Partialbruchzerlegung (Integralrechnung)

Dokumentnummer: DX1028
Fachgebiet: Analysis

Anmerkung:

An die Behandlung der Partialbruchzerlegung in meiner eigenen Schulzeit kann ich mich noch gut erinnern. Wir hatten einen hervorragenden Lehrer, der das wunderbar erklären konnte.

Für die Aufgabe 1 benötigten wir wohl eine Stunde.

Es ist für mich heute noch wichtig zu wissen, was ein Integral ist.
Allerdings musste ich selbst als Mathematikstudent selten Integrale berechnen. Einmal wollte ich bei einer Prüfung die Partialbruchzerlegung verwenden, was sich nach 13 Seiten Rechnung als Irrweg herausstellte.

Schlussfolgerung: nicht zu viele Übungen zu dem Thema rechnen lassen, es hat keine "Nachhaltigkeit"

1 Aufgabe 1

Figure 1:

$$\int \frac{1}{x^2 - 8x + 15} \, dx$$

Dieses Integral läßt sich nicht mit Grundintegralen lösen.

```
(%i35) f1(x):=1/(x**2-8*x+15);
```

(%o35) $f1(x):=\frac{1}{x^2-8\,x+15}$

```
(%i36) integrate(f1(x),x);
```

(%o36) $\frac{\log(x-5)}{2}-\frac{\log(x-3)}{2}$

2 Aufgabe 2

Figure 2:

$$\int \frac{x}{x^2 - 8x + 15} \, dx$$

```
(%i37) f2(x):=x/(x**2-8*x+15);
```

(%o37) $f2(x):=\frac{x}{x^2-8\,x+15}$

```
(%i38) integrate(f2(x),x);
```

(%o38) $\frac{5\log(x-5)}{2}-\frac{3\log(x-3)}{2}$

3 Aufgabe 3

Figure 3:

$$\int \frac{x^2}{x^2-8x+15}\,dx$$

Hier ist der Grad des Zählers nicht mehr kleiner als der Grad des Nenners. Klassisch bedeutet das, das man vorweg eine Polynomdivision vornehmen muss.

```
(%i39) f3(x):=x**2/(x**2-8*x+15);
```

(%o39) $f3(x):=\frac{x^2}{x^2-8\,x+15}$

```
(%i40) integrate(f3(x),x);
```

(%o40) $-\frac{9\log(x-3)}{2}+\frac{25\log(x-5)}{2}+x$

4 Aufgabe 4

Figure 4:

$$\int \frac{x^3}{x^2-8x+15}\,dx$$

Klassisch ist wiederum eine Polynomdivision erforderlich!

```
(%i41) f4(x):=x**3/(x**2-8*x+15);
```

(%o41) $f4(x):=\frac{x^3}{x^2-8\,x+15}$

```
(%i42) integrate(f4(x),x);
```

(%o42) $-\frac{27\log(x-3)}{2}+\frac{125\log(x-5)}{2}+\frac{x^2+16\,x}{2}$

5 Aufgabe 5

Figure 5:

$$\int \frac{1}{(x-3)(x-5)^2}\,dx$$

Mehrfache Nullstellen verändern den Ansatz!

(%i43) `f5(x):=1/((x-3)*(x-5)**2);`

(%o43) $f5(x):=\frac{1}{(x-3)(x-5)^2}$

(%i44) `integrate(f5(x),x);`

(%o44) $\frac{\log(x-3)}{4}-\frac{\log(x-5)}{4}-\frac{1}{2x-10}$

Hinweis zum Ansatz:

(%i45) `zerlegung:partfrac(f5(x),x);`

(%o45) $\frac{1}{4(x-3)}-\frac{1}{4(x-5)}+\frac{1}{2(x-5)^2}$

6 Aufgabe 6

Figure 6:

$$\int \frac{x}{(x-3)(x-5)^2}\,dx$$

(%i46) `f6(x):=x/((x-3)*(x-5)**2);`

(%o46) $f6(x):=\frac{x}{(x-3)(x-5)^2}$

(%i47) `integrate(f6(x),x);`

(%o47) $\frac{3\log(x-3)}{4}-\frac{3\log(x-5)}{4}-\frac{5}{2x-10}$

7 Aufgabe 7

Figure 7:

$$\int \frac{x^2}{(x-3)(x-5)^2}\,dx$$

(%i48) `f7(x):=x**2/((x-3)*(x-5)**2);`

(%o48) $f7(x):=\frac{x^2}{(x-3)(x-5)^2}$

(%i49) `integrate(f7(x),x);`

(%o49) $\frac{9\log(x-3)}{4}-\frac{5\log(x-5)}{4}-\frac{25}{2x-10}$

8 Aufgabe 8

Figure 8:

$$\int \frac{x^3}{(x-3)(x-5)^2}\,dx$$

Hier kommt wieder die Polynomdivision dazu
(bei der klassischen Vorgangsweise)

(%i50) `f8(x):=x**3/((x-3)*(x-5)**2);`

(%o50) $f8(x):=\frac{x^3}{(x-3)(x-5)^2}$

(%i51) `integrate(f8(x),x);`

(%o51) $\frac{27\log(x-3)}{4}+\frac{25\log(x-5)}{4}-\frac{125}{2x-10}+x$

9 Klassische Lösung von Aufgabe 1

(%i52) `f1(x);`

(%o52) $\frac{1}{x^2-8x+15}$

(%i53) `N:factor(denom(f1(x)));`

(%o53) $(x-5)(x-3)$

(%i54) `zerlegung:A/first(N)+B/second(N);`

(%o54) $\frac{B}{x-3}+\frac{A}{x-5}$

(%i55) `p:partfrac(f1(x),x) /* direkte Zerlegung mit Maxima */;`

(%o55) $\frac{1}{2(x-5)}-\frac{1}{2(x-3)}$

(%i56) `g:f1(x)=zerlegung;`

(%o56) $\frac{1}{x^2-8x+15}=\frac{B}{x-3}+\frac{A}{x-5}$

(%i57) `g:g*(x-5)*(x-3),ratsimp;`

(%o57) $1=(x-5)B+(x-3)A$

(%i58) `g1:g,x=5;g2:g,x=3;`

(%o58) $1=2\,A$

(%o59) $1=-2\,B$

(%i60) `g1:g1/2;g1:rhs(g1)=lhs(g1);`

(%o60) $\frac{1}{2}=A$

(%o61) $A=\frac{1}{2}$

(%i62) `g2:g2/(-2);g2:rhs(g2)=lhs(g2);`

(%o62) $-\frac{1}{2}=B$

(%o63) $B=-\frac{1}{2}$

(%i64) `a:A,g1;b:B,g2;`

(%o64) $\frac{1}{2}$

(%o65) $-\frac{1}{2}$

(%i66) `z:zerlegung,A=a,B=b;`

(%o66) $\frac{1}{2\,(x-5)}-\frac{1}{2\,(x-3)}$

(%i67) `integrate(z,x);`

(%o67) $\frac{\log(x-5)}{2}-\frac{\log(x-3)}{2}$

(%i68) `integrate(p,x);`

(%o68) $\frac{\log(x-5)}{2}-\frac{\log(x-3)}{2}$