Lösung von Extremwertaufgaben mit Differentialrechnung

Inhalt:

1. Einführung
2. Allgemeiner Lösungsansatz
3. Erstes Beispiel
4. Absolutes Maximum am Rand
5. Manchmal genügt die zweite Ableitung nicht
6. Balken mit maximaler Tragfähigkeit
7. Säule aus Draht
8. Maximales Rotationsvolumen
9. Polynom gesucht
10. Zylindrische Literdose
11. Eingeschlossene Fläche
12. Acker neben Straße
13. Scheitelpunkt einer Parabel

Einführung

Die Differentialrechnung liefert ein Hilfsmittel zur Lösung von Extremwertproblemen. Die Komplexität dieser Aufgaben für Schüler erklärt sich zum kleineren Teil aus der Kenntnis oder Nichtkenntnis der elementaren Zusammenhänge von Funktion, Ableitung und Nullstellen bzw. Vorzeichen von Ableitungen.
Die größere Schwierigkeit bieten die Aufgabenstellungen selbst. Extremwertaufgaben sind meistens Textaufgaben, die zuerst verstanden werden müssen. Die Anwendung der Methoden der Differentialrechnung ist erst möglich, wenn ein geeignetes mathematisches Modell der Aufgabe übersetzt worden ist.

Im folgenden gebe ich einige Beispiele für Extremwertaufgaben. Anhand dieser Beispiele möchte ich die allgemeine Lösungsmethode verdeutlichen und auf die Behandlung möglicher Sonderfälle eingehen. Abgesehen davon, daß es eine große Vielfalt weiterer Übungsaufgaben zum Thema gibt, die ich unmöglich alle hier lösen kann, hoffe ich, daß genügend Beispiele vorhanden sind, mit denen der Leser sich in den Stand setzen kann, solche Aufgaben zu lösen.
Zunächst formuliere ich das grundlegende Vorgehen

Allgemeiner Lösungsansatz

Extremwertaufgaben, die als Textaufgaben formuliert sind, werden in folgenden Schritten gelöst:

1. Schreibe auf, was gegeben und was gesucht ist. Gib den Ausgangsgrößen und Unbekannten passende Namen (a, x, q, A, F, V usw).
2. Stelle die Aufgabensituation in einer Skizze dar.
3. Erkenne die Zielfunktion, und formuliere sie als mathematische Funktion in Abhängigkeit von den Ausgangsgrößen und Unbekannten.
4. Erkenne die Nebenbedigung. Eine Extremwertaufgabe ohne Nebenbedingung ist sinnlos. Die Wahl der zu bestimmenden Größen muß durch die Aufgabe in irgendeiner (evtl. versteckten) Weise eingeschränkt sein.
   Formuliere die Nebenbedingung als mathematischen Ausdruck.
5. Hat man die Zielfunktion, die meist aus mehreren voneinander unabhängigen Variablen besteht und die Nebenbedingungen, die die voneinander unabhängigen Variablen zueinander in Beziehung setzt, formuliert, dann kommt die Differentialrechnung zur Anwendung.

a. Setze die Nebenbedingungen in die Zielfunktion so ein, daß eine äquivalente Zielfunktion für den zu optimierenden Wert in Abhängigkeit von nur einer Ausgangsgröße entsteht.
b. Bestimme Maximum oder Minimum der Zielfunktion durch Nullsetzen der ersten Ableitung und Überprüfung des Vorzeichens der zweiten Ableitung. Beachte dabei den möglicherweise durch die Aufgabenstellung implizit eingeschränkten Definitionsbereich (z.B. ist eine negative Länge sinnlos). Beachte die Ränder des Definitionsbereichs. Bei Schulaufgaben selten, aber in der Praxis denkbar ist, daß zwar im Definitionsbereich ein lokales Extremum vorliegt, aber die Zielfunktion ihr absolutes Extremum am Rand des Definitionsbereichs annimmt. Diese Werte findet man i.d.R. nicht durch Differenzieren. Die Ränder müssen gesondert geprüft werden: durch Einsetzen der Randwerte in die Zielfunktion und Vergleich des Funktionswertes mit dem lokalen Extremum.

Bei Extremwertaufgaben gibt es immer eine Zielfunktion, deren Wert maximiert/minimiert werden soll und eine Nebenbedingung, die die Wahl der Variablen in der Zielfunktion beschränkt.

Erstes Beispiel

Mit einer vorhandenen Rolle Zaun (darauf sind 50 m) soll ein möglichst großes Stück Land rechteckig eingezäunt werden.

Zielgröße ist die eingezäunte Fläche. Die Fläche eines Rechtecks ist $F=x*y$, dabei stehen x und y für die Seitenlängen des Rechtecks. F ist eine Funktion der Seitenlängen.
Die Nebenbedingung ist, daß nur 50m Zaun vorhanden sind. Um ein Rechteck mit Seitenlängen x und y einzuzäunen braucht man

$$2x+2y = 50$$

Meter Zaun (den Umfang des Rechtecks).
Zwischen den scheinbar unabhängigen Variablen x und y besteht durch die Nebenbedingung eine Beziehung.

