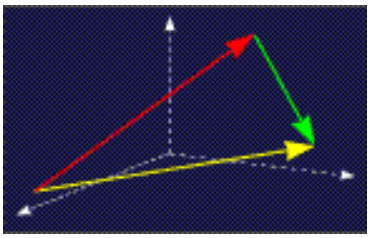
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Funktionsdarstellungen: Term, Graph, Tabelle

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

Dieses Skriptum behandelt die drei wichtigsten Methoden, reelle Funktionen zu definieren bzw. so darzustellen, dass wesentliche Eigenschaften leicht erkannt werden können: durch einen Term, einen Graphen und eine Tabelle.

1 Was ist eine Funktionsdarstellung?

Eine reelle Funktion

$$f : A \to B \tag{1.1}$$

ordnet jedem Element einer Menge A (Definitionsmenge) ein Elemente einer Menge B (Zielmenge) zu, wobei A und B Teilmengen der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind. Dabei

- sind die am häufigsten benötigten Fälle, dass A entweder ganz $\mathbb{R}$ oder ein Intervall[1] ist oder eine Menge, die entsteht, indem aus $\mathbb{R}$ einzelne Elemente herausgenommen werden. Wichtig ist, dass die Menge A so gewählt ist, dass die Zuordnungsvorschrift für *alle* ihre Elemente anwendbar ist (so darf etwa keine Division durch 0 auftreten oder keine Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen werden). Für manche Zwecke (und zur Veranschaulichung der im Zusammenhang mit Funktionen verwendeten Begriffe) wird A bisweilen als endliche Menge (d.h. als Menge mit nur endlich vielen Elementen) gewählt. Um die Eintragungen einer unendlichen Liste durchzunummerieren, wird $A = \mathbb{N}$ oder $A = \mathbb{N}^*$ benötigt.
- Die Wahl von B hingegen ist weniger kritisch: Diese Menge dient als „Vorrat“ möglicher Funktionswerte. Da jeder Funktionswert einer reellen Funktion reell ist, kann man immer $B = \mathbb{R}$ setzen, auch wenn nicht alle reellen Zahlen als Funktionswerte auftreten (bzw. wenn man nicht von vornherein weiß, welche Funktionswerte auftreten).

Wir werden in diesem Skriptum daher in den meisten Fällen Funktionen $A \to \mathbb{R}$ betrachten. (Nur in einem einzigen Beispiel werden wir B als echte Teilmenge von $\mathbb{R}$ wählen.)

[1] Zum Begriff des Intervalls siehe das Skriptum über die *Ordnung der reellen Zahlen*.

Eine reelle Funktion **darzustellen**, kann nun zweierlei bedeuten:

- Informationen anzugeben, die sie eindeutig festlegen. Das tun wir, neben der Angabe von Definitions- und Zielmenge, in der Regel mit Hilfe einer Funktionsgleichung, die die betreffende Funktion durch einen Funktionsterm definiert.
- Informationen anzugeben, die wesentliche Eigenschaften der Funktion in einer für uns leicht verständlichen Weise anzeigen. Neben der Darstellung einer Funktion mit Hilfe eines Terms tun wir das vor allem, indem wir Graphen zeichnen und Tabellen anlegen.

Zu einem guten Verständnis des Funktionsbegriffs gehört es, die in solchen Darstellungen enthaltenen Informationen aufeinander beziehen zu können.

2 Funktionsgleichung und Funktionsterm

Eine **Funktionsgleichung** ist die Angabe der Funktionswerte $f(x)$ für alle $x \in A$ mit Hilfe eines Terms (des **Funktionsterms**). Ein Beispiel ist

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ f(x) &= x^2 + \frac{1}{x}\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Hier ist also $A = \mathbb{R}^*$ gewählt[2] (die Menge der von 0 verschiedenen reellen Zahlen).

> **Anmerkung zur Angabe der Definitionsmenge**: Wenn man *weiß*, dass zu einer ordentlichen Funktionsdefinition die Angabe einer Definitionsmenge gehört, kann man es sich erlauben, manchmal etwas nachlässig zu sein. Ist eine Funktion (etwa in einer Übungsaufgabe) nur über ihren Funktionsterm definiert, ohne dass eine Definitionsmenge angegeben ist, so ist in der Regel damit gemeint, dass die Definitionsmenge A die größtmögliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, für die der Funktionsterm definiert ist. Wenn Sie also etwa irgendwo die Angabe
>
> $$g(x) = x^2 - 3\sqrt{x} \tag{2.2}$$
>
> sehen, ohne dass eine Definitionsmenge dabei steht, so können Sie annehmen, dass $A = \mathbb{R}_0^+$, also die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen, gemeint ist (denn für negative x wäre $\sqrt{x}$ nicht definiert). Im Fall von
>
> $$h(x) = \frac{4\,x^2 - 2\,x + 7}{(x-1)\,(x-2)} \tag{2.3}$$

[2] Es ist dies die größtmögliche Wahl einer Definitionsmenge, die zum angegebenen Term passt. Die Wahl $A = \mathbb{R}$ wäre nicht möglich gewesen, da der Funktionsterm $x^2 + \frac{1}{x}$ für $x = 0$ nicht definiert ist (Division durch Null!). Die Definitionsmenge kleiner zu wählen (d.h. als echte Teilmenge von $\mathbb{R}$) ist hingegen jederzeit möglich. Falls etwa die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$ irgendeinen (sagen wir physikalischen) Sachverhalt modelliert, in dem x nur positive Werte annehmen kann, so wird man $A = \mathbb{R}^+$ (Menge aller positiven reellen Zahlen) festlegen. Die Wahl von A hängt immer auch davon ab, welchen Sachverhalt eine Funktion darstellt bzw. was man mit ihr machen möchte. Die einzige (unverzichtbare) Bedingung ist, dass $f(x)$ für alle $x \in A$ definiert ist.

wäre $A = \mathbb{R}\backslash\{1,2\}$ gemeint (denn für $x = 1$ und $x = 2$ wäre durch 0 zu dividieren), und im Fall von

$$j(x) = 3\,x^2 - 2\,x + 5 \tag{2.4}$$

wäre $A = \mathbb{R}$ gemeint, da dieser Term (als Polynom) für alle reellen x definiert ist.

