Bsp eines Unterraums

V sei ein Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Seien $v, w \in V$ beliebig gewählt.

Z.z. $U := [\{v, w\}]$ ist ein Unterraum von V

Was ist zu zeigen?

1.) $\forall a \in U \quad \forall \lambda \in K \quad : \lambda a \in U$ (abgeschlossen bezüglich der Multiplikation)
2.) $\forall a, b \in U \quad : \quad a + b \in U$ (abgeschlossen bezüglich der Addition)

Für den Beweis ist es notwendig, auf die Definition von U zurückzugehen:

$$U := [\{v, w\}] := \{\beta v + \gamma w \mid \beta, \gamma \in K\}$$

Lösungshilfe: Lies noch einmal die Definition des Unterraums samt Erklärungen für 1.) und 2.)

Lösung:

1.)

Sei $a \in U$ beliebig gewählt. Dann gibt es laut Definition von U zwei Skalare β, γ aus dem Körper, sodass gilt: $a = \beta v + \gamma w$.

Sei weiters $\lambda \in K$ beliebig gewählt.

Betrachte nun $\lambda\, a = \lambda(\beta v + \gamma w) = \lambda\beta v + \lambda\gamma w = (\lambda\beta)v + (\lambda\gamma)w$.

Da $\lambda, \beta \in K$,ist auch $\lambda\beta \in K$. Analoges für $\lambda\gamma$.

Also lässt sich $\lambda\, a$ als Linearkombination von u, v schreiben und daher ist $\lambda\, a \in U$

2.)

Sei $a \in U$ beliebig gewählt. Dann gibt es laut Definition von U zwei Skalare β, γ aus dem Körper, sodass gilt: $a = \beta v + \gamma w$.

Sei $b \in U$ beliebig gewählt. Dann gibt es laut Definition von U zwei Skalare λ, δ aus dem Körper, sodass gilt: $b = \lambda v + \delta w$

Betrachte nun $a + b = (\beta v + \gamma w) + (\lambda v + \delta w) = \cdots = (\beta + \lambda)v + (\gamma + \delta)w$

Da $\beta, \gamma, \lambda, \delta$ aus dem Körper sind, sind es auch ihre Summen. Somit lässt sich $a + b$ wieder als Linearkombination von u, v schreiben – also ist $a + b \in U$