Arbeitsblatt 5

Extremwertaufgaben 2

Man unterscheidet die Extremwertaufgaben nach der Art der Nebenbedingung:

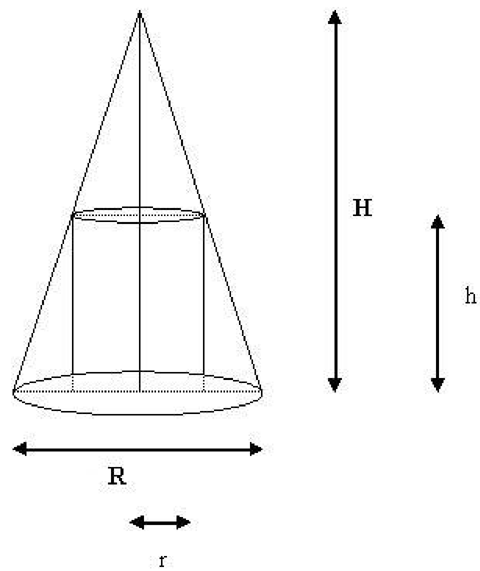
1. Formel (siehe A4)
2. Strahlensatz
3. Pythagoras

Oft sind Extremwertaufgaben allgemein formuliert, ohne dass den vorgegebenen Größen konkrete Zahlen zugeordnet sind.

Bsp.457a):

1. <u>Skizze:</u>

   Die gegebenen, unabhängigen Größen (Radius und Höhe des Kegels) bezeichnen wir mit Großbuchstaben, die gesuchten, abhängigen (Radius und Höhe des Zylinders) mit Kleinbuchstaben.



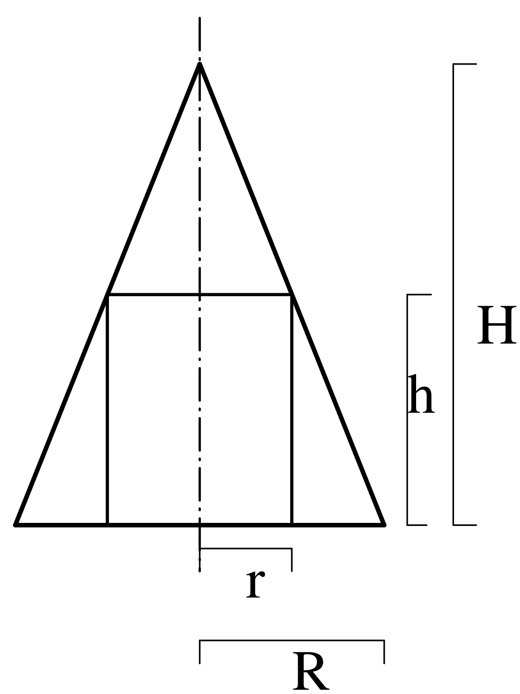
2. <u>Hauptbedingung:</u>

   $V_Z(r,h) = r^2\pi h \rightarrow \max$

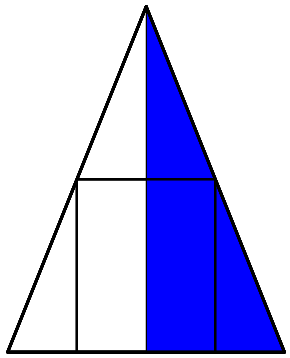
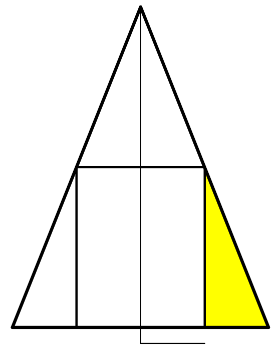
3. <u>Nebenbedingung:</u>

   Spätestens jetzt sollte man eine 2-dimensionale Skizze erstellen.

   Mit Hilfe des Strahlensatzes (4.Kl.), bzw. durch daraus ableitbaren Ähnlichkeitsüberlegungen kann man folgende Proportion aufstellen:



H : R = h : (R – r)

Nicht vergessen: Der Kegel ist vorgegeben, R und H sind also wie reelle Zahlen zu behandeln.
Durch die formulierte Proportion kann man einen Zusammenhang zwischen r und h aufstellen:

$H(R - r) = Rh$

Wir drücken h durch r aus:

$$h = \frac{H(R-r)}{R}$$

Natürlich könnte man auch r durch h ausdrücken. Das ist aber aufwändiger und wegen des r^2 in der Hauptbedingung nicht empfehlenswert.

Einsetzen in die Hauptbedingung:

$$V_Z(r) = r^2\pi\frac{H(R-r)}{R}$$

Nun folgt eine Überlegung, die bei unserem ersten Übungsbeispiel (A4) auch schon möglich gewesen wäre, aus Gründen der Überschaubarkeit aber nicht durchgeführt wurde:
In weiterer Folge wollen wir ja das maximale Volumen berechnen und daher die Volumsfunktion nach r ableiten und gleich 0 setzen. Die Lösung wird nicht von im Funktionsterm vorhandenen konstanten Faktoren beeinflusst, wie die folgende Parallelrechnung zeigt:

$$V_Z(r) = r^2\pi\frac{H(R-r)}{R} = \frac{r^2\pi HR}{R} - \frac{r^3\pi H}{R} = \pi Hr^2 - \frac{\pi H}{R}r^3$$

$$\frac{dV_Z(r)}{dr} = 2\pi Hr - \frac{3\pi H}{R}r^2 = 0$$

$$\pi Hr(2 - \frac{3}{R}r) = 0$$

$r_1 = 0$

$2 - \frac{3}{R}r = 0$, $r_2 = \frac{2R}{3}$

In der Volumsformel steckt der konstante Faktor $\frac{\pi H}{R}$, den wir vernachlässigen können.

$$\overline{V_Z(r)} = r^2(R-r) = r^2R - r^3$$

$$\frac{d\overline{V_Z(r)}}{dr} = 2rR - 3r^2 = r(2R - 3r)$$

$r_1 = 0$

$r_2 = \frac{2R}{3}$

Der zweite Rechengang ist deutlich einfacher. In der Rechnung mit Derive ist das allerdings egal.

r_1 liefert sicher ein Volumsminimum.

r_2:
Wir berechnen h:

$$h = \frac{H(R-r)}{R} = \frac{H(R-\frac{2R}{3})}{R} = \frac{H\frac{R}{3}}{R} = \frac{H}{3}$$

Das maximale Zylindervolumen beträgt

$$V_Z = \left(\frac{2R}{3}\right)^2 \pi \frac{H}{3} = \frac{4}{27} R^2 \pi H$$

Siehe dazu auch den Rechengang mit Derive.