Ausgerüstet mit einem Funktionsterm können wir Funktionswerte durch Einsetzen berechnen. Beispiele für Funktionswerte der in (2.1) definierten Funktion f:

$$f(3) = 3^2 + \frac{1}{3} = 9 + \frac{1}{3} = \frac{28}{3} \approx 9.33 \tag{2.5}$$

$$f(-2) = (-2)^2 + \frac{1}{-2} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 3.5 \tag{2.6}$$

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2.71\,. \tag{2.7}$$

3 Abschnittsweise termdefinierte Funktionen

Manche Funktionen können nur durch die Angabe *mehrerer* Terme für unterschiedliche Variablenbereiche charakterisiert werden. Stellen wir uns etwa vor, wir wollen den zeitlichen Verlauf einer elektrischen Spannung modellieren, die zunächst eine Zeitlang konstant ist, nach einer bestimmten Zeit abrupt auf 0 absinkt und danach linear ansteigt. Ist U die (in Volt gemessene) elektrische Spannung und t die (in Sekunden gemessene) Zeit, so setzen wir als Modell die Funktion

$$\begin{aligned} U : \mathbb{R}_0^+ &\to \mathbb{R} \\ U(t) &= \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \le t < 2 \\ t-2 & \text{wenn } t \ge 2 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1}$$

an. Die Spannung hat ab dem Anfangszeitpunkt $t = 0$ zunächst den konstanten Wert 1, d.h. ihr Verlauf wird durch den Term $U(t) = 1$ beschrieben. Ab dem Zeitpunkt $t = 2$ (d.h. 2 Sekunden nach dem Beginn) wird sie durch den linearen Term $s(t) = t - 2$ modelliert, der ein Ansteigen beschreibt (weil $t - 2$ umso größer ist, je größer t ist). Wie durch die Schreibweise in (3.1) ausgedrückt, ist je nach dem betrachteten Bereich von t ein anderer Term zu verwenden (daher der Name „abschnittsweise termdefinierte Funktion“, manchmal auch „stückweise termdefinierte Funktion“ genannt). Um also einen Funktionswert $U(t)$ zu ermitteln, muss zuerst geprüft werden, ob $0 \le t < 2$ oder $t \ge 2$ gilt, und wenn das entschieden ist, muss der entsprechende Term benutzt werden. So berechnen wir beispielsweise

$$U(0.5) = 1 \tag{3.2}$$

$$U(3.5) = 3.5 - 2 = 1.5. \tag{3.3}$$

Um $U(0.5)$ zu berechnen, mussten wir den ersten Term $U(t) = 1$ verwenden, da $0 \le 0.5 < 2$ gilt, und um $U(3.5)$ zu berechnen, mussten wir den zweiten Term $U(t) = t - 2$ verwenden,

da $3.5 \geq 2$ gilt. Ein besonderer Fall ist die Stelle $t = 2$. Hier ist der zweite Term zu verwenden (da $2 \leq 2$ gilt), daher ist

$$U(2) = 2 - 2 = 0. \tag{3.4}$$

Gehen wir zu einem nur minimal früheren Zeitpunkt über, etwa $t = 1.999$, so ist

$$U(1.999) = 1. \tag{3.5}$$

Der Funktionswert von U fällt daher zum Zeitpunkt 2 tatsächlich abrupt auf 0 ab (er macht einen „Sprung“). Die Stelle $t = 2$ heißt daher *Sprungstelle* (oder *Unstetigkeitsstelle*), und eine Funktion, die eine Sprungstelle besitzt, nennen wir eine *unstetige* Funktion[3].

4 Funktionsgraph

Manchmal möchte man sich mit einem Blick über bestimmte Eigenschaften einer Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ orientieren und Fragen beantworten wie: Sind alle Funktionswerte positiv? Gibt es Nullstellen (d.h. Werte der Variablen, an denen der Funktionswert 0 ist)? Nimmt der Funktionswert $f(x)$ zu oder ab, wenn x vergrößert wird (bzw. in welchen Variablenbereichen gilt das eine und in welchen das andere)? Gibt es eine Stelle, an der der Funktionswert maximal oder minimal ist? Kann die Funktion beliebig große Werte annehmen?

Um einen solchen Überblick zu erhalten, ist ein grafische Darstellung angebracht. Dabei gehen wir folgendermaßen vor: Wir wählen (gedanklich) ein Element $x \in A$ und betrachten es gemeinsam mit dem zugehörigen Funktionswert $f(x)$. Das **Zahlenpaar** $(x, f(x))$ fassen wir als **Koordinaten** eines Punktes in der **Zeichenebene** auf. Dazu zeichnen wir zwei aufeinander normal stehende Geraden, die Koordinatenachsen, die beide als Zahlengeraden interpretiert werden. Die „horizontale“ Achse bezeichnen wir als „erste Achse“ (oder **Abszisse**) oder mit einem Namen für die Variable (etwa als „x-Achse“). Die „vertikale“ Achse bezeichnen wir als „zweite Achse“ (oder **Ordinate**) oder als „Achse für $f(x)$“ (oft wird sie auch einfach „y-Achse“ genannt). Am (**Koordinaten**-)**Ursprung**, dem Schnittpunkt der Achsen, liegen auch deren Nullpunkte. Üblicherweise gibt man der ersten Achse einen nach „rechts“ weisenden Pfeil, um anzudeuten, dass die auf ihr dargestellten Zahlen größer werden, wenn man in diese Richtung fortschreitet, und markiert zumindest einen Punkt auf ihr (z.B. 1), um einen Maßstab zum Einzeichnen weiterer Punkte festzulegen. Analog gibt man der zweiten Achse einen nach „oben“ weisenden Pfeil, um anzudeuten, dass die auf ihr dargestellten Zahlen größer werden, wenn man in diese Richtung fortschreitet, und auch auf ihr markiert man zumindest einen Punkt (z.B. 1), um einen Maßstab zum Einzeichnen weiterer Punkte festzulegen. Unserem Zahlenpaar $(x, f(x))$ entspricht nun jener Punkt, den wir, vom Ursprung (dem Schnittpunkt der Achsen) ausgehend, erhalten, indem wir

- „x nach rechts“ (bzw., wenn x negativ ist, die entsprechende Strecke „nach links“) gehen
- und von dort aus „$f(x)$ nach oben“ (bzw., wenn $f(x)$ negativ ist, die entsprechende Strecke „nach unten“) gehen.

[3] Im Gegenzug wird eine Funktion *stetig* genannt, wenn so etwas nicht auftritt, d.h. wenn – etwas salopp ausgedrückt – nahe beieinander liegende Stellen stets nahe beieinander liegende Funktionswerte besitzen.

