Summen von Mengen

Angaben:

1. $A := \{a_1, a_2\}, B := \{b_1, b_2, b_3\}$.
   Bestimme die Menge $A + B$ explizit (d.h. gib alle Elemente der Menge an!)

2. $U := \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \}, \quad V := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad \exists s \in \mathbb{R} : x = 2s, y = -s, z = 5s \}$

   Bestimme $V + U$ in moeglichst einfacher und anschaulicher Form!

Loesungen:

1. $A+B := \{z = a+b \quad | \exists a \in A, \exists b \in B\}$ laut Definition der Summe zweier Mengen. D.h. es kommen alle Kombinationen von Elementen in dieser Reihenfolge vor:

   $A+B = \{a_1+b_1, a_1+b_2, a_1+b_3, a_2+b_1, a_2+b_2, a_2+b_3\}$.

2. Eine schoenere Charakterisierung von V lautet:
   $V = \{ \begin{pmatrix} 2s \\ (-1)\cdot s \\ 5s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad \exists s\} = \{s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad \exists s\}$

   $U+V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \qquad \vee \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}\} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}\} \cup \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}\}$.

   $U+V$ ist also die Vereinigung der Geraden $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$