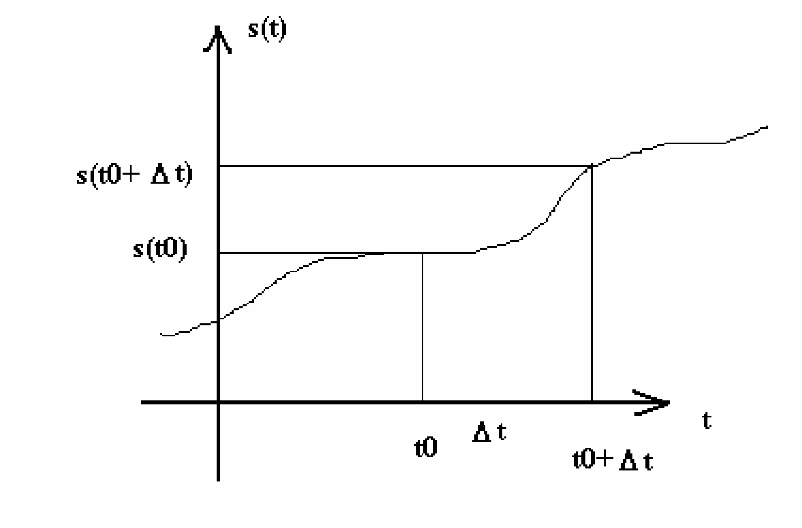
Verbindung Tangentenproblem – Momentangeschwindigkeit

1) Um die Durchschnittsgeschwindigkeit einer Bewegung zu berechnen, wendet man in der Physik folgende Formel an:

   Geschwindigkeit $v = \dfrac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{verstrichene Zeit}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

   Der zurückgelegte Weg hängt seinerseits ebenfalls von der verstrichenen Zeit ab. Man fährt halt normalerweise weiter, wenn man länger unterwegs ist. Zu diesem Zusammehang sagt der Mathematiker: Der Weg ist eine Funktion der Zeit, man schreibt s(t).



   Möchte man diese Werte aus dem Funktionsgrafen ablesen, rechnet man

   $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$

   Im Zähler steht die Differenz der Wege zu den Zeiten $t_0+\Delta t$ und t_0.
   Zum Beispiel:
   Ein Autofahrer fährt auf der A1.
   Um $t_0 = 11{:}20$ ist er in Melk (Autobahn-Km 80), um $t_0+\Delta t = 12{:}10$ ist er in Linz (Autobahn-Km 180).
   $s(t_0) = 80$, $s(t_0+\Delta t) = 180$, $\Delta t = 50$ min
   Als Durchschnittsgeschwindigkeit ergibt sich 120 km/h. Überprüfe!
   Grafisch handelt es sich dabei um die Steigung der Sekante der Funktion durch die Punkte $(t_0|s(t_0))$ und $(t_0+\Delta t|s(t_0+\Delta t))$.

2) Wenn man aber wissen möchte, wie schnell der Autofahrer in dem Moment ist, in dem er an Melk vorbei fährt (Die Geschwindigkeit, die man auf dem Tacho ablesen kann.), muss man ein wesentlich kürzeres Zeitintervall wählen, eigentlich einen Zeitpunkt, aber das führt mathematisch zu Problemen.
   Also lässt man das Zeitintervall gegen 0 gehen:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

   Dafür gibt es auch eine eigene Schreibweise:

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

   Man nennt diesen Ausdruck den Differentialquotienten und sagt „d s nach d t“.

   Dadurch lässt sich die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 berechnen.