Umgekehrt können dann an der Lage des Punktes (in der Praxis oft nur näherungsweise) sowohl der Variablenwert x (als erste Koordinate) als auch der Funktionswert $f(x)$ (als zweite Koordinate) abgelesen werden.

Diese Konstruktion machen wir (gedanklich) nun mit *allen* Variablenwerten $x \in A$. Die Menge *aller* Zahlenpaare

$$(\text{Variablenwert}, \text{Funktionswert}) \quad \text{d.h.} \quad (x, f(x)) \tag{4.1}$$

nennen wir **Funktionsgraph** (oder einfach **Graph**) der Funktion f. Formal ist er definiert als die Menge

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A\}, \tag{4.2}$$

also als Menge aller Zahlenpaare $(x, f(x))$, für die $x \in A$ ist. Da jedem Paar $(x, f(x))$ ein Punkt entspricht, interpretieren wir den Graphen von f als **Menge von Punkten** in der Zeichenebene. In vielen Fällen ist diese Menge eine **Linie** (oder besteht aus mehreren **Linien**), die wir (angenähert) zeichnen oder von einem Computerprogramm zeichnen („plotten“) lassen können[4]. Und was wir dann sehen, wenn wir einen solchen Funktionsgraphen betrachten, kann in der Regel die oben gestellten Fragen (und noch viele mehr) beantworten.

Betrachten wir als Beispiel die durch (2.1) definierte Funktion f. Die Definitionsmenge ist $A = \mathbb{R}^*$, die Zuordnungsvorschrift ist

$$x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}\,. \tag{4.3}$$

Wir übergeben den Funktionsterm $x^2 + \frac{1}{x}$ einem Computerprogramm, das Funktionsgraphen plotten kann (die Frage, wie wir das ohne Hilfe elektronischer Werkzeuge machen können, schieben wir noch ein bisschen auf) und erhalten das in Abbildung 1 gezeigte Bild. Es zeigt natürlich nur einen Ausschnitt der Zeichenebene und damit nur einen Teil des Graphen, da wir die Kordinatenachsen nicht „bis ins Unendliche“ zeichnen können, gibt uns aber dennoch *auf einen Blick* eine gute Übersicht über wichtige Eigenschaften der Funktion f. Sehen wir uns einige an:

- Einzelne, ausgewählte Funktionswerte können nun leicht (näherungsweise) abgelesen werden. So lesen wir beispielsweise ab, dass $f(3)$ ein bisschen kleiner als 10 ist. Der genaue Wert ist, wie die Rechnung zeigt, $f(3) = 3^2 + \frac{1}{3} = \frac{28}{3}$, also $9.333\ldots$ (periodisch).
- Der Graph zerfällt in zwei Linien. Der Stelle $x = 0$ entspricht kein Punkt des Graphen, da 0 kein Element der Definitionsmenge A ist. Diese Stelle wurde ja von vornherein ausgeschlossen, da für $x = 0$ bei der Berechnung des Funktionswerts $x^2 + \frac{1}{x}$ durch 0 dividiert werden müsste. Aber x kann zumindest sehr nahe bei 0 gewählt werden (also etwa $x = 0.001$ oder $x = -0.001$). Wie sich das auf den Funktionswert auswirkt, sehen wir nun sehr schön:

[4] Der Zusatz „angenähert“ drückt aus, dass wir natürlich nicht „mathematisch genaue“ Punkte oder Linien zeichnen können, sondern nur „reale“ Punkte oder Linien auf einem Papier oder einem Computerbildschirm, ganz so wie ein real gezeichneter Kreis auf einem Blatt Papier kein „mathematisch idealer“ Kreis ist, aber dennoch bei sorgfältiger Ausführung gut genug ist, um einen solchen *darzustellen*.

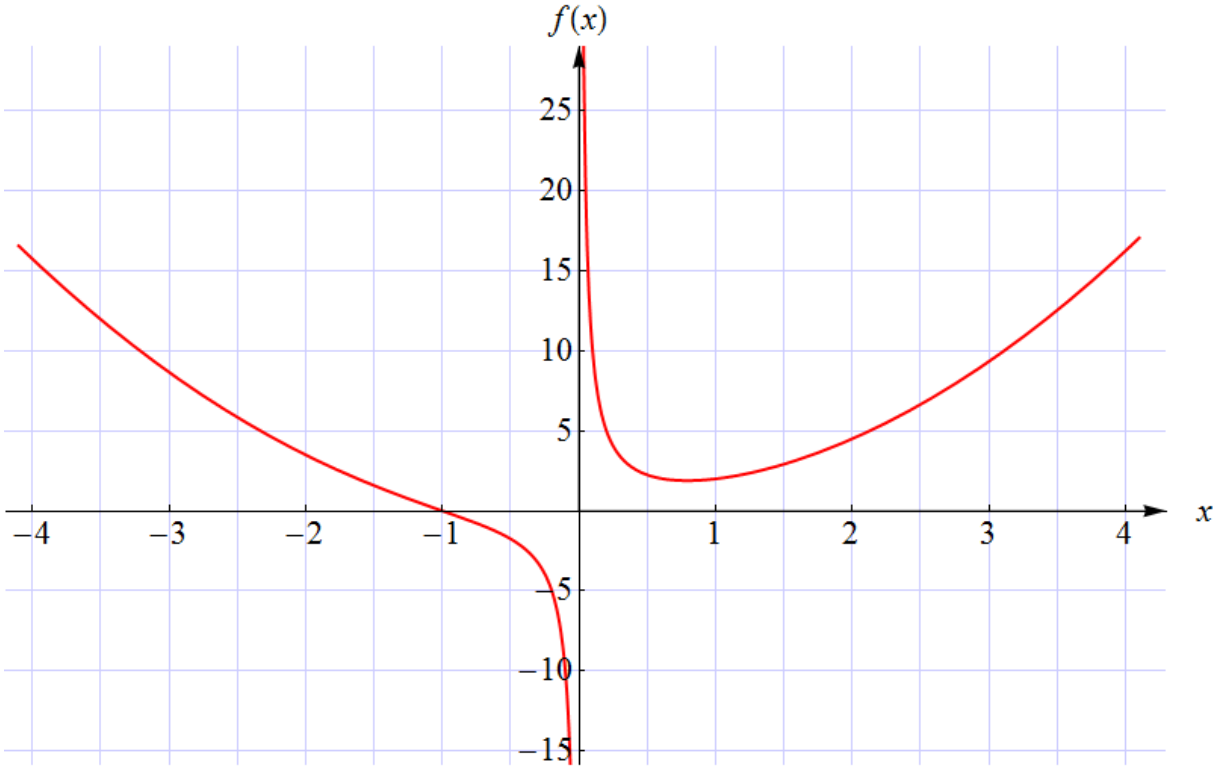


Abbildung 1: Graph der durch (2.1) definierten Funktion f. (Genauer gesagt handelt es sich um einen Ausschnitt, da der gesamte Graph – mathematisch gesehen – bis ins Unendliche reicht). Um Werte besser ablesen zu können, ist auch ein Koordinatenraster eingezeichnet. Die Maßstäbe auf den beiden Achsen sind unterschiedlich, was der betrachteten Funktion angemessen ist.