Nun könnte man versuchen Lösungen zu raten.
Mit $x=5$ und $y=20$ benötigt man genau $2*20 + 2*5 = 50$m Zaun und die Fläche beträgt dann $5*20=100$ m^2.
Das Raten von Lösungen ist eine Methode, die Aufgabe richtig zu verstehen. Raten führt selten zur optimalen Lösung, oder wenn doch, dann fehlt am Ende die Gewißheit (der Beweis) für die Extremaleigenschaft der geratenen Lösung. Raten fördert die Anschauung. Die Lösung wird mit Differentialrechnung bestimmt und zugleich bewiesen.

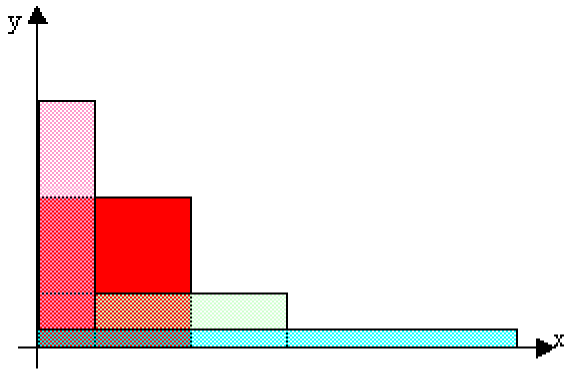


Abb. 1: Verschiedene Rechtecke mit gleichem Umfang. Die Fläche ist am größten, wenn das Rechteck ein Quadrat ist.

Stelle die Funktion der Fläche in Abhängigkeit von x auf:

$F(x) = x * y = x * (50 - 2x) /2$

Über die Ableitung F'(x) findet man mögliche lokale Maxima der Funktion F(x).

$F'(x) = 25 - 2x$

Suche Nullstellen von F':

$F'(x) = 0 = 25 - 2x$
$\Leftrightarrow x = 12,5$

Wenn x=12,5 ist, dann ist y=12,5. Das folgt aus der Nebenbedingung.

Die Fläche des Rechtecks ist $F = 12,5*12,5 = 156,25\ m^2$

Das kann nun (im allgemeinen) ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum sein. Durch das Vorzeichen der zweiten Ableitung an der Stelle des lokalen Extremums erfährt man, ob es ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ist. Da

$F''(x) = -2$

für alle x negativ ist, liegt an der Nullstelle der ersten Ableitung ein lokales Maximum vor. Darum ist x=12,5 ein guter Kandidat für eine Lösung.

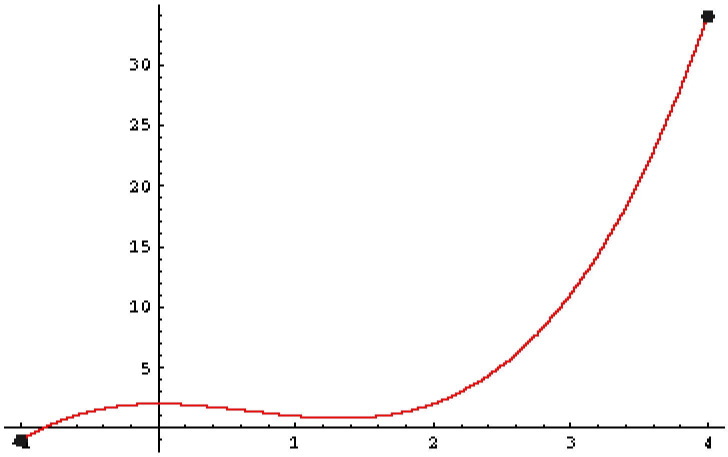
Wieso nur ein guter Kandidat? Man muß untersuchen, ob es sich im Definitionsbereich für x wirklich um das absolute Maximum handelt. Es könnte nämlich an den Rändern des Definitionsbereiches für x noch größere Werte geben. Man muß die Ränder gesondert untersuchen.
Im Beispiel ist der Definitionsbereich [0,25]. Denn negative x oder negative y sind nicht sinnvoll, weil x und y für Längen stehen.
Sowohl für x=0, als auch für x=25 ist der Wert von F(x) gleich 0.
x=12,5 ist ein absolutes Maximum im Definitionsbereich.
Bei Verwendung von 50 m Zaun, ist die maximale einzäunbare Fläche gleich $156,25\ m^2$

> Anmerkung: Mathematiker sind sehr genau. Das belegt folgende Geschichte:
> Ein Journalist, ein Physiker und ein Mathematiker fahren mit dem Zug durch die ungarische Ebene. Sie sehen eine Wiese auf der zwei schwarze Schafe grasen. Der Journalist sagt: "In Ungarn sind die Schafe schwarz". Der Physiker spricht dagegen: "In Ungarn gibt es zwei schwarze Schafe". Der Mathematiker weist die beiden zurecht: "In Ungarn gibt es mindestens 2 Schafe, die auf mindestens einer Seite schwarz sind."
> Warum erzähle ich das hier? Wegen des "Kandidaten".

