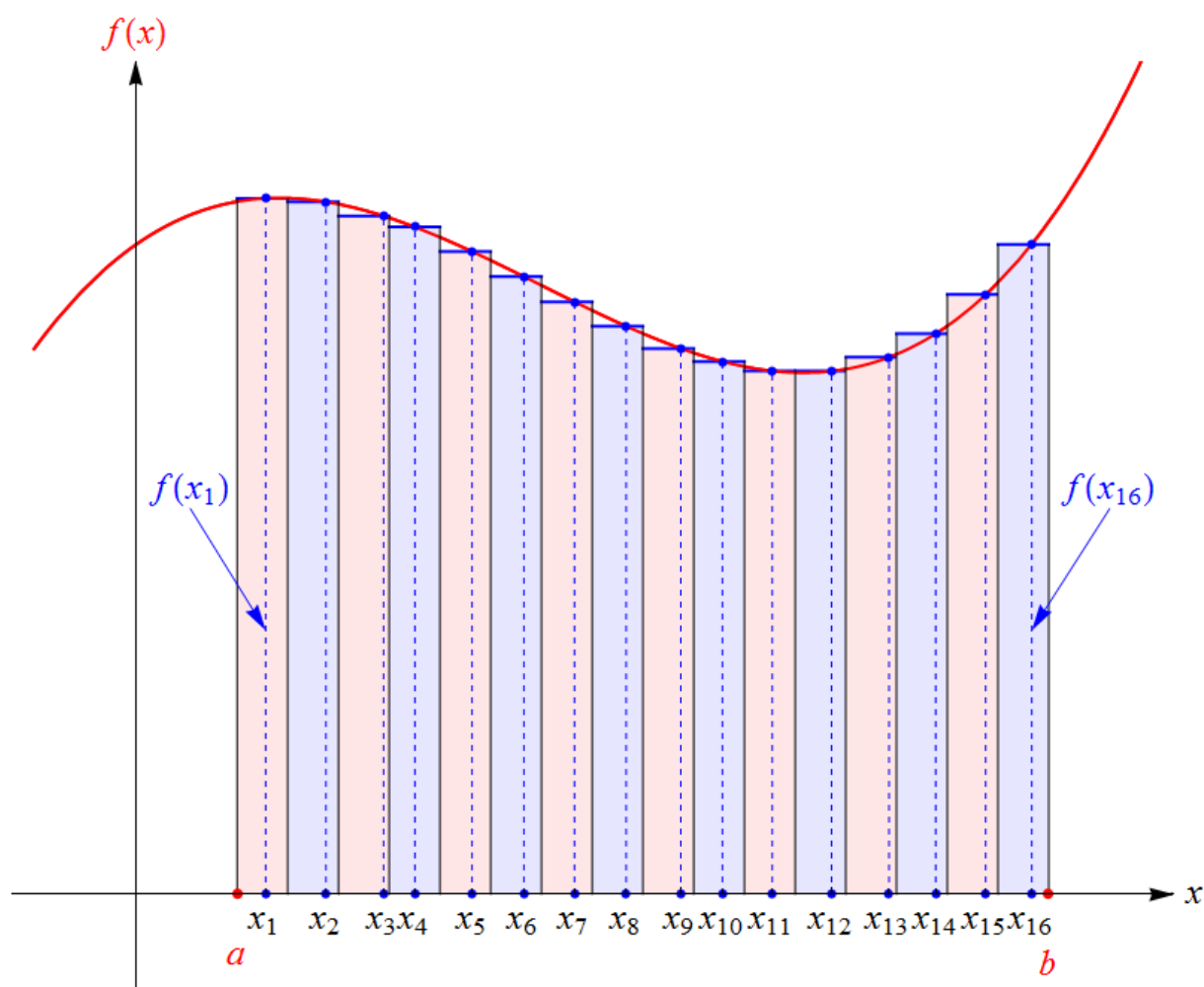


Abbildung 7: Eine Riemannsche Summe: Der Integrationsbereich $[a, b]$ wird in n Teilintervalle zerlegt (hier ist $n = 16$ gewählt), und innerhalb jedes Teilintervalls wird eine beliebige Stelle gewählt, deren Funktionswert die „Höhe“ eines Rechtecks bestimmt. Die erste und die letzte dieser Höhen sind mit $f(x_1)$ und $f(x_{16})$ beschriftet. Der (orientierte) Gesamtflächeninhalt dieser Rechtecke ist eine Riemannsche Summe. Ist f eine integrierbare Funktion, so strebt die Riemannsche Summe im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ gegen das bestimmte Integral.

Wir haben uns bei der Definition des Integralbegriffs auf unsere Intuition über den Verlauf von Funktionsgraphen verlassen. Hier zum Abschluss dieses Skriptums die genaue Definition des bestimmten Integrals: Um zunächst eine Annäherung an den orientierten Flächeninhalt zwischen Graph und erster Achse zu finden, unterteilen wir das Intervall $[a, b]$ in n gleich große Teilintervalle²³, wobei wir ihre Anzahl n offen lassen. Jedes Teilintervall hat demnach die Länge

$$h = \frac{b - a}{n}. \quad (8.1)$$

²³ Die folgende Konstruktion kann auch für Teilintervalle unterschiedlicher Länge durchgeführt werden, aber wir wollen unsere Beschreibung so einfach wie möglich halten.