- Für einen Wert wie $x = 0.001$ ist $f(x)$ sehr groß, da der Graph bei Annäherung an 0 von positiven x-Werten (also von „rechts“) nach „oben“ schießt. (Die Rechnung ergibt zur Bestätigung $f(0.001) = 10^{-6} + 10^3 = 1000.000001 \approx 1000$.)
- Für einen Wert wie $x = -0.001$ ist zwar der Betrag von $f(x)$ sehr groß, aber $f(x)$ ist negativ, da der Graph bei Annäherung an 0 von negativen x-Werten (also von „links“) nach „unten“ schießt. (Die Rechnung ergibt zur Bestätigung $f(-0.001) = 10^{-6} - 10^3 = -999.999999 \approx -1000$.)

Die Stelle $x = 0$ (eine so genannte *Definitionslücke*, da hier der Funktionswert nicht definiert ist) wird auch eine *Singularität* oder eine *Polstelle* (kurz *Pol*) der Funktion f genannt.

- Schreiten wir, beginnend mit kleinen positiven Werten von x, nach „rechts“, also zu größeren Werten, so werden die Funktionswerte zunächst kleiner, erreichen dann irgendwo zwischen 0.5 und 1 ein (*lokales*[5]) *Minimum* und werden dann wieder größer. Der

[5] Der Zusatz „lokal“ bezieht sich darauf, dass die Funktionswerte *in der Nähe* einer solchen Stelle nicht kleiner sind als an dieser Stelle selbst. Ein „globales“ Minimum würde vorliegen, wenn *kein anderer* Funktionswert (wo auch immer er in der Definitionsmenge liegen mag) kleiner ist.

genaue Wert dieser (*lokalen*) *Minimumstelle* ist $2^{-1/3} \approx 0.7937$ (was erst mit Hilfe der Differentialrechnung auf schnelle Weise berechnet werden kann).

- Für große x ist der Graph „nach oben“ gebogen, was bedeutet, dass die Funktionswerte $f(x)$ schneller größer werden als x selbst (und zwar näherungsweise quadratisch, da sich für große x der Summand $\frac{1}{x}$ in der Summe $x^2 + \frac{1}{x}$ kaum mehr auswirkt). Der Graph wird immer steiler, je größer x wird (was überprüft werden kann, indem weitere Plots mit größeren Ausschnitten angelegt werden).
- Zwischen der Definitionslücke 0 und der Stelle, an der das lokale Minimum angenommen wird, ist die Funktion f *streng monoton fallend*, da in diesem Bereich die Funktionswerte mit wachsendem x immer kleiner werden. Im Bereich „rechts“ von der Minimumstelle ist sie *streng monoton steigend* (*streng monoton wachsend*), da dort die Funktionswerte mit wachsendem x immer größer werden.
- Nun sehen wir uns das Verhalten der Funktion für negative Variablenwerte an: Schreiten wir, beginnend mit einem negativen Wert von x, der in der Nähe von 0 liegt, nach „links“, also zu kleineren Werten, so werden die Funktionswerte größer und steigen offenbar immer weiter an. Umgekehrt bedeutet das, dass im Bereich negativer x die Funktionswerte immer *kleiner* werden, wenn x wächst. Daher ist die Funktion f in diesem Bereich *streng monoton fallend*. (Wann immer man über *Änderungen* von Funktionswerten spricht, sind Änderungen bei *wachsendem* Variablenwert gemeint, also Änderungen, die sich ergeben, wenn die Variable gedanklich entlang der ersten Achse „von links nach rechts“ bewegt wird.)
- Bei $x = -1$ ist der Funktionswert gleich 0. (Die Rechnung bestätigt: $f(-1) = (-1)^2 + \frac{1}{-1} = 1 - 1 = 0$.) Der Variablenwert -1 wird daher als *Nullstelle* bezeichnet. Er ist Lösung der Gleichung $f(x) = 0$. Offenbar ist -1 die *einzige* Lösung dieser Gleichung, da der Graph die erste Achse nirgendwo sonst schneidet.
- Ebenfalls bei $x = -1$ findet eine andere interessante Sache statt: Stellen Sie sich vor, der Graph stellt eine Straße in der Zeichenebene dar, die Sie entlangradeln! Fahren Sie den linken Teil des Graphen in Richtung ansteigender x-Werte entlang, so müssen Sie im Bereich $x < -1$ nach links lenken und im Bereich $x > -1$ nach rechts. Bei $x = -1$ (und zwar *exakt* bei diesem Wert, wie ein kleines Argument zeigt, das allerdings die Differentialrechnung benötigt) findet der Übergang zwischen Nach-links-Lenken und Nach-rechts-Lenken statt. Ein Variablenwert mit dieser Eigenschaft heißt *Wendestelle*. Der Wert -1 ist Nullstelle und Wendestelle gleichzeitig.
- Auch im Bereich negativer x mit großem Betrag zeigt sich ein (annähernd) quadratisches Verhalten – sowohl am Graphen (er wird umso steiler, je weiter wir von der Nullstelle aus nach „links“ gehen) als auch am Funktionsterm (da der Summand $\frac{1}{x}$ in der Summe $x^2 + \frac{1}{x}$ für $x \ll -1$ ebenfalls kaum ins Gewicht fällt).
- Wollen wir aus irgendeinem Grund wissen, an welchen Stellen der Funktionswert gleich 5 ist (was rechnerisch bedeuten würde, die Gleichung $f(x) = 5$ zu lösen, eine Gleichung dritter Ordnung), so müssen wir jene Stellen suchen, für die der Graph jene „horizontale“ Gerade, deren zweite Koordinate 5 ist, schneidet. Ein Blick auf den Graphen zeigt, dass es drei derartige Stellen gibt (und zwar näherungsweise -2.33, 0.20 und 2.13). Eine

exakte Berechnung dieser Werte ist zwar möglich, aber etwas umständlich und jenseits des Schulstoffs. Indem wir uns näher zum Graphen „heranzoomen“ (indem wir neue Plots anlegen, die immer kleinere Ausschnitte um die entsprechenden Schnittpunkte zeigen) können wir die Genauigkeit, mit der wir sie ablesen können, steigern.