Absolutes Maximum am Rand

Bestimme das Maximum der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ im Intervall [-1, 4].

Die Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 4x$ hat die Nullstellen x = 0 und x = 4/3.
Die zweite Ableitung $f''(x) = 6x - 4$ nimmt für x = 0 einen negativen und für x = 4/3 einen positiven Wert an. Folglich liegt bei x=0 ein lokales Maximum und bei x=4/3 ein lokales Minimum vor.
Hier ist der Graph dieser Funktion:

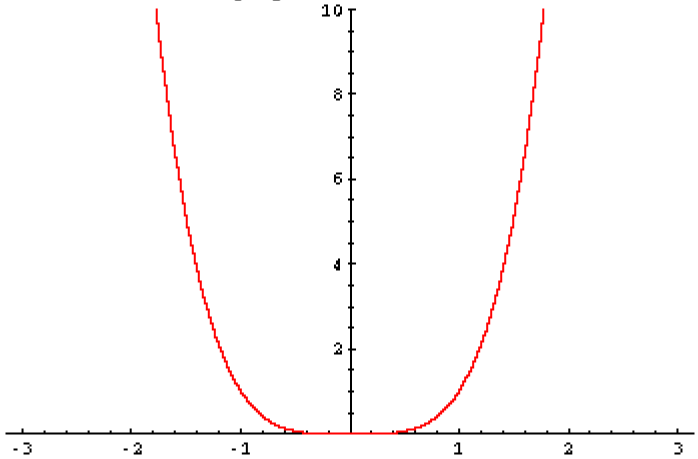


Wie man sehen kann ist das lokale Maximum bei x=0 nicht das absolute Maximum im angegebenen Definitionsbereich. Für x=4 ist der Funktionswert deutlich größer. Die Differentialrechnung liefert diesen Wert nicht, sie liefert nur lokale Extrema.

Manchmal genügt die zweite Ableitung nicht

Bestimme das Minimum der Funktion $f(x) = x^4$.

Diese Aufgabe ist so einfach, jeder kennt die Lösung. Das Minimum liegt bei $x = 0$.
Hier der Funktionsgraph:



Die erste Ableitung $f'(x) = 4x^3$ hat bei $x = 0$ eine (mehrfache) Nullstelle.
Die zweite Ableitung $f''(x) = 12x^2$ ist an x=0 ebenfalls 0. Das sagt nichts darüber, ob bei x=0 ein lokales Maximum oder Minimum vorliegt. Was tun? Man betrachtet in diesem Fall die erste Ableitung genauer. Man prüft nämlich, ob die 1. Ableitung an der kritischen Stelle das Vorzeichen wechselt.
Es gilt die Regel:

- Wechselt das Vorzeichen von f ' bei x_0 von Minus nach Plus, dann liegt ein Minimum vor.
- Wechselt das Vorzeichen von f ' bei x_0 von Plus nach Minus, dann liegt ein Maximum vor.
- Wechselt das Vorzeichen von f ' bei x_0 nicht, dann liegt dort kein Extremum vor.

Um das einzusehen muß man sich an die Bedeutung der ersten Ableitung als *Steigung* der Funktion erinnern.
Eine Funktion mit waagerechter Tangente in x_0, die links von x_0 fällt und rechts von x_0

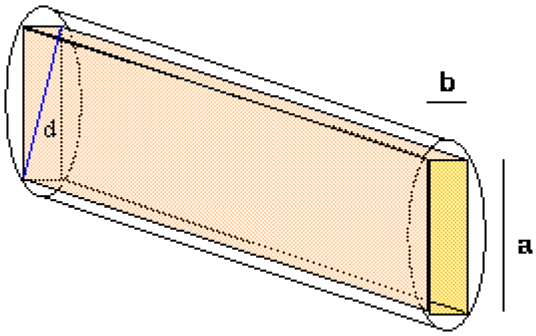
steigt, hat in x_0 ein lokales Minimum.
Eine solche Funktion, die links von x_0 steigt und rechts von x_0 fällt, hat in x_0 ein lokales Maximum.
Eine solche Funktion, die auf beiden Seiten von x_0 steigt bzw. fällt, hat in x_0 kein lokales Extremum.

Für $f(x) = x^4$ ist $f'(x) = 3x^3$. An x=0 wechselt das Vorzeichen der 1. Ableitung von Minus nach Plus, d.h. bei x=0 hat $f(x) = x^4$ ein (lokales) Minimum.
Dagegen hat $g(x) = -x^4$ die Ableitung $g'(x) = -3x^3$. An x=0 wechselt das Vorzeichen der 1. Ableitung von Plus nach Minus, d.h. bei x=0 hat $g(x) = -x^4$ ein (lokales) Minimum.
Schließlich: $h(x) = x^3$ hat die Ableitung $h'(x) = 3x^2$. Bei x=0 findet kein Vorzeichenwechsel statt, d.h. x=0 ist weder Minimum noch Maximum.