In jedem dieser n Teilintervalle wählen wir eine Stelle, und diese Stellen bezeichnen wir mit x_1, x_2, \dots, x_n . In Abbildung 7 ist eine solche Situation für $n = 16$ dargestellt. Die Approximation des orientierten Flächeninhalts als Summe von (orientierten) Rechtecksflächen

$$f(x_1)h + f(x_2)h + \dots + f(x_n)h \quad (8.2)$$

oder, kompakter mit dem Summensymbol angeschrieben²⁴,

$$\sum_{k=1}^n f(x_k)h \quad (8.3)$$

heißt *Riemannsche Summe*²⁵. Falls nun im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ (d.h. bei immer feiner werdender Unterteilung des Integrationsbereichs)

- die Riemannsche Summe (8.2) stets gegen ein und dieselbe Zahl K strebt,
- und zwar unabhängig davon, wie die Zwischenstellen x_1, x_2, \dots, x_n gewählt werden,

so nennen wir die Funktion f (*Riemann-*)*integrierbar* und bezeichnen die Zahl K als das (*Riemann-*)*Integral* von f über das Intervall $[a, b]$, geschrieben als $\int_a^b f(x) dx$.

Für eine sehr feine Unterteilung des Integrationsbereichs ist dann

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n f(x_k)h. \quad (8.4)$$

Hier begegnen wir wieder der bereits im zweiten Abschnitt diskutierten Deutung des bestimmten Integrals als (Grenzwert einer) Summe von Produkten. Das Integralzeichen \int_a^b entspricht dem Bilden der Summe über die n Teilintervalle:

$$\int_a^b \longleftrightarrow \sum_{k=1}^n. \quad (8.5)$$

Der Integrand $f(x)$ entspricht den Funktionswerten $f(x_k)$ an den in den Teilintervallen gewählten Stellen x_k und damit der Höhe der einzelnen Rechtecke in Abbildung 7:

$$f(x) \longleftrightarrow f(x_k). \quad (8.6)$$

Das Symbol dx entspricht der Länge h der Teilintervalle und damit der Breite der Rechtecke in Abbildung 7:

$$dx \longleftrightarrow h. \quad (8.7)$$

²⁴ Diese Schreibweise für Summen wurde im Skriptum *Der binomische Lehrsatz und die Binomialkoeffizienten* eingeführt und erläutert.

²⁵ Nach Bernhard Riemann (1826 – 1866).

Das Produkt $f(x) dx$ schließlich entspricht dem (orientierten) Flächeninhalt $f(x_k) h$ der einzelnen Rechtecke in Abbildung 7:

$$f(x) dx \longleftrightarrow f(x_k) h. \quad (8.8)$$

Oft wird statt h das Symbol Δx verwendet. Damit sehen diese Entsprechungen noch suggestiver aus, insbesondere die letzten beiden:

$$dx \longleftrightarrow \Delta x, \quad (8.9)$$

$$f(x) dx \longleftrightarrow f(x_k) \Delta x. \quad (8.10)$$

Manchmal werden die Zwischenstellen x_1, x_2, \dots, x_n so gewählt, dass jeder ihrer Funktionswerte eine untere Schranke der auf das betreffende Teilintervall eingeschränkten Funktion f ist (dann heißt (8.2) eine *Untersumme*) oder dass jeder ihrer Funktionswerte eine obere Schranke der auf das betreffende Teilintervall eingeschränkten Funktion f ist (dann heißt (8.2) eine *Obersumme*). Es ist dann jede Untersumme kleiner-gleich jeder Obersumme. Die Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn zwischen die Menge der Untersummen und die Menge der Obersummen genau eine Zahl passt – diese ist dann das bestimmte Integral.

Diese Betrachtungen haben nicht nur theoretischen Wert, sondern sind auch von praktischer Relevanz: Falls in einer Anwendung ein bestimmtes Integral auftritt, bei dem alle zuvor besprochenen Integrationsmethoden versagen (z.B. weil es keinen geschlossenen Term für die Stammfunktion gibt), so kann man numerische Methoden anwenden, um seinen Wert zu berechnen. Die einfachste besteht darin, eine Riemannsche Summe der Form (8.2) zu berechnen (wobei jede der Zwischenstellen x_1, x_2, \dots, x_n entweder am linken oder am rechten Rand oder genau in der Mitte des entsprechenden Teilintervalls gewählt wird) – eine leichte Aufgabe für einen Computer! Die Theorie garantiert uns dann, dass für hinreichend großes n die Abweichung dieser Näherung vom wahren Wert des Integrals beliebig klein wird.

Fast überflüssig ist es hinzuzufügen, dass Computeralgebrasysteme auch die Kunst des numerischen Integrierens beherrschen.