- Schließlich entnehmen wir dem Graphen, dass die Wertemenge (Bildmenge) unserer Funktion ganz $\mathbb{R}$ ist, da jede reelle Zahl als Funktionswert auftritt (manche sogar mehrfach). Das folgt einfach daraus, dass *jede* „horizontale“ Gerade mindestens einen Punkt mit dem Funktionsgraphen gemeinsam hat.

Versuchen Sie, all diese Eigenschaften unserer Funktion anhand des Graphen und – soweit oben erwähnt – durch eine Rechnung mit dem Funktionsterm nachzuvollziehen!

> **Anmerkung zur Sprechweise**: Um einen Variablenwert x von einem Wertepaar $(x, f(x))$ zu unterscheiden, nennen wir x eine **Stelle** und das Paar $(x, f(x))$ im Hinblick auf seine geometrische Deutung einen **Punkt**. So ist beispielsweise eine lokale „Minimumstelle“ ein x-Wert, dessen Funktionswert von keinem anderen Funktionswert einer in der Nähe liegenden Stelle unterschritten wird, während der Punkt des Graphen, der zu dieser Stelle gehört, als „Tiefpunkt“ bezeichnet wird. Analog spricht man von (lokalen) „Maximumstellen“ und „Hochpunkten“ und von „Wendestellen“ und „Wendepunkten“. Dieser feine Unterschied in der Bezeichnung wird nicht immer konsequent durchgehalten, aber man sollte ihn zumindest kennen.

Zu einem guten Verständnis des Funktionsbegriffs zählt,

- wichtige Eigenschaften einer Funktion aus ihrem Graphen ablesen zu können
- und diese Eigenschaften des Graphen auf Eigenschaften des Funktionsterms beziehen zu können.

Um in der Praxis jene Eigenschaften einer gegebenen Funktion herauszuarbeiten, die uns für bestimmte Zwecke interessieren, wird ihr Graph meist in zweierlei Hinsicht herangezogen: Er hilft uns, zu entscheiden, welche Berechnungen mit dem Funktionsterm durchzuführen sind, und er gibt uns (zumindest näherungsweise) darüber Auskunft, was dabei herauskommen sollte. In manchen Fällen sind die nötigen Berechnungen so aufwändig, dass wir uns mit den am Graphen abgelesenen Eigenschaften zufrieden geben (wie beispielsweise bei der Frage nach den Lösungen der Gleichung $f(x) = 5$ für die oben diskutierte Funktion f).

Weiters sollten Sie wissen, wie die Graphen der oft auftretenden elementaren Funktionen aussehen. Sie werden besprochen, wenn die betreffenden Funktionen eingeführt werden.

Als Ergänzung betrachten wir noch den Graphen der in (3.1) abschnittsweise durch zwei Terme definierten Funktion U. Er ist in Abbildung 2 wiedergegeben und zeigt den durch diese Funktion modellierten Spannungsverlauf in einem Bild, das man sofort überblickt. Der anfängliche konstante Verlauf, die Sprungstelle bei $t = 2$ (die U zu einer unstetigen Funktion macht) und der darauffolgende lineare Anstieg sind deutlich zu erkennen. Die Wertemenge (Bildmenge) der Funktion U ist $\mathbb{R}_0^+$, da jede nichtnegative Zahl als Funktionswert auftritt, aber keine negative.

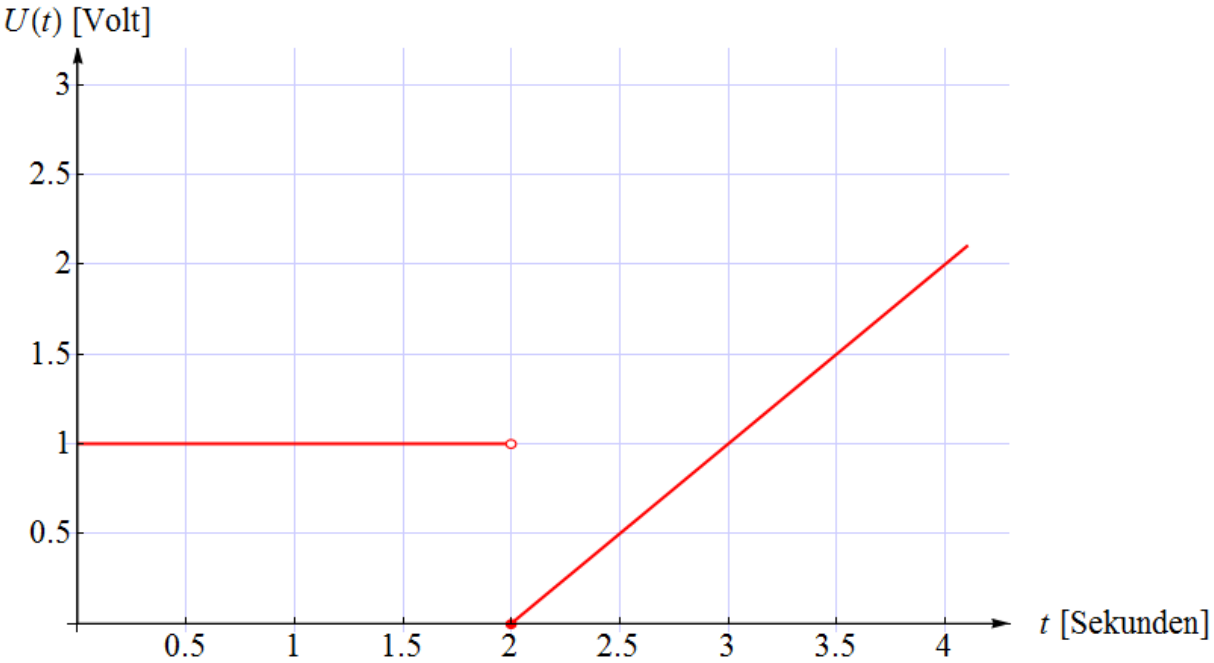


Abbildung 2: Graph der abschnittsweise termdefinierten Funktion (3.1). Die durch diese Funktion modellierte elektrische Spannung ist 2 Sekunden lang konstant, fällt dann abrupt auf 0 ab und steigt danach linear an. Dass der Funktionswert an der Stelle $t = 2$ mit Hilfe des zweiten Terms berechnet wird, also 0 ist, wird durch den ausgefüllten Kreis gekennzeichnet, während durch den Kreisring am Ende des „horizontalen" Graphenstücks anzeigt wird, dass dieser Punkt *nicht* zum Graphen gehört.