Balken mit maximaler Tragfähigkeit

Aus einem Baumstamm, der einen durchgängig gleich großen kreisförmigen Querschnitt hat, soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt von möglichst großer Tragfähigkeit herausgeschnitten werden. Die Tragfähigkeit ist proportional zur Balkenbreite und zum Quadrat der Balkendicke. In welchem Verhältnis müssen Dicke und Breite des Balkens zueinander stehen?

Da ist ein Baumstamm in Form eines Zylinders mit Durchmesser d.
Wenn man daraus einen rechteckigen Balken sägt, dann hat dieser die Dicke a und die Breite b.
Zeichnet man sich den Querschnitt des Balkens in den kreisförmigen Querschnitt des Zylinders, dann sieht man, daß $a^2 + b^2 = d^2$ zu sein hat. Das ist die Nebenbedingung.



Anmerkung: Es wäre natürlich auch möglich kleinere rechteckige Querschnitte auszusägen, also nur $a^2+b^2 \le d^2$ zu verlangen. Da aber die Tragfähigkeit zu maximieren ist, und diese mit größerem a und größerem b wächst, kommt das nicht in Betracht. Man tut am besten, wenn man den Zylinderquerschnitt voll ausnutzt.

Nun soll die Zielfunktion bestimmt werden. Die Aufgabe sagt, daß die Tragfähigkeit proportional zur Breite b und proportional zum Quadrat der Dicke a ist. Ohne den physikalischen Sinn dieser Aussage zu verstehen oder diskutieren zu wollen, stellt man daraus die Zielfunktion für die Optimierung auf, nämlich $a^2 * b$ = maximal.

Ich fasse zusammen:

Zielfunktion: $a^2 * b$ = maximal
Nebenbedingung: $a^2 + b^2 = d^2$

Mit der Nebenbedingung ersetzt man eine der Unbekannten in der Zielfunktion.
Ich nehme die Ersetzung von a^2 vor, weil ich damit Wurzeln vermeiden kann.
Das ergibt die Funktion t der Tragfähigkeit in Abhängigkeit von der Breite b:

$$t(b) = (d^2 - b^2) * b$$

Die Ableitungen von t(b) lauten:

$$t'(b) = -3b^2 + d^2$$
$$t''(b) = -6b$$

Man setzt die Ableitung gleich 0:

$$t'(b) = -3b^2 + d^2 = 0 \iff b^2 = d^2 / 3$$

Die zweite Ableitung ist für alle in Frage kommenden positiven Breiten negativ. Das zeigt, daß an der Nullstelle der ersten Ableitung tatsächlich ein (lokales) Maximum vorliegt.

Aus der Nebenbedingung errechnen wir den dazu gehörenden Wert für a (bzw. a^2).

$$a^2 = d^2 - d^2 / 3 = 2/3\ d^2$$

In der Aufgabe ist für d kein konkreter Wert gegeben. Es wird nach dem Verhältnis von a und b gefragt, also nach a/b.
Aus $a^2/b^2 = (2/3\ d^2) / (1/3\ d^2) = 2$ folgt, daß $a/b = \sqrt{2}$.

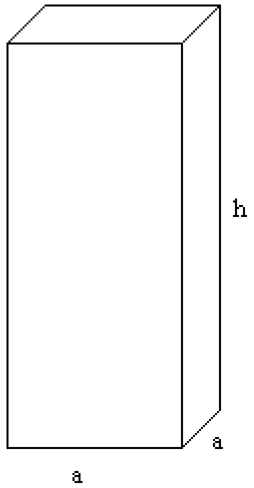
Was ist dazu noch zu sagen:

1. Das optimale Verhältnis ist unabhängig vom Durchmesser.
2. Die Formel $a/b= \sqrt{2}$ sagt, daß der Balken 1.41 mal so dick wie breit sein soll. Die Dicke ist damit größer als die Breite. Man muß sich den Balken mit der schmalen Seite als Breite vorstellen.

Säule aus Draht

Aus einem Stück Draht, das 36 cm lang ist, soll eine "Säule" mit quadratischem Grundriß geformt werden. Welches ist das maximal mögliche Volumen der Säule?

In dieser Aufgabe ist eine Länge gegeben (des Drahtes).
Wenn die Säule aus Draht geformt werden soll, ist wohl gemeint, daß mit dem Draht die Kanten der Säule gebildet werden sollen. Der Draht muß ausreichen, um daraus die Gesamtlänge aller Kanten zu bilden.



Die Nebenbedingung lautet

$$8\,a + 4\,h = 36$$

Die "quadratische" Säule hat eine quadratische Grundfläche a*a und eine Höhe h. Das Volumen soll maximiert werden. Wie lautet die Zielfunktion?
Das Volumen einer Säule ist Grundfläche mal Höhe. Die Grundfläche ist a^2, die Hühe h.
Als Zielfunktion haben wir:

$$V = a^2 * h$$

Hinweis (weil die Frage schon mal kam): Hier eine Nebenbedingung mit der Oberfläche zu setzen, entspricht nicht der Aufgabe.

