Arbeitsblatt 4

Extremwertaufgaben 1

Problemstellung:

Eine Firma stellt Konserven her.
Wie sind zylindrische 1-Liter-Dosen zu dimensionieren (Radius, Höhe), dass für die Herstellung möglichst wenig Material erforderlich ist?

Übersetzung in die Sprache der Mathematik:

Ein Drehzylinder hat ein Volumen von 1000 cm^3.
Wie sind Radius und Höhe des Zylinders zu wählen, damit die Oberfläche minimal ist?

Lösungsidee:
Die Oberfläche ist eine Funktion von Radius und Höhe:
$O(r,h) = 2r^2\pi + 2r\pi h$
Diese Gleichung nennt man die **Hauptbedingung** oder **Zielfunktion**. Sie enthält die Variable, die ein Extremum erreichen soll.

Wir suchen also das (lokale) Minimum dieser Funktion.
Wir können aber nur von Funktionen in **einer** Variablen Extremwerte berechnen.
Glücklicherweise haben wir noch eine Information:
$V = 1000$
Die Formel für das Zylindervolumen lautet $V = r^2\pi h$.
Mit $r^2\pi h = 1000$ haben wir einen Zusammenhang zwischen r und h, den wir für die Berechnung verwenden werden. Diese Gleichung nennen wir **Nebenbedingung**.

Aus ihr folgt: $h = \frac{1000}{r^2\pi}$ (Natürlich könnte man auch r durch h ausdrücken, das würde aber in weiterer Folge zu einer schwierigeren Rechnung führen.)

Setzt man die Nebenbedingung in die Hauptbedingung ein, ergibt sich

$$O(r) = 2r^2\pi + 2r\pi . \frac{1000}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{2000}{r}$$

Nun haben wir die Oberfläche als Funktion des Radius.

Zur Ermittlung des Minimums berechnen wir die erste Ableitung und setzen sie gleich 0:

$$\frac{dO}{dr} = 4r\pi - \frac{2000}{r^2} = 0$$

$$4r\pi = \frac{2000}{r^2}$$

$$r^3 = \frac{500}{\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

r = 5,42 cm

Aus der Nebenbedingung kann man h ausrechnen:

$$h = \frac{1000}{\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^2 \pi} = \sqrt[3]{\frac{4000}{\pi}}$$

h = 10,84 cm

Die minimale Oberfläche beträgt daher 553,6 cm^2.

Anmerkungen:
Fällt dir ein Zusammenhang zwischen r und h auf?
Wie sieht die Dose von vorne aus?