5 Wertetabelle und Punktgraph

Zur Aufwärmung betrachten wir eine Funktion, deren Definitionsmenge endlich ist, also nur endlich viele Elemente besitzt:

$$\sigma : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}. \tag{5.1}$$

Sie soll 1 auf 2 abbilden, 2 auf 3 und 3 auf 1. Diese Zuordnungsvorschrift[6] (man könnte sie in Worten als „weiterrücken um 1 modulo 3" bezeichnen[7]) können wir entweder in der Form

$$\begin{aligned} \sigma(1) &= 2 \\ \sigma(2) &= 3 \\ \sigma(3) &= 1 \end{aligned} \tag{5.2}$$

[6] Es handelt sich um eine so genannte *Permutation*. Stellen Sie sich vor, die Elemente von $A = \{1, 2, 3\}$ kennzeichnen Personen, und in einem Raum stehen drei Sessel, die mit den Elementen von $B = \{1, 2, 3\}$ bezeichnet sind. Setzt sich jede Person auf einen Sessel, so kann das formal als Zuordnung Person $\mapsto$ Sesselnummer beschrieben werden. Jede solche Zuordnung ist eine „Permutation von drei Elementen". In unserem Beispiel setzt sich Person 1 auf den Sessel Nummer 2, Person 2 auf den Sessel Nummer 3 und Person 3 auf den Sessel Nummer 1, wie durch σ angegeben. Das Symbol σ ist ein kleines griechisches „sigma".

[7] „Modulo 3" bedeutet, dass „zyklisch"(sozusagen „im Kreis") gezählt wird: 1, 2, 3 und danach wieder 1. Das Zifferblatt einer Uhr zählt die Stunden „modulo 12".

oder in Form einer **Tabelle** (**Wertetabelle**)

x	$\sigma(x)$
1	2
2	3
3	1

(5.3)

vollständig darstellen. Alles klar?

Nun kommen wir zur Frage, wie der Graph einer Funktion erstellt wird, deren Definitionsmenge unendlich viele Elemente besitzt. In einem solchen Fall können wir natürlich nicht *alle* Funktionswerte aufzählen. Im vorigen Abschnitt haben wir einfach angenommen, dass ein grafischer Taschenrechner oder ein Computerprogramm den Graphen für uns plottet. Auch wenn heute im Matematikunterricht dank dieser elektronischen Hilfsmittel weniger mit der Hand gezeichnet wird als in früheren Zeiten, sollten wir dennoch grundsätzlich wissen, wie man einen Funktionsgraphen *selbst* erstellen kann.

Eine Wertetabelle einer Funktion mit unendlicher Definitionsmenge ist eine Auflistung von endlich vielen *ausgewählten* Variablenwerten und den zugehörigen Funktionswerten. Betrachten wir als Beispiel wieder die durch (2.1) definierte Funktion f. Wir wählen Variablenwerte von -4 bis 4 in Schritten von 0.25, berechnen die Funktionswerte, runden sie auf zwei Nachkommastellen und können dann die folgende Tabelle anlegen:

x	$f(x)$
-4	15.75
-3.75	13.80
-3.5	11.96
-3.25	10.25
-3	8.67
-2.75	7.20
-2.5	5.85
-2.25	4.62
-2	3.5
-1.75	2.49
-1.5	1.58
-1.25	0.76
-1	0
-0.75	-0.77
-0.5	-1.75
-0.25	-3.94

x	$f(x)$
0	nicht definiert
0.25	4.06
0.5	2.25
0.75	1.90
1	2
1.25	2.36
1.5	2.92
1.75	3.63
2	4.5
2.25	5.51
2.5	6.65
2.75	7.93
3	9.33
3.25	10.87
3.5	12.54
3.75	14.33
4	16.25

(5.4)

Diese Werte geben eine grobe Übersicht über das Verhalten unserer Funktion, nun mit Schwerpunkt auf konkreten Zahlenwerten. Wir sehen, dass die Funktionswerte im Bereich $x < 0$ mit wachsendem x kleiner werden (wobei auch die Nullstelle bei $x = -1$ ersichtlich ist, ab der die Funktionswerte negativ sind). Im Bereich $x > 0$ sind die Funktionswerte positiv, wobei sie

zunächst kleiner werden, bei $x = 0.75$ offenbar ihren kleinsten Wert annehmen und danach wieder ansteigen. Die Tabelle gibt natürlich keine Auskunft über die Funktionswerte an Stellen, die *zwischen* den ausgewählten x-Werten liegen. So können wir weder den genauen Wert der Minimumstelle aus der Tabelle ermitteln noch Funktionswerte wie $f(1.1)$. (Was letzteren betrifft, können wir lediglich *vermuten* oder, wenn Ihnen das Wort besser gefällt, *schätzen*, dass $f(1.1)$ zwischen 2 und 2.36 liegt, vielleicht näher bei 2, da 1.1 näher bei 1 liegt als bei 1.25.)

Jede Zeile der Wertetabelle besteht aus einem Paar $(x, f(x))$ und kann daher als Punkt in der Zeichenebene gedeutet werden. Da der Graph der Funktion f die Menge *aller* Paare $(x, f(x))$ für $x \in \mathbb{R}^*$ ist, liegen alle diese der Tabelle entnommenen Punkte (mal davon abgesehen, dass wir die Funktionswerte gerundet haben) auf dem Graphen. Zeichnen wir sie in ein Koordinatensystem, so erhalten wir den in Abbildung 3 gezeigten **Punktgraphen**. Er