Indem die Nebenbedingung 8a+4h=36 nach (z.B.) h aufgelöst und in die Zielfunktion eingesetzt wird, erhält man die Funktion des Volumens in Abhängigkeit von a:

$$F(a) = a^2 * (9-2a)$$

Die Lösung lautet schließlich: a=h=3.
Das Volumen der Säule ist maximal, wenn sie ein Würfel (Kubus) ist.

Eine ähnliche Aufgabe gibt es auch mit der Quaderoberfläche als Nebenbedingung.
Aus 36cm² Pappe soll eine quadratische Säule maximalen Volumens gebildet werden.

Hier ist die Nebenbedingung die Oberfläche

$$F = 36 = 4ah+2a^2=36 \text{ oder } ah = (36-2a^2)/4.$$

Das eingesetzt in V ergibt:

$$V = a^2h = a * ah = a*(36-2a^2)/4 = 9a-a^3/2$$

Ableitung:

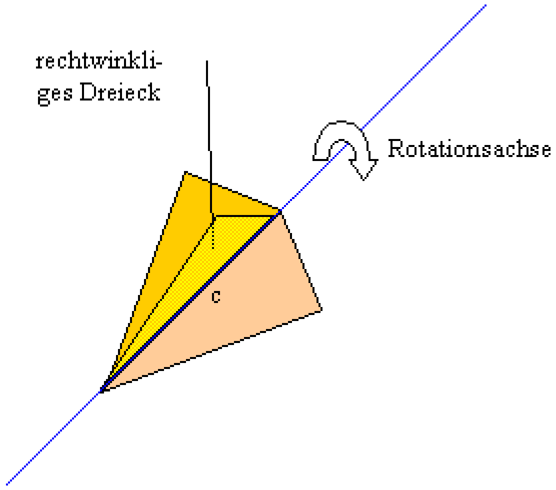
$$V'(a) = 9-3/2*a^2 = 0 \Rightarrow a=w(6) \text{ und } h = w(6)$$

Die Ergebnisse haben eins gemeinsam: in beiden Fällen ist a=h. Die quadratische Säule hat maximales Volumen, wenn sie ein Kubus ist.

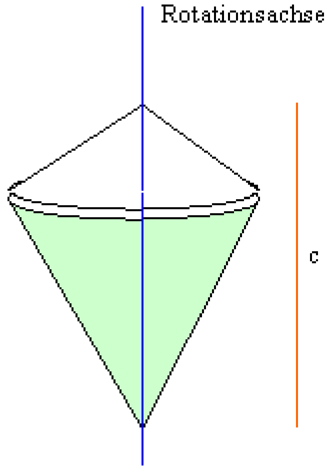
Maximales Rotationsvolumen

Welches rechtwinkelige Dreieck mit der Hypotenuse c=6 cm erzeugt einen Doppelkegel größten Volumens, wenn man es um die Hypotenuse dreht?

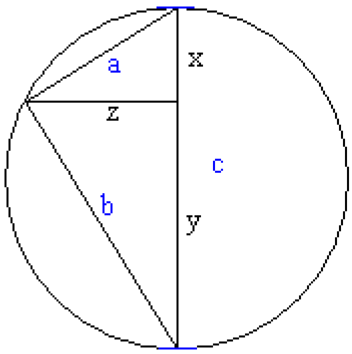
Antwort: Das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck!



Wo ist nun der "Doppelkegel", dazu noch ein Bild:



Die folgende Skizze zeigt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten a, b und c (blau) und den Hilfsgrößen x, y, z (schwarz).
Jedes rechtwinklige Dreieck paßt in einen Halbkreis. Durch die Aufteilung der gegebenen Hypotenuse c=6 in die Abschnitte x und y ist im Halbkreis genau ein rechtwinkliges Dreieck bestimmt. Dieses hat die Höhe z.



Der durch Rotation des Dreiecks um die Hypotenuse entstehende Körper besteht aus zwei Kreiskegeln.
Die allgemeine Formel für das Volumen eines Kreiszylinders lautet V = 1/3 * G * h.
Wenn das Dreieck mit den Seiten a, z, x um x rotiert, entsteht ein Kreiskegel mit der Höhe x und der Grundfläche pi * z^2.
Wenn das Dreieck mit den Seiten b, y, z um y rotiert, entsteht ein Kreiskegel mit der Höhe y und der gleichen Grundfläche, nämlich pi * z^2.
Die Summe der Volumina der beiden Kreiskegel beträgt

$$\begin{aligned} V &= 1/3\ \text{pi} * z^2 * x + 1/3\ \text{pi} * z^2 * y \\ &= 1/3\ \text{pi} * z^2 * (x + y) \\ &= 1/3\ \text{pi}\ z^2 * 6 \\ &= 2\ \text{pi}\ z^2 \end{aligned}$$

Das ist eine Formel für das Volumen, die nicht von a, b oder c abhängt, sondern von einer Hilfsgröße z. Man könnte nun versuchen z durch a, b auszudrücken (Pythagoras), aber das ist hier nicht nötig - zum Glück, denn dadurch würde es vermutlich komplizierter.
Wir gehen für den Moment dazu über, das optimale z zu bestimmen.

