Arbeitsblatt 8

Weitere Grundlagen der Differentialrechnung:

1) Höhere Ableitungen
   Nachdem die Ableitungs**funktion** eben wieder eine Funktion ist, könnte man nun von ihr die Ableitungsfunktion ermitteln.

   Welcher Zusammenhang besteht zwischen der ursprünglichen Funktion und der Ableitung(sfunktion) der Ableitung(sfunktion)?

   a) Zunächst eine Begriffsklärung:
      Um die hierarchische Struktur zu verdeutlichen, nennt man die Ableitung der Funktion f normalerweise „**1.**Ableitung" oder f' („f Strich") und die Ableitung der Ableitung „**2.**Ableitung" oder f'' („f Zweistrich").
      Es gibt auch eine 3., 4., … Ableitung (f''' „f Dreistrich", f^{IV} „f Vierstrich", …)

   b) Übung:
      Bilde mit Derive die ersten 5 Ableitungen der beiden folgenden Funktionen:
      i) f: $y = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 6$
      ii) g: $y = \sin(x)$

      Beachte die Systematik, die sich hinter den Ableitungen von Polynom- und von Winkelfunktionen verbirgt.

   c) Nun zur ursprünglichen Frage:
      i) Wie wir wissen, gibt die 1.Ableitung die **Änderungsrate** einer Funktion an. (Wie stark ändert sich die Funktion?).
         Andererseits gibt die 1.Ableitung auch die **Tangentensteigung** zu jedem Punkt an.
      ii) Daher gibt die 2.Ableitung die **Änderungsrate** der **Tangentensteigung**sfunktion an. Die Tangentensteigung ändert sich dort mehr, wo die Funktion stärker gekrümmt ist. Also beschreibt die 2.Ableitung einer Funktion deren **Krümmung**.

2) Ableitung der Tangensfunktion
   a) Wie kann man Tangens durch Sinus und Cosinus ausdrücken?
      Dieser Zusammenhang lässt sich aus den Definitionen der Winkelfunktionen ableiten.
   b) Ermittle mithilfe von Ableitungsregeln die Ableitung der Tangensfunktion. Beachte, dass es je nachdem, wie man vereinfacht, 2 verschiedene Formulierungen des Ergebnisses gibt.

3) Partielle Ableitungen
   Eine Funktion kann auch mehrere verschiedene unabhängige Variable enthalten.

   Ein Beispiel: Das Volumen eines Zylinders hängt sowohl vom Radius der Grundfläche als auch von der Höhe ab.
   $V(r,h) = r^2\pi h$
   Wenn man sich die Frage stellt, wie sich das Volumen ändert, muss man dazu sagen, unter welchen Bedingungen man das analysieren möchte:
   a) Wenn sich bei konstantem Radius die Höhe ändert.

b) Wenn sich bei konstanter Höhe der Radius ändert.
c) Wenn sich Radius und Höhe gleichzeitig ändern.

Die Änderungsraten sind ja die 1.Ableitungen.
Zum Zeichen, dass es sich hier um so genannte „partielle Ableitungen" handelt, schreibt man ∂ statt d.

Im Fall a) leiten wir V bei konstantem r ab:

$$\frac{\partial V(r,h)}{\partial h} = r^2\pi$$

Im Fall b) leiten wir V bei konstantem h ab:

$$\frac{\partial V(r,h)}{\partial r} = 2r\pi h$$

Übung:
Führe das genannte Beispiel mit Derive durch. Stelle die Funktion V auch in einer 3D-Grafik dar.
Siehe dazu die Derive-**Beispiele** „Mehrstellige_Funktionen" und „Partielle_Ableitungen"