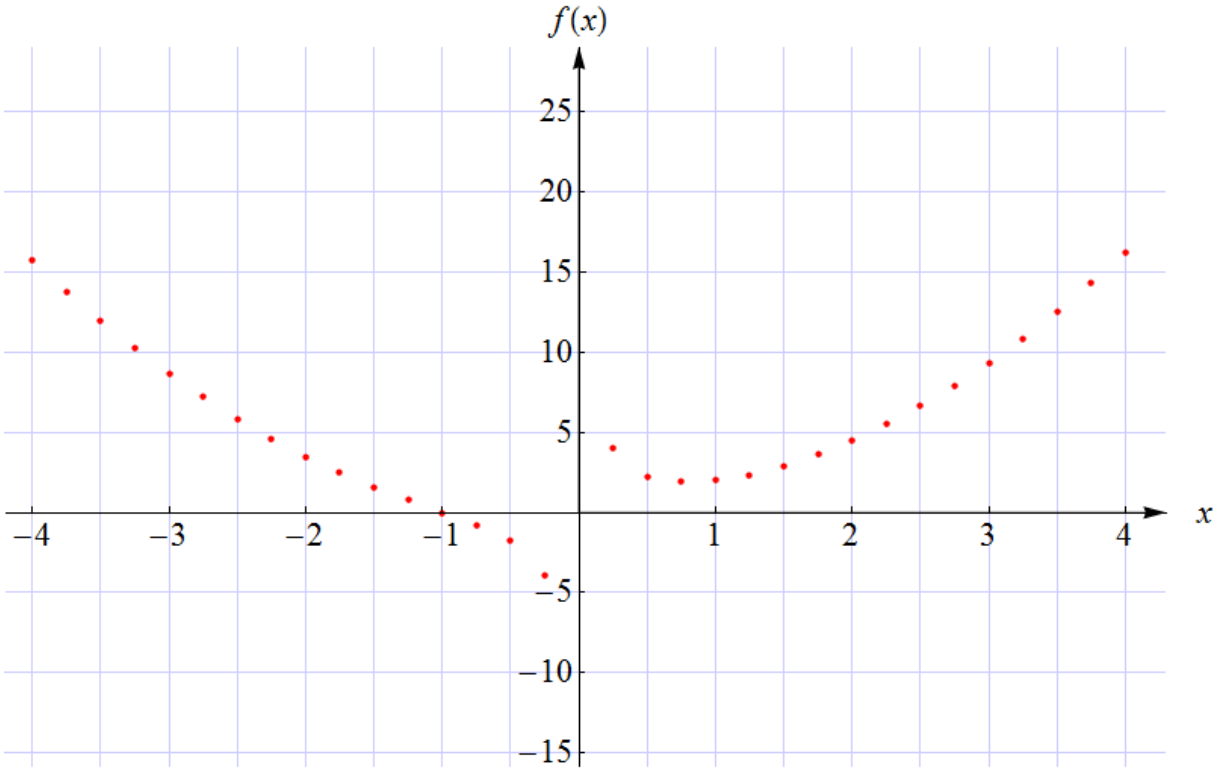


Abbildung 3: Punktgraph, der die in der Wertetabelle (5.4) enthaltenen Paare $(x, f(x))$ zeigt. Jede Zeile der Tabelle (außer jener für $x = 0$, wo die Funktion f nicht definiert ist) entspricht einem Punkt. Jeder dieser Punkte liegt auf dem in Abbildung 1 gezeigten Graphen.

vermittelt uns eine ungefähre Vorstellung davon, wie der Graph aussehen könnte, wobei aber die Verhältnisse in der Nähe von $x = 0$ nicht wirklich gut erkennnbar sind.

Zu Übungszwecken vor die Aufgabe gestellt, allein aus dem Funktionsterm und einer selbsterstellten Wertetabelle den Graphen zu zeichnen, müsste man sich zunächst genauer über das Verhalten nahe $x = 0$ orientieren, und zwar entweder durch eine weitere Wertetabelle

(etwa im Bereich $-0.25 < x < 0.25$ mit kleinerer Schrittweite) oder durch einen Blick auf den Funktionsterm, um das Verhalten in der Nähe der Definitionslücke zu erschließen[8]. Eine gewissenhafte Strategie wird in solchen Fällen dann auch zusätzliche Berechnungen und Argumente heranziehen (etwa um Nullstellen und – mit Hilfe der Diffferentialrechung – lokale Minimum- und Maximumstellen sowie Wendepunkte zu ermitteln). Sobald Sie über ausreichende Zusatzinformationen verfügen, können Sie den Bleistift ansetzen, um den Graphen zu zeichnen.

Ein grafischer Taschenrechner oder ein Computerprogramm macht bei der Erstellung eines Funktionsgraphen im Grunde nichts anderes als eine Liste ausgewählter, recht eng nebeneinander liegender x-Werte zu wählen, die zugehörigen Funktionswerte zu berechnen, die entsprechenden Punkte zu zeichnen und zu verbinden, so dass sich der Eindruck einer Linie (in unserem Beispiel zweier Linien) ergibt. Manche – die etwas „intelligenteren“ – Programme berücksichtigen durch geschickte Rechnungen mit dem Funktionsterm die Krümmung der Kurve und erkennen sogar Definitionslücken.

Tabellen zur Darstellung von Funktionen können etwa dann eingesetzt werden, wenn den Personen, die Funktionswerte ermitteln müssen, deren Berechnung aus einem Funktionsterm oder deren Ablesung aus einem Graphen nicht zugemutet werden soll oder wenn dies aus anderen Gründen unpraktisch ist. Wenn Ihnen beispielsweise Ihr Bankberater zeigen will, wie sich Ihr angelegtes Geld im Laufe der Zeit vermehren wird, wird er Ihnen wahrscheinlich eine Tabelle zeigen. In früheren Zeiten waren umfangreiche Tabellenwerke auch in technischen und wissenschaftlichen Bereichen eine unentbehrliche Hilfe, während heute (sofern die nötigen Berechnungen nicht auch die Computer überfordern) mit einem Mausklick Funktionsterme ausgewertet und Funktionsgraphen erstellt werden können.

6 Funktionen, die direkt aus der „Wirklichkeit“ kommen

Bisher haben wir von reellen Funktionen gesprochen, die durch die Angabe einer Definitionsmenge und eines Funktionsterms (oder im Fall abschnittsweise definierter Funktionen durch mehrere Terme) definiert sind[9]. Wenn wir diese Abhängigkeit einer Größe von einer anderen Größe aus realen Beobachtungen erschließen (etwa den zeitlichen Verlauf der Temperatur eines Bauteils in einer Maschine), so wird das nicht immer möglich sein. Jeder in der Praxis zur Beschreibung eines realen Sachverhaltes benutzte Funktionsterm enthält von vornherein eine Portion „Theorie“, d.h. idealisierende Annahmen, die seine Form rechtfertigen. Bei der Darstellung realer Beobachtungsdaten ist es oft gar nicht zweckmäßig, mit Funktionstermen zu arbeiten.