Beginnen wir mit dem normalen Vorgehen:
Es ist V(z) = 3pi*z^2, V'(z) = 6pi*z und V''(z) = 6pi.
Daraus folgt aber nur, daß bei z=0 ein (lokales) Minimum vorliegt, denn V'(z) = 6pi*z = 0 gilt nur für z = 0.
Mit diesem Ansatz findet man kein Maximum.

Gibt es denn kein Maximum? Doch, natürlich gibt es eines. Das Volumen wird um so größer, je größer z ist. Kann denn z beliebig groß werden? Nein, z kann maximal gleich dem Radius des Halbkreises werden, in dem das Dreieck mit der Hypotenuse c=6 einbeschrieben ist. Der Radius dieses Kreises ist gleich c/2. Mit c=6 folgt, daß z maximal 3 sein kann.
Das maximale Volumen wird somit am Rand des Definitionsbereichs von z, nämlich bei z = 3 angenommen.
In diesem Fall ist das rechtwinklige Dreieck a, b, c ein **gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck**.

Damit haben wir die Lösung.
Wer mag rechnet nun schnell die konkreten Längen für die anderen Größen aus:

- x = y = 3, denn die Hypotenusenabschnitte x und y sind im gleichschenkligen Dreieck gleich lang, und ihre Summe muß c = 6 sein.
- a = wurzel(18), denn Pythagoras sagt: $a^2 = z^2 + x^2$ und z = x = 3
- b = wurzel(18), denn im gleichschenkligen Dreieck sind die Katheten gleich lang.

Polynom gesucht

Eine Polynomfunktion hat ein Minimum an der Stelle x=2, ein Maximum an der Stelle x=-1; sie schneidet die x-Achse bei 1 und die y-Achse bei 2. Bestimme den Funktionsterm!

Es ist kein Grad für das gesuchte Polynom gegeben.
Wenn die Aufgabe so wie sie ist, vollständig ist, dann würde ich folgendes machen:
Zähle die Anzahl der Bedingungen, die die ganzrationale Funktion erfüllen soll.
Hier sind das 4 Bedingungen: Minimum, Maximum, schneidet x-Achse, schneidet y-Achse.
Wenn 4 Bedingungen gegeben sind, dann benötigt man im allgemeinen ein Polynom dritten Grades

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Man hat dann 4 Unbekannte (a,b,c,d) und 4 Gleichungen. Das verspricht eine Lösung.

Ein Polynom dritten Grades ist hier auch mindestens nötig, denn ein Polynom zweiten Graden hätte nicht zwei (verschiedene) Nullstellen der ersten Ableitung. Wegen der Bedingungen zu Minimum und Maximum muß es ja zwei Nullstellen der ersten Ableitung geben.

Natürlich gibt es auch Polynome höheren Grades als 3, mit denen die gestellten Bedingungen erfüllt werden könnten. Dann hätte man bei einem Polynom vierten Grades 4 Gleichungen mit 5 Unbekannten. Das ist nicht die übliche Vorgehensweise in der Schule.

Ich habe mich jetzt entschlossen, daß ein Polynom dritten Grades gesucht ist.
Die Gleichungen, die sich aus den Angaben der Aufgabenstellung ergeben sind:

f(x) hat zwei lokale Extremwerte bei $x = 2$ und $x = -1$.
Die Ableitung des Polynoms f ist

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Das ergibt die Gleichungen

$$f'(2) = 12a+4b+c = 0 \text{ und}$$
$$f'(-1) = 3a-2b+c = 0$$

Außerdem ist $f(1)=0$ und $f(0)=2$, also

$$f(1) = a+b+c+d = 0 \text{ und}$$
$$f(0) = d = 2$$

Nun kann man das Gleichungssystem selbst lösen.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\ & & & & & & d & = & 2 \\ 12a & + & 4b & + & c & & & = & 0 \\ 3a & - & 2b & + & c & & & = & 0 \end{array}$$

