Arbeitsblatt7

Ableitungsregeln 3

Was bisher geschah:
Wir kennen einige elementare Ableitungen (von Potenzfunktion, konstanter Funktion, sin, cos) und eine Reihe von Ableitungsregeln (Summen-, Differenzen-, Produkt- und Quotientenregel).
Dadurch können wir Polynomfunktionen und einige Winkelfunktionen, sowie viele Kombinationen davon bearbeiten.

Eine ganz wichtige Möglichkeit der Verknüpfung von Funktionen fehlt uns noch:

1) f: $y = \sin(x^2)$
2) f: $y = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$

Das sind 2 Beispiele für Funktionen, die sich nicht mit den uns schon bekannten Mitteln der Differentialrechnung ableiten lassen.

Versuchen wir die Funktionsterme zu analysieren:
Welcher Rechengang führt vom x zum y, wenn ich zum Beispiel Funktionswerte berechnen möchte?

1) Zunächst wird das x quadriert, anschließend vom Ergebnis der Sinus gebildet.
2) Zunächst wird mit dem x das Polynom $x^2 + 2x - 1$ gebildet, anschließend vom Ergebnis die Quadratwurzel gezogen.

In beiden Fällen wird also ein erstes Rechenergebnis (Quadrat, Polynom) weiter verarbeitet.
Man spricht von einer Verkettung von Funktionen:

1) Zuerst die Quadratfunktion, dann die Sinusfunktion. Eine Verkettung von Quadratfunktion und Sinusfunktion.
2) Zuerst eine Polynomfunktion, dann die Quadratwurzelfunktion. Eine Verkettung von einer Polynomfunktion und der Quadratwurzelfunktion.

Beachte: $\sin(x^2)$ und $x^2.\sin(x)$ sind zwei grundverschiedene Termstrukturen. Beim rechten nimmt man das x, bildet das Quadrat, dann nimmt man **wieder das x**, bildet den Sinus und multipliziert beide Ergebnisse miteinander.
Diesen wichtigen Unterschied muss man unbedingt erkennen!

Ein allerletztes Beispiel dazu aus der Haute cuisine:
Ein Cordon bleu bereitet man vor, indem man Schinken und Käse in ein Stück Schnitzelfleisch gibt und anschließend das Fleisch paniert. Das wäre die Verkettung.
Etwas anderes ist es natürlich, wenn man Fleisch, Schinken und Käse getrennt paniert. In diesem Fall, der Gourmet hat es sofort erkannt, handelt es sich natürlich eher um eine Summe als um ein Produkt, also wäre das vergleichbar mit $x^2 + \sin(x)$, aber ich denke, wir schmecken den Unterschied.

Nun zur Frage:
„Wie leitet man so eine Verkettung von Funktionen ab?“
Die folgende Ableitungsregel heißt

Die Kettenregel

Wenden wir uns wieder unserem 1. Beispiel mit dem Funktionsterm $\sin(x^2)$ zu:

Zunächst wird die Funktion f_i durchgeführt:

$$f_i:\ y = x^2$$

Danach wird das Ergebnis durch die Funktion f_a weiter verarbeitet. Dazu müssen wir eine neue Variable einführen[1].

$$f_a:\ z = \sin(y)$$

Wenn wir für y das x^2 aus f_i einsetzen, sind wir bei der Gesamtfunktion f angelangt:

$$f:\ z = \sin(x^2)$$

Natürlich wollen wir auch das Geheimnis der Indizierung lüften:
f_i steht für „innere Funktion", f_a für „äußere Funktion". Wenn dir diese Begriffe logisch erscheinen, hast du das Prinzip der Verkettung von Funktionen sehr gut verstanden.

Jetzt endlich zur Ableitung:

$$f': \frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin(x^2)) = ?$$

Nun zeigt sich die große Stärke dieser Differentialschreibweise! Wir arbeiten damit wie mit Brüchen und erweitern $\frac{dz}{dx}$ mit $\frac{dy}{dy}$. Das Ergebnis könnte man so schreiben: $f': \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dx}$.
Für unser Beispiel bedeutet das:

$$f': \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}(\sin(y)).\frac{d}{dx}(x^2)$$

Das heißt: Wir leiten f_a nach y ab und f_i nach x. Danach drücken wir y durch x aus und multiplizieren die beiden Ableitungen:

$$f': \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}(\sin(y)).\frac{d}{dx}(x^2) = \cos(y).2x = \cos(x^2).2x \quad \text{Fußnote:}^2$$

Das ist auch schon die Kettenregel:

$$f': \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dx}$$

Man kann sie auch schön in Worte fassen:
„Setze die innere Funktion in die Ableitung der äußeren ein und multipliziere mit der inneren Ableitung[3]."

Übungsbeispiele: Bsp. 231-240

---

[1] Welche Buchstaben wir für unsere Variablen verwenden, ist ja grundsätzlich egal. Es hat sich halt eingebürgert, dass man die unabhängige Variable mit x und die abhängige mit y bezeichnet. Kommt eine 3. Variable ins Spiel, muss man natürlich flexibel sein.
[2] Derartige Ausdrücke (Winkelfunktion mal Polynom) schreibt man besser in umgekehrter Reihenfolge $2x.\cos(x^2)$, damit man nicht auf die abwegige Idee kommt, den Cosinus von $x^2.2x$ zu bilden.
[3] Innere Ableitung = Ableitung der inneren Funktion.