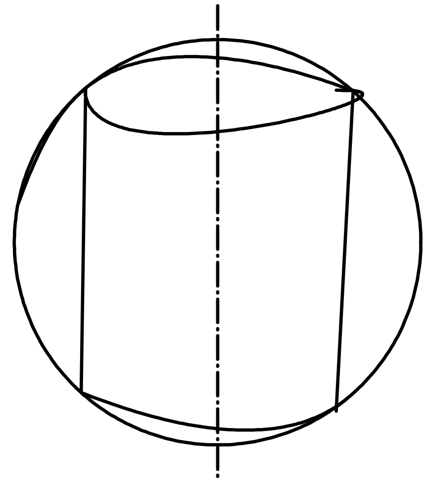
Nebenbedingungen mit Pythagoras:

Bsp. 463
Einer Kugel (R) werden Drehzylinder (r,h) eingeschrieben.
Berechne die Abmessungen und das Volumen jenes Zylinders, der das größte Volumen hat.

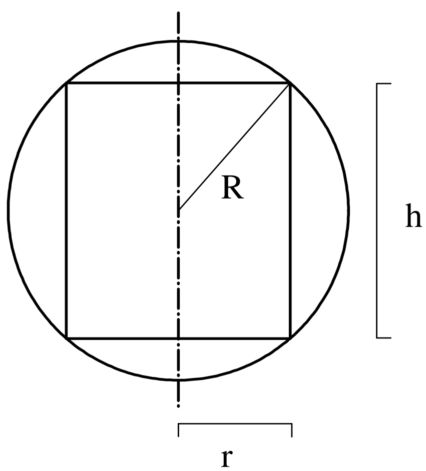


Skizze:
Ein Drehzylinder steckt in einer Kugel. Die Achse des Zylinders geht durch den Kugelmittelpunkt. Der Zylinder berührt die Kugel entlang zweier Kreise (Basiskreis, Deckkreis).

Hauptbedingung:
$V_Z(r,h) = r^2\pi h \rightarrow$ Maximum

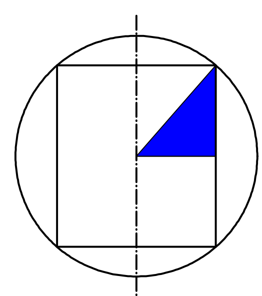
V_Z ist eine Funktion in 2 Variablen (r,h), daher muss man einen Zusammenhang zwischen den beiden finden (Nebenbedingung).

Von vorne sieht die Skizze so aus:



Beachte, wo der Kugelradius eingezeichnet ist. Natürlich hätte man ihn auch woanders einzeichnen können (waagrecht, senkrecht), dort wo er in der Skizze ist, hilft er zur Aufstellung der Nebenbedingung. Man kann nämlich ein rechtwinkliges Dreieck einzeichnen:
Hier gilt der Pythagoras.

$$r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2$$



Das ist unsere Nebenbedingung!

Aufgrund des r^2 in der HB ist es sinnvoll, so umzuformen:

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{4R^2 - h^2}{4}$$

Einsetzen in die HB ergibt

$$V_Z(r) = \frac{(4R^2 - h^2)\pi h}{4} = \frac{\pi}{4}\left(4R^2 h - h^3\right)$$

Konstante Faktoren beeinflussen das Rechenergebnis nicht:

$$\overline{V_Z(r)} = 4R^2 h - h^3$$

Ableiten und gleich 0 setzen:

$$\frac{d\overline{V_Z}}{dr} = 4R^2 - 3h^2 = 0$$

$$h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

$$r^2 = R^2 - \frac{R^2}{3} = \frac{2R^2}{3}$$

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$$

$$V_Z = r^2 \pi h = \frac{2R^2}{3}\pi \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}} R^3 \pi$$

Siehe dazu auch die Durchrechnung mit Derive.