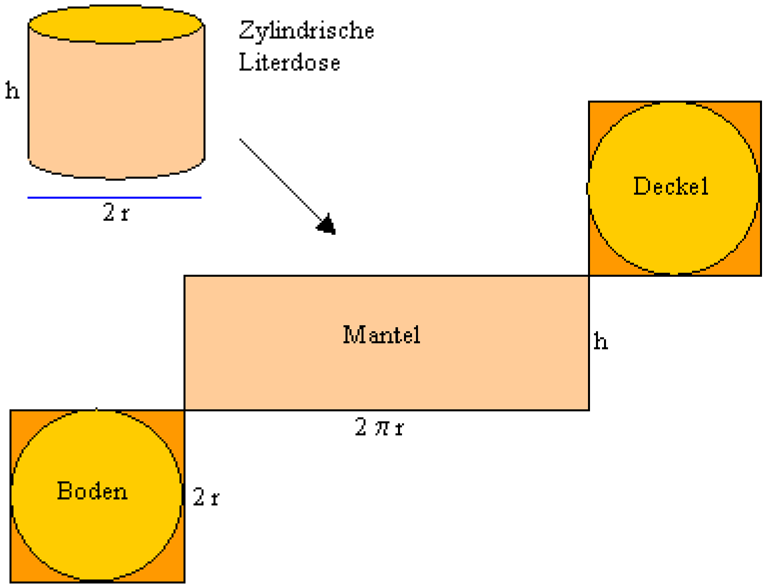
Die Lösung lautet schließlich:

4 6 24

```
f(x) = -- x³ - -- x² - -- x + 2
       13      13      13
```

Zylindrische Literdose

Es soll eine zylindrische Literdose hergestellt werden. Dabei werden Grund- und Deckkreis aus dem umschriebenen Quadrat ausgeschnitten. Wie groß sind die Ausmaße zu wählen, wenn dabei möglichst wenig Blech verwendet werden soll und der Abfall beim Ausstanzen der Grund- und Deckfläche zum verbrauchten Material zählt.



Es soll einschließlich Abfall minimiert werden.
Da Deckel und Boden aus einem quadratischen Blech gestanzt werden, ist die Fläche des verwendeten Blechs:

$$F = 2 * (2r)^2 + 2*\pi*r*h$$

Das Volumen der Dose soll 1 Liter betragen. Ein Liter ist 1 dm^3, darum wähle ich als Einheit für alle Längen im folgenden Dezimeter (dm). Die Formel für das Volumen ist

$$V = 1 = \pi\, r^2 * h$$

Daraus folgt durch Termumformung

$$h=1/(r^2*\pi)$$

Man erhält die Funktion der Fläche in Abhängigkeit vom Radius r.

$$F(r) = 8\, r^2 + 2*\pi*r*h$$

Diese Zielfunktion ist zu minimieren.
Das Ergebnis ist r=1/2, also 1/2 dm oder 5 cm.

Eingeschlossene Fläche

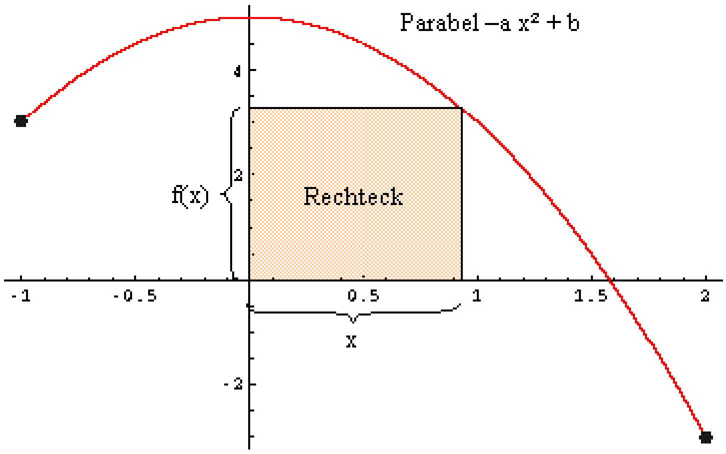
Die Funktion

$f(x) = -a * x^2 + b$

schließt im ersten Quadranten ein Rechteck mit der x und y Achse ein.
Für welches x wird der Flächeninhalt maximal?

Es ist ein Rechteck gesucht, dessen linke untere Ecke im Nullpunkt des Koordinatensystems liegt, und dessen rechte obere Ecke auf dem Graphen der gegebenen Funktion liegt.
Die rechte obere Ecke soll so gewählt werden, daß die Fläche des Rechtecks maximal wird.

Diese Ecke hat die Koordinaten (x/y) mit $y=-ax^2+b$



Weil die Funktion f(x) bei w(b/a) eine Nullstelle hat (das ist ein Schnittpunkt mit der x-Achse), ist ein x e [0,w(b/a)] gesucht (Definitionsbereich).

Die Fläche in Abhängigkeit von x ist

$F(x) = x * y = x * (-ax^2+b) = -ax^3+bx$

Diese Funktion der Fläche ist zu differenzieren.