[8] Dieser Blick könnte ergeben, dass sich $x^2 + \frac{1}{x}$ in der Nähe von $x = 0$ näherungsweise so verhält wie $\frac{1}{x}$, also großen Betrag und das gleiche Vorzeichen wie x hat.

[9] Eine Ausnahme ist die in (5.1) – (5.3) betrachtete Funktion σ, deren Zuordnungsvorschrift in einer anderen Form angegeben wurde. Aber selbst für diese Funktion lässt sich ein Term angeben: $\sigma(x) = -\frac{1}{2}\left(3\,x^2 - 11\,x + 4\right)$. Überprüfen Sie ihn durch Einsetzen von $x = 1$, $x = 2$ und $x = 3$! Ein anderer Term, der dieselbe Funktion charakterisiert, ist $\sigma(x) = (x+1) \bmod 3$. Der Teil $\bmod 3$ („modulo 3“) bezeichnet den Rest bei Division durch 3. Siehe dazu auch Fußnote 7.

Eine Beispiel wäre die Lufttemperatur, wie sie von der meteorologischen Station der Hohen Warte in Wien in den letzten 24 Stunden (etwa in Abständen von 15 Minuten) gemessen worden ist. Um die Daten möglichst unverfälscht nutzen zu können, dürfen wir nicht annehmen, etwas über die Temperatur zwischen den Messzeitpunkten zu wissen. In einem solchen Fall liegt ein Funktionsterm $T(t)$, der die Temperatur T in Abhängigkeit einer Zeitvariable t beschreibt, die innerhalb des betrachteten Zeitintervalls *beliebige* reelle Werte annehmen kann, schlicht und einfach nicht vor. Wir können aber dann immer noch die Messwerte (im Rahmen der Messgenauigkeit) als Funktionswerte ansehen, sofern die Definitionsmenge aus den (endlich vielen) Messzeitpunkten besteht. Das verschafft uns zwar keinen Funktionsterm (und einen Term zu suchen, der die reinen Beobachtungsdaten korrekt wiedergibt, hätte angesichts der Zufälligkeiten, die die Temperatur ständig beeinflussen, nicht viel Sinn), aber immerhin können wir Tabellen und Punktgraphen benutzen, um die Daten darzustellen. In manchen realistischen Darstellungen von gemessenen Temperaturverläufen liegen die Punkte des Punktgraphen so nahe, dass der Eindruck einer kontinuierlichen Linie entsteht.

Eine *andere*, davon zu unterscheidende (aber ebenfalls wichtige) Sache ist eine sich auf die „reinen“ Beobachtungsdaten – und in der Regel auch auf theoretische (physikalische) Annahmen – stützende *Modellierung* des Temperaturverlaufs (oder eines typischen Temperaturverlaufs). In einem solchen Fall wird – im Gegensatz zur reinen Datendarstellung – die Angabe eines Terms (der die Beobachtungsdaten möglichst gut wiedergibt, aber nicht auf endlich viele Messzeitpunkte beschränkt ist) ein wünschenswertes Ziel sein.

7 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Lesen Sie für die in (2.1) definierte Funktion f aus dem Graphen in Abbildung 1 näherungsweise die Lösungen der Gleichung $f(x) = 10$ ab!
  Lösung:

  Die Lösungen sind näherungsweise -3.2, 0.1 und 3.1.

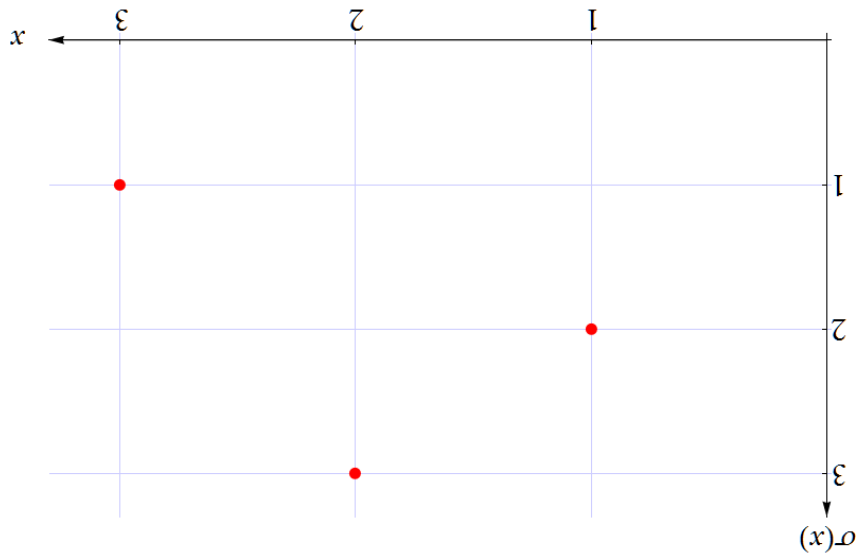
- Lösen Sie für die Funktion U von (3.1) unter Zuhilfenahme der Funktionsterme *und* des Graphen in Abbildung 2 die Gleichungen $U(t) = 0.5$, $U(t) = 1$ und $U(t) = 2$!
  Lösungen:

  Die Lösungsmenge von $U(t) = 0.5$ ist $L = \{2.5\}$.
  Die Lösungsmenge von $U(t) = 1$ ist $L = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t < 2 \text{ oder } t = 3\} = [0, 2) \cup \{3\}$.
  Die Lösungsmenge von $U(t) = 2$ ist $L = \{4\}$.

- Ermitteln Sie die Wertemenge (Bildmenge) der in (5.1) – (5.3) definierten Funktion σ!
  Lösung:

  Die Bildmenge ist $\{1, 2, 3\}$. Sie ist gleich der Zielmenge.

- Zeichnen Sie einen Punktgraphen der in (5.1) – (5.3) definierten Funktion σ!
  Lösung:



- Sei p die durch

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ p(x) &= 3\,x^2 - 2 \end{aligned}$$

  definierte Funktion. Geben Sie zwei Punkte an, die auf dem Graphen von p liegen! (Sie müssen dazu den Graphen nicht zeichnen!)
  Lösung:

  Tipp: Wählen Sie eine beliebige reelle Zahl x und berechnen Sie den zugehörigen Funktionswert $p(x)$! Der Punkt $(x, p(x))$ liegt dann am Graphen von p.
  Beispiele sind die Punkte $(0, -2)$ und $(1, 1)$.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Juli 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Überarbeitet im November 2015 unter Mitwirkung von Harald Stockinger. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.