$F'(x) = -3ax^2 + b$

Man findet im Definitionsbereich die positive Nullstelle:

$x = w(b/(3a))$

[die negative Nullstelle liegt nicht im ersten Quadraten].
Dieses x ist im zu betrachtenden Intervall (das ist gut), und es ist

$F''(x) = -6ax$

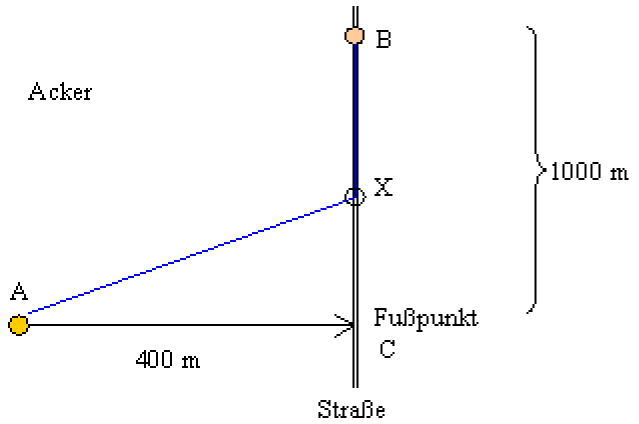
Daher ist F''(w(b/(3a))) negativ, also ist bei x = w(b/(3a)) ein lokales Maximum.

An den Rändern des Intervalls, in dem x nur liegen kann, sind die Flächenwerte 0, darum ist x=w(b/(3a)) in [0,w(b/a)] sogar ein absolutes Maximum.

Acker neben Straße

Ein Acker liegt an einer geradlinigen Straße. Ein Fußgänger befindet sich auf dem Acker im Punkt A und möchte möglichst schnell zu einem Punkt B auf der Straße gelangen. Der Fußpunkt C des Lotes von A auf die Straße hat von A die Entfernung 400m und die Entfernung B nach C betrage (a.) 1000m (b.) 100m. Auf der Straße kann sich der Fußgänger doppelt so schnell fortbewegen wie auf dem Acker.
Welchen Weg soll er einschlagen?

Der Weg des Fußgängers von A nach B besteht aus 2 Teilen (blaue Linien). Einem geraden Weg von A zu einem Punkt X auf der Straße. Dabei hat X die Entfernung x von C mit 0<=x<=1000, und als zweitem Teilstück den Weg von X nach B (auf der Straße).



Der Weg von A nach X führt über den Acker, der Weg von X nach B über die Straße.
Die Länge des Weges von A nach X ist y = wurzel(400^2+x^2). Die Länge des Weges von X nach B ist 1000-x.
Da A auf dem Acker nur halb so schnell vorwärtskommt wie auf der Straße, ist folgende Funktion zu minimieren:

f(x) = 2*y+(1000-x)

[die 2 drückt aus, daß zurückzulegende Meter auf dem Acker doppelt zählen.]
Mit der Nebenbedingung

y = wurzel(400^2+x^2)

ergibt sich:

f(x) = 2*wurzel(400^2+x^2) + (1000 - x) = min!

Die Ableitung der Funktion f(x) lautet f'(x)=2x/wurzel(400^2+x^2)-1.
Als Lösung von f'(x)=0 findet man: x = wurzel(400^2/3) = 230,94...
Die Weglänge über den Acker beträgt darumch etwas mehr als 461,8 m.

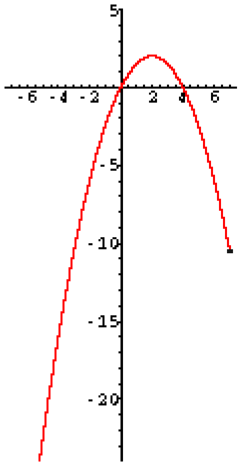
Wenn aber der Abstand zwischen B und C nur 100m beträgt, dann lautet die zu minimierende Funktion: f(x)=2*wurzel(400^2+x^2)+100-x.
Davon die Ableitung ist die gleiche wie vorhin schon betrachtet, und die Ableitung hat für 0<=x<=100 keine Nullstelle.
Also gibt es in diesem Fall kein lokales Minimum. Die Funktion ist im ganzen Intervall [0,100] streng monoton. Der Minimalwert liegt dann am Rand des Definitionsbereichs, also entweder bei x=0 oder bei x=100.
Für x=0 erhalte ich f(x) = 2*400+100 = 900
und für x=100 ist f(x) = 2*412+100-100 = 824.

Der Wert für x=100 ist der kleinere.
Folglich führt der zeitlich kürzeste Weg von A nach B auf gerader Linie direkt über den Acker.

Scheitelpunkt einer Parabel

Bestimme den Scheitelpunkt der Parabel

$$f(x) = -1/2\ x^2 + 2x$$



Der Scheitelpunkt einer Parabel ist ein Maximum oder Minimum. Dieses findet man, indem man die erste Ableitung 0 setzt.

$$f'(x) = -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Da außerdem

$$f''(x) = 1$$

für x=2 ungleich Null ist, handelt es sich wirklich um den Scheitelpunkt.

Zurück zum Seitenanfang .

Mehr von Matroid [Das Prinzip der vollständigen Induktion] [Über Fraktale und mathematische Kunst] [Volumenberechnung eines Ringes mit konstanter Höhe] [Lösung von Extremwertaufgaben mit Differentialrechnung] [Ein Problem aus der Stahlindustrie] [Über die Anzahl von Sitzordnungen am runden Tisch] [Schachbrettaufgaben]